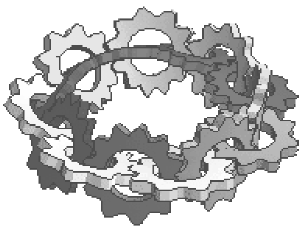
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Τομέας Φυσικής

Ασκήσεις Μηχανικής

Επιλεγμένες Ασκήσεις και Θεωρητική Εμβάθυνση
για το Μάθημα Φυσική Ι των Σχολών του Ε. Μ. Πολυτεχνείου

Σ. Μαλτέζος
Αναπληρωτής Καθηγητής Ε.Μ.Π.



Αθήνα 2005

Ασκήσεις Μηχανικής

5η έκδοση
Ιανουάριος 2014

Συγγραφέας: **Σ. Μαλτέζος**

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση της αρχικής-1ης έκδοσης: Γιώργος Ανδριανόπουλος, Διπλ. Αγρονόμος Τοπογράφος Μηχανικός Ε.Μ.Π.

Στοιχειοθεσία – Σελιδοποίηση της 5ης έκδοσης:
Ευάγγελος Μαλτέζος, Διπλ. Αγρονόμος Τοπογράφος Μηχανικός και Υποψ. Διδάκτωρ Ε.Μ.Π.

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές περιλαμβάνουν επιλεγμένες ασκήσεις και θέματα εμβάθυνσης από τη διδασκαλία του μαθήματος ***Φυσική Ι*** (Μηχανική) στις Σχολές Πολιτικών Μηχανικών (2001), Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών (2002-2004) και Μηχανικών Μεταλλείων Μεταλλουργών (2004-2013) του Ε. Μ. Πολυτεχνείου. Οι περισσότερες ασκήσεις είναι θέματα εξετάσεων που δόθηκαν στο παρελθόν στις αναφερόμενες Σχολές. Για την κατανόηση των μαθημάτων της Φυσικής, γενικά, είναι απαραίτητη η παρακολούθηση των διαλέξεων και μιας ισόρροπης μελέτης της θεωρίας και παραδειγμάτων που παρέχονται από τα επίσημα συγγράμματα και από το εκπαιδευτικό υλικό των διδασκόντων. Προσδοκώ, οι παρούσες σημειώσεις να αποτελέσουν για τους σπουδαστές μας ένα χρήσιμο βοήθημα και συμπλήρωμα στην κατεύθυνση αυτή. Οι ασκήσεις επιλύονται με υποδειγματικό τρόπο, έτσι ώστε, να γίνεται αντιληπτά, τόσο η θεωρητική βάση όσο και οι μαθηματικές τεχνικές. Τα παραρτήματα θεωρητικής εμβάθυνσης, τεκμηρίωσης και προσομοιώσεων, στοχεύουν στο να βοηθήσουν περαιτέρω τους σπουδαστές, αλλά και να τους προκαλέσουν ερεθίσματα για περαιτέρω αναζήτηση και μελέτη.

Οφείλω να ευχαριστήσω τους συναδέλφους, μέλη ΔΕΠ, **Θ. Αλεξόπουλο, Ε. Γαζή**, **Ε. Δρη**, **Μ. Μακροπούλου**, **Α. Παπαγιάννη**, **Π. Πίσση, Κ. Ράπτη, Α. Σεραφετινίδη** και **Γ. Τσιπολίτη,** για τη συναίνεση τους να συμπεριλάβω μερικές ενδιαφέρουσες ασκήσεις που διέθεταν κατά καιρούς για τις ανάγκες του μαθήματος αυτού.

Στις σημειώσεις αυτές έχουν συμβάλει έμμεσα όλοι οι κατά καιρούς σπουδαστές μου μέσω της αμοιβαίας αλληλεπίδρασής μας στα πλαίσια του μαθήματος. Ειδικότερα, ευχαριστώ τον Διπλ. Αγρονόμο και Τοπογράφο Μηχανικό Ε.Μ.Π. **κ. Γ. Ανδριανόπουλο**, για την ένθερμη συμμετοχή του και πολύτιμη συνεισφορά του στην αρχική τεχνική επιμέλεια τους. Θα ήθελα ιδιαιτέρως να ευχαριστώ τους σπουδαστές μου της Σχολής Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών του Ε. Μ. Πολυτεχνείου, **Χ. Γκόνο, Δ. Ευθυμίου, Δ. Κουλό, Ν. Παπαχαραλάμπους, Ε. Σιώρα** και **Ε. Τριάντου** (ακαδ. έτους 2003-04) για την πρόθυμη συνεισφορά τους στην αρχική καταγραφή υλικού από παλιότερα θέματα εξετάσεων. Τέλος, ευχαριστώ θερμά τους σπουδαστές μου της Σχολής Μηχανικών Μεταλλείων-Μεταλλουργών Ε.Μ. Πολυτεχνείου, **Γ. Αγγέλου, Ε. Καραμπασάκη, Γ. Μπούρα, Γ.-Χ. Τασιό και Β. Φουντά** (ακαδ. έτους 2012-13) για την ένθερμη συνεισφορά τους στην ηλεκτρονική καταγραφή της επίλυσης των ασκήσεων που έχουν εμπλουτίσει την παρούσα έκδοση.

Σ. Μαλτέζος

Περιεχόμενα

1. Κινηματική

Θεωρητικά στοιχεία και μεθοδολογία

Η κινηματική πραγματεύεται τις κινήσεις ενός γεωμετρικού σημείου στο χώρο. Από πλευράς Γεωμετρίας, το σημείο δεν έχει διαστάσεις και ορίζεται ως ένα διατεταγμένο σύνολο πραγματικών αριθμών ή τριάδα αν πρόκειται για τον χώρο R^3. Η ανάλυση και τα συμπεράσματα μπορούν να εφαρμοστούν με πολύ καλή προσέγγιση και στις περιπτώσεις κίνησης ενός σωματιδίου με διαστάσεις είναι πολύ μικρότερες από τη μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του. Τα σωματίδια αυτά αναφέρονται και ως *σημειακές μάζες* ή *υλικά σημεία*. Η κίνηση περιγράφεται από τρία βασικά κινηματικά μεγέθη. Το θεμελιώδες διανυσματικό μέγεθος είναι το *διάνυσμα θέσης* $\vec{r}$ το οποίο αποτελεί και το πρότυπο συμπεριφοράς για όλα τα διανύσματα κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Τα άλλα δύο είναι, η *διανυσματική ταχύτητα* $\vec{\upsilon}$ και η *διανυσματική επιτάχυνση* $\vec{\alpha}$. Τα μεγέθη αυτά, εν γένει, είναι συναρτήσεις του χρόνου και ορίζονται με βάση το διάνυσμα θέσης ως $\vec{\upsilon}=\dot{\vec{r}}$ και $\vec{\alpha}=\dot{\vec{\upsilon}}=\ddot{\vec{r}}$ αντίστοιχα. Μια πολύ αποτελεσματική μέθοδος μελέτης της κίνησης κατά μήκος μιας καμπύλης στο χώρο είναι η μέθοδος που αναφέρεται στο *συνοδεύον τρίεδρο* ή *τρίεδρο Frenet* (βλ. Παράρτημα Β1 και [1,2,3]). Το τρίεδρο θεωρείται ότι κινείται μαζί με το εξεταζόμενο γεωμετρικό σημείο ή σωματίδιο και ορίζεται από τα τρία (μοναδιαία) *πρωτεύοντα διανύσματα* $\hat{i}_t$, $\hat{i}_n$ και $\hat{i}_b$ που αποτελούν ένα δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα. Η τροχιά εξαρτάται από δύο παραμέτρους που είναι η *καμπυλότητα* k και η *στρέψη* τ που καθορίζουν την *κάμψη* και *συστροφή* της τροχιάς αντίστοιχα. Ο ρυθμός μεταβολής των πρωτευόντων διανυσμάτων ως προς το διανυόμενο μήκος πάνω στην τροχιά, εξαρτάται από τις παραπάνω παραμέτρους και δίνεται από του περίφημους *τύπους Frenet-Serret*.

Με βάση αυτήν τη μέθοδο γίνεται η ανάλυση της επιτάχυνσης σε δύο συνιστώσες, την *επιτρόχιο* $\vec{\alpha}_t$ και την *κεντρομόλο* $\vec{\alpha}_n$. Το μέτρο της διανυσματικής ταχύτητας, συμβολιζόμενο με υ, καθώς και ο χρονικός ρυθμός μεταβολής του $\dot{\upsilon}$, υπεισέρχονται στις εκφράσεις των δύο συνιστωσών της επιτάχυνσης, ενώ ένα τρίτο μέγεθος που είναι η καμπυλότητα, επηρεάζει μόνον την κεντρομόλο επιτάχυνση. Δηλαδή: $\vec{\alpha}_t=\dot{\upsilon}\hat{i}_t$ και $\vec{\alpha}_n=k\upsilon^2\hat{i}_n$. Σε κάθε σημείο της τροχιάς του γεωμετρικού σημείου αντιστοιχεί ένα κέντρο καμπυλότητας που απέχει απόσταση ίση με $\rho=1/k$ και λέγεται ακτίνα καμπυλότητας. Το κέντρο καμπυλότητας, εν γένει, όχι μόνο δεν ταυτίζεται με την όποια αρχή του συστήματος αναφοράς, αλλά ακολουθεί και αυτό έναν γεωμετρικό τόπο – καμπύλη τροχιά όταν το εξεταζόμενο γεωμετρικό σημείο αλλάζει θέσεις. Πολύ χρήσιμες σχέσεις είναι αυτές που δίνουν τις δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης αν είναι γνωστές οι συναρτήσεις της διανυσματικής ταχύτητας και επιτάχυνσης.

Άσκηση 1.1

Δύο σωματίδια κινούνται στους άξονες x και y αντίστοιχα, με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1 = 2\hat{x}$ m/s και $\vec{\upsilon}_2 = 3\hat{y}$ m/s. Τη χρονική στιγμή t=0 τα σωματίδια βρίσκονται στις θέσεις: $x_{1,0}$=–3 m, $y_{1,0}$=0 και $x_{2,0}$=0, $y_{2,0}$=–3 m. α) Να υπολογίστε το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου 1 σχετικά με το σωματίδιο 2, δηλαδή τη διαφορά $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ως συνάρτηση του χρόνου. β) Σε ποια χρονική στιγμή η απόσταση μεταξύ των δύο σωματιδίων είναι η ελάχιστη δυνατή και ποια είναι η θέση των σωματιδίων εκείνη τη στιγμή;

α)

$$\vec{\upsilon}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \Rightarrow d\vec{r}_1 = \vec{\upsilon}_1 dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_{1,0}}^{\vec{r}} d\vec{r}_1' = \int_0^t \vec{\upsilon}_1 dt' \Rightarrow \vec{r}_1 - \vec{r}_{1,0} = \int_0^t 2\hat{x}dt' \Rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_{1,0} + 2\hat{x}\int_0^t dt' \Rightarrow$$

$$\vec{r}_1 = x_{1,0}\hat{x} + 2\hat{x}t = -3\hat{x} + 2\hat{x}t = (-3+2t)\hat{x} \quad (1)$$

με τις συνιστώσες σε m. Με όμοιο τρόπο:

$$\vec{\upsilon}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt} \Rightarrow d\vec{r}_2 = \vec{\upsilon}_2 dt \Rightarrow \int_{\vec{r}_{2,0}}^{\vec{r}_2} d\vec{r}_2' = \int_0^t \vec{\upsilon}_2 dt' \Rightarrow \vec{r}_2 - \vec{r}_{2,0} = \int_0^t 3\hat{y}dt' \Rightarrow \vec{r}_2 = \vec{r}_{2,0} + 3\hat{y}\int_0^t \hat{y}dt' \Rightarrow$$

$$\vec{r}_2 = y_{2,0}\hat{y} + 3\hat{y}t = -3\hat{y} + 3\hat{y}t = 3(t-1)\hat{y} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \boxed{\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (-3+2t)\hat{x} + 3(1-t)\hat{y}} \quad (3)$$

β)

Η απόσταση είναι:

$$s \equiv |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(-3+2\cdot t)^2 + (3-3\cdot t)^2} = \sqrt{13\cdot t^2 - 30\cdot t + 18} \quad (3)$$

Για να υπάρχει τοπικό ακρότατο (ελάχιστο) για το s, θα πρέπει για κατάλληλο χρόνο t_m να είναι, $\frac{ds}{dt} = 0$ και $\left.\frac{d^2s}{dt^2}\right|_{t_m} > 0$.

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\frac{26t-30}{(13t_m{}^2 - 30t_m + 18)^{1/2}} = 0 \Rightarrow 26t_m - 30 = 0 \Rightarrow t_m = \frac{30}{26}$$

Επίσης, υπολογίζουμε την $\left.\frac{d^2s}{dt^2}\right|_{t=t_m}$, που είναι ίση με 26, δηλαδή θετική και επομένως υπάρχει ελάχιστο s_m που υπολογίζεται εύκολα:

Στην (3) θέτουμε την παραπάνω τιμή του t_m και παίρνουμε:

$$\boxed{s_m = \sqrt{13t_m{}^2 - 30t_m + 18} = 0{,}832 \text{ m}}$$

Άσκηση 1.2

Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι αρχικές θέσεις $\vec{r}_{1,0}$ και $\vec{r}_{2,0}$ δύο κινητών στον τρισδιάστατο χώρο και οι σταθερές τους ταχύτητες $\vec{\upsilon}_1$ και $\vec{\upsilon}_2$, έτσι ώστε τα δύο κινητά να συναντηθούν κάποια χρονική στιγμή; Να υπολογιστεί και το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μέχρι τη συνάντησή τους.

Έστω, $\vec{r}_1' = \vec{r} - \vec{r}_{1,0}$ και $\vec{r}_2' = \vec{r} - \vec{r}_{2,0}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{r}_1}{dt} &= \vec{\upsilon}_1 = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_1 \equiv \vec{r}_1' = \vec{\upsilon}_1 t \\ \frac{d\vec{r}_2}{dt} &= \vec{\upsilon}_2 = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \vec{r} - \vec{r}_2 \equiv \vec{r}_2' = \vec{\upsilon}_2 t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{r}_1' - \vec{r}_2' = (\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)t$$

και $\vec{r}_1' - \vec{r}_2' = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2)t \quad (1)$

Η σχέση (1) αποτελεί τη συνθήκη για τη δυνατότητα συνάντησης των δύο κινητών. Αναλύουμε τις διανυσματικές διαφορές σε συνιστώσες και καταλήγουμε στην ακόλουθη συνθήκη:

$$(1) \Rightarrow \begin{aligned} &(x_1 - x_2)\hat{x} + (y_1 - y_2)\hat{y} + (z_1 - z_2)\hat{z} = \\ &= (\upsilon_{2,x} - \upsilon_{1,x})t\hat{x} + (\upsilon_{2,y} - \upsilon_{1,y})t\hat{y} + (\upsilon_{2,z} - \upsilon_{1,z})t\hat{z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= (\upsilon_{2,x} - \upsilon_{1,x})t \\ y_1 - y_2 &= (\upsilon_{2,x} - \upsilon_{1,y})t \\ z_1 - z_2 &= (\upsilon_{2,z} - \upsilon_{1,z})t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{t = \frac{x_1 - x_2}{\upsilon_{2,x} - \upsilon_{1,x}} = \frac{y_1 - y_2}{\upsilon_{2,y} - \upsilon_{1,y}} = \frac{z_1 - z_2}{\upsilon_{2,z} - \upsilon_{1,z}}}$$

Παρατηρούμε ότι τα τρία παραπάνω κλάσματα πρέπει να είναι ίσα με το ζητούμενο χρόνο (σταθερή αναλογία).

Ο χρόνος συνάντησης μπορεί να υπολογιστεί, επίσης, απευθείας από τη σχέση (1) λαμβάνοντας τα μέτρα των δύο μελών της εξίσωσης:

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2| t \Rightarrow \boxed{t = \frac{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{|\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_2|}}$$

Άσκηση 1.3

Το διάνυσμα θέσης ενός κινητού έχει την ακόλουθη εξάρτηση από το χρόνο: $\vec{r} = at\hat{x} - bt^3\hat{y}$ όπου a και b σταθερές. Να βρεθούν: α) η εξίσωση της τροχιάς, β) η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και η επιτάχυνση $\vec{a}$ καθώς και τα μέτρα τους και **γ)** η χρονική εξάρτηση της γωνίας φ μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\upsilon}$ και $\vec{a}$.

α)

$$\vec{r} = at\hat{x} - bt^3\hat{y} \Rightarrow x(t) = at \text{ και } y(t) = -bt^3$$

Για να βρούμε την εξίσωση της τροχιάς, απαλείφουμε το χρόνο t από τις παραπάνω εξισώσεις και παίρνουμε:

$$t = \frac{x}{a} y \text{ και επομένως, } y = -b\left(\frac{x}{a}\right)^3 t \Rightarrow \boxed{y = -\frac{b}{a^3}x^3}$$

β)

$\vec{\upsilon} = a\hat{x} - 3bt^2\hat{y}$, όπου το μέτρο $\upsilon = \sqrt{a^2 + 9b^2t^4}$. Επίσης,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -6bt\hat{y} \text{, και το μέτρο } \boxed{a = 6bt}$$

γ)

Η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων φ, υπολογίζεται ως εξής:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{a}}{\upsilon a} = \frac{18b^2t^3}{6bt\sqrt{a^2 + 9b^2t^4}} = \frac{3bt^2}{\sqrt{a^2 + 9b^2t^4}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi(t) = \mathrm{ar}\cos\left(\frac{3bt^2}{\sqrt{a^2 + 9b^2t^4}}\right)}$$

Άσκηση 1.4

Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x δίνεται από τη σχέση $\upsilon = k\sqrt{x}$, όπου k θετική σταθερά. Αν για $t=0$, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $x=0$, να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σωματιδίου ως συναρτήσεις του χρόνου και τη μέση ταχύτητα του σωματιδίου, στο διάστημα μέχρι να φθάσει σε απόσταση x από την αρχή.

Έχουμε: $\upsilon = k\sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = k\sqrt{x} \Rightarrow \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = kdt \Rightarrow \displaystyle\int_0^x \frac{dx'}{\sqrt{x'}} = k\int_0^t dt' \Rightarrow$

$$\left[2\sqrt{x'}\right]_0^x = kt \Rightarrow x = \frac{k^2}{4}t^2 \quad (1)$$

Από την (1) με παραγώγιση ως προς το χρόνο παίρνουμε:

$$\frac{dx}{dt} \equiv \upsilon = \frac{d\left(\dfrac{k^2}{4}t^2\right)}{dt} = \frac{k^2}{2}t \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{k^2}{2}t} \text{ και } \boxed{\alpha \equiv \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{k^2}{2}}$$

Η μέση ταχύτητα υπολογίζεται από τη σχέση του θεωρήματος της μέσης τιμής:

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{1}{x}\int_0^x \upsilon(x')dx' = \frac{k}{x}\int_0^x \sqrt{x'}dx' = \frac{k}{x}\frac{2}{3}\left[x'^{3/2}\right]_0^x = \frac{2}{3}k\sqrt{x}$$

Με βάση την (1) τελικά καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα: $\boxed{\langle \upsilon \rangle = \dfrac{k^2}{3}t}$

Άσκηση 1.5

Σημείο κινείται επί επιπέδου και ακολουθεί τις παρακάτω εξισώσεις κίνησης σε καρτεσιανές συντεταγμένες, $x=\gamma t$, $y=a+\beta t^2$, όπου α,β,γ σταθερές και t ο χρόνος.
α) Να βρεθούν οι συνιστώσες της ταχύτητας στους άξονες x, y και το μέτρο της ταχύτητας, ως συναρτήσεις του χρόνου.
β) Να βρεθούν οι συνιστώσες της επιτάχυνσης και τα αντίστοιχα μέτρα τους ως συναρτήσεις του χρόνου.
γ) Να βρεθεί η κεντρομόλος και η επιτρόχιος επιτάχυνση ως συναρτήσεις του χρόνου.

α)

$$\vec{\upsilon}\equiv\frac{d\vec{r}}{dt}\Rightarrow \upsilon_x=\frac{dx}{dt}=\gamma\ ,\ \upsilon_y=\frac{dy}{dt}=2\beta t\Rightarrow \boxed{\upsilon=\sqrt{\gamma^2+4\beta^2t^2}}$$

β)

$$\alpha\equiv\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\Rightarrow a_x=\frac{d\upsilon_x}{dt}=0\ ,\ a_y=\frac{d\upsilon_y}{dt}=2\beta\Rightarrow \boxed{\alpha=\sqrt{4\beta^2}=2\beta}$$

γ)

Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση:
$\vec{a}_t=a_t\hat{i}_t$ όπου $\hat{i}_t$ το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα (*εφαπτομένη*) και

$$a_t=\dot{\upsilon}=\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{\gamma^2+4\beta^2t^2}=\frac{4\beta^2t}{\sqrt{\gamma^2+4\beta^2t^2}}$$

ή μέσω της διανυσματικής έκφρασης (χωρίς τη χρήση παραγώγου):

$$a_t=\frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}}{\upsilon}=\frac{0+4\beta^2t}{\sqrt{\gamma^2+4\beta^2t^2}}=\frac{4\beta^2t}{\sqrt{\gamma^2+4\beta^2t^2}}$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι: $\vec{a}_n=a_n\hat{i}_n$, όπου $\hat{i}_n$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα (*πρωτοκάθετη*) και $a_n=\dfrac{\upsilon^2}{\rho}$. Το ρ είναι η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς, που υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\rho=\left|\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}\right|.\ \text{Αλλά}\ \ y=a+\beta\left(\frac{x}{\gamma}\right)^2=a+\frac{\beta}{\gamma^2}x^2\ \ (1)$$

Από την (1) $\Rightarrow y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\beta}{\gamma^2}x$ και $y''=\dfrac{2\beta}{\gamma^2}$,

$$\text{οπότε,}\ \rho=\left|\frac{(1+\frac{4\beta^2}{\gamma^4}x^2)^{3/2}}{2\beta/\gamma^2}\right|=\left|\frac{\gamma^2(1+\frac{4\beta^2}{\gamma^2}t)^{3/2}}{2\beta}\right|\ \text{και τελικά:}$$

$$\boxed{a_n=\frac{\upsilon^2}{\rho}=\frac{(\gamma^2+4\beta^2t^2)\left|2\beta\right|}{\left|\gamma^2\left(1+\frac{4\beta^2}{\gamma^2}t\right)^{3/2}\right|}}$$

Άσκηση 1.6

Σωματίδιο κινείται επιβραδυνόμενο σε κυκλική τροχιά ακτίνας R, έτσι ώστε, κάθε στιγμή η επικαμπύλιος και η κεντρομόλος επιτάχυνση να έχουν το ίδιο μέτρο. Για $t=0$ το μέτρο της ταχύτητάς του είναι υ_0. Να υπολογιστούν: α) Το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου και ως συνάρτηση του διαστήματος s, που διήνυσε. β) Το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης α, του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου και ως συνάρτηση του διαστήματος.

α)

$$\vec{\alpha}=\vec{\alpha}_t+\vec{\alpha}_n=-\dot{\upsilon}(-\hat{i}_t)+\frac{\upsilon^2}{R}\hat{i}_n \text{, με } \dot{\upsilon}\equiv\frac{d\upsilon}{dt}<0$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, θα πρέπει:

$$-\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{\upsilon^2}{R}\Rightarrow\frac{d\upsilon}{\upsilon^2}=-\frac{dt}{R}\Rightarrow\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon'}{d\upsilon'^2}=-\frac{1}{R}\int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow-\left[\frac{1}{\upsilon'}\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon}=-\frac{t}{R}\Rightarrow\frac{1}{\upsilon}-\frac{1}{\upsilon_0}=\frac{t}{R}\Rightarrow\frac{1}{\upsilon}=\frac{1}{\upsilon_0}+\frac{t}{R}\Rightarrow\frac{1}{\upsilon}=\frac{R+\upsilon_0 t}{\upsilon_o R}\Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon=\upsilon_0\frac{R}{R+\upsilon_0 t}}$$

$$\frac{d\upsilon}{dt}=\frac{d\upsilon}{ds}\frac{ds}{dt}=\frac{d\upsilon}{ds}\upsilon=-\frac{\upsilon^2}{R}\Rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon}{\upsilon}=-\frac{ds}{R}\Rightarrow\int_{u_0}^{u}\frac{d\upsilon'}{\upsilon'}=-\frac{1}{R}\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}ds\Rightarrow$$

$$-R\cdot\left[\ln\upsilon'\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon}=s\Rightarrow\upsilon=\upsilon_o e^{-\frac{s}{R}}$$

$$\upsilon\equiv\frac{ds}{dt}=\upsilon_o\cdot e^{-\frac{s}{R}}\Rightarrow\int_0^s e^{\frac{s'}{R}}ds=\upsilon_o\int_0^t dt'\Rightarrow\boxed{s=R\cdot\ln\frac{R+\upsilon_o t}{R}}$$

β)

Το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης α ως συνάρτηση του χρόνου υπολογίζεται με βάση την παραπάνω έκφραση του μέτρου της ταχύτητας:

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{2}a_n=\sqrt{2}\frac{\upsilon^2}{R}=\sqrt{2}\cdot\left[\upsilon_o\frac{R}{R+\upsilon_o t}\right]^2\frac{1}{R}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\frac{\upsilon_o^2 R}{(R+\upsilon_o t)^2}$$

Το μέτρο της επιτάχυνσης ως συνάρτηση του διαστήματος θα είναι:

$$\boxed{a=\sqrt{2}\frac{\upsilon^2}{R}=\frac{\upsilon_o^2\sqrt{2}}{R}e^{-\frac{2s}{R}}}$$

Άσκηση 1.7

Ένα σώμα μάζας m κινείται σε τροχιά με συνιστώσες θέσης $x=3\alpha\sin\omega t$, $y=4\alpha\sin\omega t$, $z=5\alpha\cos\omega t$, όπου t χρόνος και a, ω θετικές σταθερές. α) Να βρεθούν τα διανύσματα θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης ως συναρτήσεις του χρόνου. β) Να αποδείξετε ότι η τροχιά είναι επίπεδη.

Υπόδειξη: *Να δείξετε ότι τα διανύσματα των ταχυτήτων σε τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές t_1, t_2, t_3 είναι συνεπίπεδα.*

α)

Το διάνυσμα θέσης του σώματος θα είναι:

$$\vec{r}(t) = x{=}3\alpha\sin\omega t\cdot\hat{x} + 4\alpha\sin\omega t\cdot\hat{y} + 5\alpha\cos\omega t\cdot\hat{z}$$

Η στιγμιαία διανυσματική ταχύτητα προκύπτει:

$$\vec{\upsilon}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 3\alpha\omega\cos\omega t\cdot\hat{x} + 4\alpha\omega\cos\omega t\cdot\hat{y} - 5\alpha\omega\sin\omega t\cdot\hat{z}$$

Η δε στιγμιαία διανυσματική επιτάχυνση:

$$\vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} = -3\alpha\omega^2\sin\omega t\cdot\hat{x} - 4\alpha\omega^2\sin\omega t\cdot\hat{y} - 5\alpha\omega^2\cos\omega t\cdot\hat{z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\alpha}(t) = -\omega^2\vec{r}(t)}$$

β)

Η αναγκαία και ικανή συνθήκη συνεπιπεδότητας τριών διανυσμάτων είναι ο μηδενισμός του *τριπλού βαθμωτού γινομένου*, π.χ. $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=\vec{0}$. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η αναγκαία και ικανή συνθήκη για επίπεδη τροχιά είναι η συνεπιπεδότητα των διανυσματικών ταχυτήτων σε τρία τυχαία σημεία της τροχιάς, π.χ. στους χρόνους t_1 , t_2, t_3 να ισχύει: $\vec{\upsilon}(t_1)\cdot\vec{\upsilon}(t_2)\times\vec{\upsilon}(t_3)=0$. Η σχέση αυτή μπορεί να αποδειχθεί, όμως μια αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη είναι η συνεπιπεδότητα για τρία επιλεγμένα σημεία της τροχιάς στους χρόνους $t_1=0$, $t_2=\pi/\omega$ και $t_3=\pi/2\omega$.

Έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} &\vec{\upsilon}_1(0) = 3\alpha\omega\cdot\hat{x} + 4\alpha\omega\cdot\hat{y} \\ &\vec{\upsilon}_2\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = -3\alpha\omega\cdot\hat{x} - 4\alpha\omega\cdot\hat{y} \\ &\vec{\upsilon}_3\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) = -5\alpha\omega\cdot\hat{z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{\upsilon}(0)\cdot\vec{\upsilon}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)\times\vec{\upsilon}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right) =$$

$$= \vec{\upsilon}_1(0)\cdot\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ -3\alpha\omega & -4\alpha\omega & 0 \\ 0 & 0 & -5\alpha\omega \end{vmatrix} = 60\alpha^3\omega^3 - 60\alpha^3\omega^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\upsilon}(t_1)\cdot\vec{\upsilon}(t_2)\times\vec{\upsilon}(t_3) = 0}$$

Άσκηση 1.8

Σώμα κινείται σε οριζόντια ευθεία με επιτάχυνση που δίνεται από τη σχέση $\alpha = 6\sqrt[3]{x}$ m/s^2. Ξέρουμε ότι για t=2 s ισχύει υ_0=27 m/s και x_0=27 m. Να υπολογιστούν η ταχύτητα, η επιτάχυνση του σώματος και το διάστημα που διήνυσε συναρτήσει του χρόνου.

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 19/2/2002

Επειδή η επιτάχυνση είναι συνάρτηση του διαστήματος x, εκφράζουμε και την ταχύτητα συναρτήσει του x με βάση την παρακάτω ιδιότητα της αλυσιδωτής παραγώγισης συνάρτησης:

$$\alpha \equiv \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx} \cdot \upsilon$$

οπότε, με βάση τα δεδομένα της άσκησης σε ότι αφορά στην επιτάχυνση (στο σύστημα μονάδων S.I.):

$$\frac{d\upsilon}{dx} \cdot \upsilon = 6x^{1/3} \Rightarrow \upsilon d\upsilon = 6x^{1/3} dx \Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon' d\upsilon' = 6 \int_{x_0}^{x} x^{1/3} dx \Rightarrow \left[\frac{\upsilon'^2}{2}\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon} = 6\left[\frac{3}{4} x^{4/3}\right]_{x_0}^{x} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left(\upsilon^2 - \upsilon_0^2\right) = \frac{9}{2}\left(x^{4/3} - x_0^{4/3}\right) \Rightarrow \upsilon^2 = \upsilon_0^2 + 9\left(x^{4/3} - x_0^{4/3}\right) =$$

$$27^2 + 9\left(x^{4/3} - 27^{4/3}\right) = 3^6 + 9x^{4/3} - 3^2(3^3)^{4/3} = 3^6 - 3^6 + 9x^{4/3} = 9x^{4/3}$$

Επομένως $\boxed{\upsilon = 3x^{2/3}}$ m/s, διότι η αρνητική τιμή απορρίπτεται.

Το διάστημα βρίσκεται από τη σχέση,

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

$$3x^{2/3} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{dx}{x^{2/3}} = dt \Rightarrow \int_{x_o}^{x} x^{-2/3} dx = 3\int_{t_o}^{t} dt \Rightarrow$$

$$\left(x^{1/3} - x_o^{1/3}\right) = t - t_o \Rightarrow x^{1/3} = x_o^{1/3} + t - t_o = \left(3^3\right)^{1/3} + t - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^{1/3} = t + 1 \Rightarrow x = (t+1)^3 \text{ m}$$

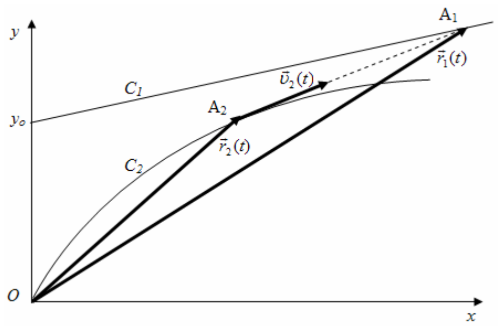
Η ταχύτητα υπολογίζεται από την (1) ως εξής:

$$\upsilon = \frac{d\left[(t+1)^3\right]}{dt} = 3(t+1)^2 \text{ m/s}$$

Η δε επιτάχυνση προκύπτει:

$$\alpha = 6x^{1/3} = 6\left[(t+1)^3\right]^{1/3} = 6(t+1) \Rightarrow \boxed{\alpha = 6(t+1) \text{ m/s}^2}$$

Άσκηση 1.9



Κατά τη διάρκεια ασκήσεων εικονικής αερομαχίας, δύο αεροσκάφη (A_1, A_2) κινούνται σε σταθερό ύψος, δηλαδή ακολουθούν τις επίπεδες τροχιές C_1, C_2 (σχήμα). Στο σύστημα αναφοράς με αρχή το O, τα διανύσματα θέσης τους ως συναρτήσεις του χρόνου είναι: $\vec{r}_1 = k_1 t\hat{x} + (\lambda t + y_0)\hat{y}$ και $\vec{r}_2 = k_2 t^2 \hat{x} + \lambda t\hat{y}$ αντίστοιχα, όπου k_1, k_2 *και* λ θετικές σταθερές με τις κατάλληλες μονάδες.

α) Να υπολογίσετε το χρόνο για τον οποίο το A_2 στοχεύει οπτικά το A_1 κατά την κατεύθυνση της κίνησής του (η ειδική αυτή θέση φαίνεται στο σχήμα).

Ποια είναι η μέγιστη δυνατή αρχική απόσταση (y_o) των A_1 και A_2 ώστε να είναι δυνατή μια τέτοια θέση;

β) Να δείξετε ότι, γενικά, η επιτρόχιος επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση: $\vec{a}_t = \dfrac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\upsilon})\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}$, όπου $\vec{\alpha}$ η επιτάχυνση και υ το μέτρο της ταχύτητας.

Βρείτε την $\vec{a}_t$ για το A_2 ως συνάρτηση του χρόνου.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 3/3/2003

α)

Έχουμε:

$$\vec{r}_1 = k_1 t\hat{x} + (\lambda t + y_0)\hat{y}$$

$$\vec{r}_2 = k_2 t^2 \hat{x} + \lambda t\hat{y}$$

Θα πρέπει το διάνυσμα $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ να είναι συγγραμμικό με το $\vec{\upsilon}_2$ ή

$$\boxed{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\times\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{0}}$$

Γενικά $\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$,

Όπου εδώ,

$$A_x = x_1 - x_2,\ A_y = y_1 - y_2,\ A_z = h - h = 0,$$

$$B_x = \dot{x}_2,\ B_y = \dot{y}_2,\ B_z = \dot{h} = 0$$

Επομένως:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\times\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ \dot{x}_2 & \dot{y}_2 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow [(x_1 - x_2)\dot{y}_2 - (y_1 - y_2)\dot{x}_2]\hat{z} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$(x_1 - x_2)\dot{y}_2 - (y_1 - y_2)\dot{x}_2 = 0 \quad (1)$$

Επειδή όμως,

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= k_1 t \\ x_2 &= k_2 t^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 - x_2 = k_1 t - k_2 t^2$$

και

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \lambda t + y_0 \\ y_2 &= \lambda t \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_1 - y_2 = y_0$$

καθώς επίσης,

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_2 &= 2k_2 t \\ \dot{y}_2 &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

οπότε προκύπτει η ζητούμενη συνθήκη:

$$(k_1 t - k_2 t^2)\lambda - y_0 2k_2 t = 0 \Rightarrow t = \frac{k_1\lambda - 2k_2 y_0}{k_2\lambda} > 0 \Rightarrow$$

$$k_1\lambda - 2k_2 y_0 > 0 \Rightarrow \boxed{y_0 < \frac{k_1\lambda}{2k_2}}$$

β)

Έχουμε:

$$\alpha_t = \dot{\upsilon}\hat{i} = \dot{\upsilon}\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} = \frac{\upsilon\dot{\upsilon}\vec{\upsilon}}{\upsilon^2} = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}(\upsilon\dot{\upsilon}) .$$

Αλλά

$$\upsilon\dot{\upsilon} = \frac{2\upsilon\dot{\upsilon}}{2} = \frac{1}{2}\frac{d(\vec{\upsilon}^2)}{dt} = \dot{\vec{\upsilon}}\cdot\vec{\upsilon} = \vec{a}\cdot\vec{\upsilon} .$$

Επομένως:

$$\alpha_t = \frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon^2}(\vec{a}\cdot\vec{\upsilon})$$

Αλλιώς, με χρήση της γωνίας των διανυσμάτων φ, ενεργούμε ως εξής:

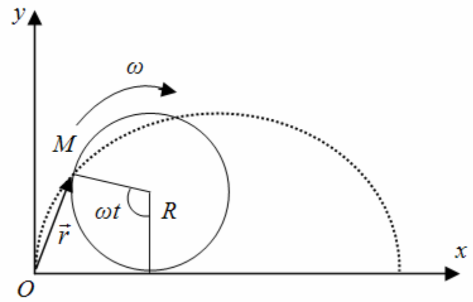
$$\alpha_t = \alpha\cos\varphi$$

$$\vec{\alpha}\cdot\vec{\upsilon} = (\alpha\cos\phi)\upsilon \Rightarrow \alpha_t = \frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\upsilon}}{\upsilon} \Rightarrow \vec{\alpha}_t = \alpha_t\hat{i}_t = \alpha_t\frac{\vec{\upsilon}}{\upsilon} = \frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\upsilon})}{\upsilon^2}\vec{\upsilon}$$

$$\alpha_t = \frac{[2k_2(2k_2 t) + 0]}{\sqrt{(2k_2 t)^2 + \lambda^2}} \Rightarrow \boxed{\alpha_t = \frac{4k_2^2 t}{\sqrt{(2k_2 t)^2 + \lambda^2}}}$$

Άσκηση 1.10

Η τροχιά (διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα) που διαγράφει ένα σημείο Μ(x,y) της περιφέρειας ενός τροχού ακτίνας R, κατά την κύλισή του σε οριζόντια επιφάνεια στην κατεύθυνση $\hat{x}$ με σταθερή γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω, περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις της κυκλοειδούς καμπύλης: $x=R(\omega t-\sin\omega t)$, $y=R(1-\cos\omega t)$, όπου t ο χρόνος.



α) Να βρείτε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ και την επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ του σημείου Μ, ως συναρτήσεις του χρόνου. Σχεδιάστε τα διανύσματα αυτά σε κάποια αυθαίρετη χρονική στιγμή t_α.

β) Να δείξετε ότι: Αν το Μ αποτελεί σημείο επαφής του τροχού, δηλαδή Μ$(2k\pi R,0)$ όπου k ακέραιος, τότε αυτό θα βρίσκεται σε στιγμιαία ηρεμία κατά τη διεύθυνση κίνησης.

γ) Βρείτε την επιτρόχιο $\vec{\alpha}_t$ και την κεντρομόλο $\vec{\alpha}_n$ επιτάχυνση του σημείου Μ(x,y) ως συναρτήσεις του χρόνου καθώς και την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του. Σε ποιους χρόνους τα μέτρα των συνιστωσών αυτών εξισώνονται;

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 4/10/2002

α)

Το διάνυσμα θέσης του τυχόντος σημείου Μ είναι: $\vec{r}(t)=x(t)\hat{x}+y(t)\hat{y}$

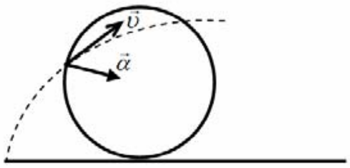
Και αντικαθιστώντας τις δεδομένες εκφράσεις των συνιστωσών παίρνουμε:

$$\vec{r}(t)=R(\omega t-\sin\omega t)\hat{x}+R(1-\cos\omega t)\hat{y} \quad (1)$$

Η ταχύτητα υπολογίζεται από τη σχέση ορισμού της, ως εξής:

$$\vec{\upsilon}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}\hat{x}+\frac{dy(t)}{dt}\hat{y}=R\omega(1-\cos\omega t)\hat{x}+R\omega\sin\omega t\hat{y}\Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\upsilon}(t)=R\omega\left[(1-\cos\omega t)\hat{x}+\sin\omega t\hat{y}\right]} \quad (2)$$



Η επιτάχυνση θα είναι αντίστοιχα:

$$\boxed{\vec{\alpha}(t)=\frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt}=\frac{d\upsilon_x(t)}{dt}\hat{x}+\frac{d\upsilon_y(t)}{dt}\hat{y}=R\omega^2(\sin\omega t\hat{x}+\cos\omega t\hat{y})} \quad (3)$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας είναι, όπως πάντοτε, εφαπτόμενο στην καμπύλη της τροχιάς ενώ αυτό της επιτάχυνσης θα κατευθύνεται προς το κέντρο του τροχού και θα έχει σταθερό μέτρο $R\omega^2$.

Με βάση την εξίσωση (3) η κατεύθυνσή του είναι μεταβαλλόμενη (περιστρεφόμενο διάνυσμα με γωνιακή ταχύτητα ω, τη δε χρονική στιγμή t_α θα σχηματίζει γωνία $\varphi = \pi/2 - \omega t_a$ με τον οριζόντια άξονα x.

β)

Τα σημεία Μ(2 $k\pi R$,0) αντιστοιχούν σε συντεταγμένες $x = 2k\pi R$ και $y = 0$. Η τελευταία συνεπάγεται, $\cos\omega t = 1 \Rightarrow \omega t = 2k\pi$, όπου $k = 0,1,2,\ldots$.

Αντικαθιστώντας στη σχέση (2), παίρνουμε:

$$\vec{\upsilon}(kT) = R\omega\left[(1-\cos 2k\pi)\hat{x} + \sin 2k\pi\,\hat{y}\right] = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon}(kT) = \vec{0}} \text{ και}$$

$$\vec{\alpha}(kT) = R\omega^2(\sin 2k\pi\,\hat{x} + \cos 2k\pi\,\hat{y}) = R\omega^2\hat{y} \Rightarrow \boxed{\alpha_x = 0, \alpha_y = R\omega^2}$$

Δηλαδή, έχουμε αποδείξει ότι το εκάστοτε σημείο επαφής του τροχού βρίσκεται σε *στιγμιαία ηρεμία* κατά την οριζόντια κατεύθυνση. Αυτό το γεγονός είναι η αιτία για την οποία, η αναπτυσσόμενη τριβή στο σημείο αυτό είναι *στατική τριβή*. Κατά την κατακόρυφο κατεύθυνση, αναπτύσσεται συνιστώσα επιτάχυνσης μόνο κατά τον άξονα y.

γ)

Για τον υπολογισμό της επιτρόχιας και κεντρομόλου επιτάχυνσης χρησιμοποιούμε τις γνωστές σχέσεις καμπυλόγραμμης κίνησης:

$$\vec{\alpha}_t = \dot{\upsilon}\hat{i}_t \qquad (4)$$

$$\vec{\alpha}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\hat{i}_n \qquad (5)$$ Αρχικά υπολογίζουμε το μέτρο της ταχύτητας:

$$\upsilon(t) = \sqrt{\left[R\omega(1-\cos\omega t)\right]^2 + \left(R\omega\sin\omega t\right)^2} \Rightarrow \upsilon(t) = \sqrt{2}R\omega\sqrt{1-\cos\omega t} \quad (5)$$

$$\dot{\upsilon} = \sqrt{2}R\omega\frac{1}{2}\frac{\omega\sin\omega t}{\sqrt{1-\cos\omega t}} = \frac{R\omega^2}{\sqrt{2}}\frac{\sin\omega t}{\sqrt{1-\cos\omega t}} \Rightarrow \boxed{\vec{\alpha}_t = \frac{R\omega^2}{\sqrt{2}}\frac{\sin\omega t}{\sqrt{1-\cos\omega t}}\hat{i}_t}$$

Επίσης, $\upsilon^2 = 2R^2\omega^2(1-\cos\omega t)$, οπότε, για τον υπολογισμό της κεντρομόλου επιτάχυνσης απομένει ο προσδιορισμός της ακτίνας καμπυλότητας ρ. Με βάση τα δεδομένα, προσφέρεται να χρησιμοποιήσουμε τη ακόλουθη σχέση:

$$\rho(t) = \left|\frac{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\right|$$. Υπολογίζουμε τα

$$\dot{x} \equiv \upsilon_x = R\omega(1-\cos\omega t) \Rightarrow \dot{x}^2 = R^2\omega^2(1-\cos\omega t)^2$$

$$\dot{y} \equiv \upsilon_y = R\omega\sin\omega t \Rightarrow \dot{y}^2 = R^2\omega^2\sin^2\omega t$$

$\ddot{x} \equiv \alpha_x = R\omega^2\sin\omega t$ και $\ddot{y} \equiv \alpha_y = R\omega^2\cos\omega t$, τελικά παίρνουμε:

$$\rho(t) = \left|\frac{\left[R^2\omega^2(1-\cos\omega t)^2 + R^2\omega^2\sin\omega t^2\right]^{3/2}}{R\omega(1-\cos\omega t)\cdot R\omega^2\cos\omega t - R\omega\sin\omega t\cdot R\omega^2\sin\omega t}\right| =$$

$$= \rho(t) = \frac{\left(R^2\omega^2\right)^{3/2}}{R^2\omega^3}\left|\frac{\left(1-2\cos\omega t+\cos^2\omega t+\sin^2\omega t\right)^{3/2}}{\cos\omega t-\cos^2\omega t-\sin^2\omega t}\right| =$$

$$= R\left|\frac{2^{3/2}(1-\cos\omega t)^{3.2}}{\cos\omega t-1}\right| \Rightarrow \boxed{\rho(t) = R\sqrt{8}\sqrt{1-\cos\omega t}}$$

Το αποτέλεσμα αυτό, σε συνδυασμό με τη σχέση (5), οδηγεί και σε μια ενδιαφέρουσα σχέση που συνδέει τα υ και ρ για κάθε t:

$$\boxed{\upsilon(t) = \frac{\rho(t)\omega}{2}} \text{ ή } \boxed{\rho(t) = 2\frac{\upsilon(t)}{\omega}}$$

Αν με $\upsilon_T = R\omega$ συμβολίσουμε το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας του τροχού (μεταφορική ταχύτητα), παίρνουμε την ακόλουθη σχέση:

$\boxed{\rho(t) = 2R\frac{\upsilon(t)}{\upsilon_T}}$. Παρατηρούμε ότι όταν το Μ βρίσκεται στο ανώτατο σημείο του τροχού (t=T/2), τότε $\upsilon = 2\upsilon_T$ και επομένως, $\boxed{\rho(T/2) = 4R}$ Δηλαδή η ακτίνα καμπυλότητας θα είναι τετραπλάσια της ακτίνας του τροχού ή ίση με το διπλάσιο της διαμέτρου του.

Τα μέτρα της επιτρόχιας και κεντρομόλου επιτάχυνσης εξισώνονται, όταν ισχύει η συνθήκη:

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_t} = \frac{R\omega^2/\sqrt{2}}{R\omega^2/\sqrt{2}}\frac{\sqrt{1-\cos\omega t}\cdot\sqrt{1-\cos\omega t}}{\sin\omega t} = \frac{1-\cos\omega t}{\sin\omega t} = 1 \Rightarrow$$

$1-\cos\omega t = \sin\omega t$. Έστω, $x = \cos\omega t$, οπότε έχουμε να λύσουμε την εξίσωση:

$$\left(1-x\right)^2 = 1-x^2 \Rightarrow 1-2x+x^2 = 1-x^2 \Rightarrow 2x^2-2x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0$$

με λύσεις, $x = 0$ ή $x = 1$. Η τιμή $x = 1$ απορρίπτεται διότι μηδενίζει τους όρους του κλάσματος, οπότε δεχόμαστε την $x = 0$, που σημαίνει:

$$x = \cos\omega t = 0 \Rightarrow \omega t = \frac{(2k+1)\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t = \frac{(2k+1)T}{4}\text{, όπου } k=0,1,2,\ldots}$$

Οι αντίστοιχες θέσεις της προβολής του Μ στον άξονα x θα είναι:

$$x_k = R\frac{(2k+1)\pi}{2} - R\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = R\frac{(2k+1)\pi}{2} - R = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2} - 1\right]R$$

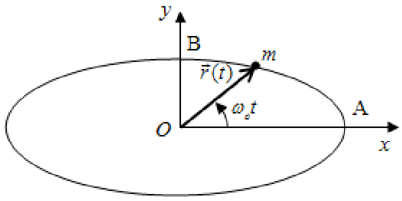
Για $k = 0$ παίρνουμε, $\boxed{x_0 = (\frac{\pi}{2} - 1)R \approx 1{,}571R}$

Τα δε επόμενα σημεία βρίσκονται από την ακόλουθη αναδρομική σχέση: $\boxed{x_k = x_0 + k\pi R}$

Δείτε το αντίστοιχο παράδειγμα προσομοίωσης στο Παράρτημα Γ1.

Άσκηση 1.11

Ένα σωματίδιο μάζας *m* ακολουθεί ελλειπτική τροχιά στο επίπεδο (*xOy*) με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} = a\cos\omega_o t\cdot\hat{x} + b\sin\omega_o t\cdot\hat{y}$, όπου *t* ο χρόνος, ω_o σταθερά και a, b ο μεγάλος και ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης, αντίστοιχα. α) Να βρείτε τα διανύσματα της ταχύτητας, επιτάχυνσης, επιτρόχιας και κεντρομόλου επιτάχυνσης, ως συναρτήσεις του χρόνου.Επίσης, να αποδείξετε τη σχέση $\upsilon = \omega_o\left(\frac{\rho A_\varepsilon}{\pi}\right)^{1/3}$ και να υπολογίσετε την ακτίνα καμπυλότητας ρ στα σημεία A και B συναρτήσει μόνο των a και b. β) Να αποδείξετε ότι η στροφορμή $\vec{L}$ του σωματιδίου, ως προς το *O*, διατηρείται και έχει μέτρο ανάλογο του εμβαδού A_ε της έλλειψης.



Δίνονται: *Επιτρόχιος επιτάχυνση:* $\vec{a}_t = \frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}}{\upsilon}\hat{i}_t$, *κεντρομόλος επιτάχυνση:* $\vec{a}_n = \frac{|\vec{\upsilon}\times\vec{\alpha}|}{\upsilon}\hat{i}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\hat{i}_n$, $A_\varepsilon = \pi ab$.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 24/6/2004

α)

Έχουμε:

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \alpha\omega_0(-\sin\omega_0 t)\hat{x} + b\omega_0\cos\omega_0 t)\hat{y} = \left(-\alpha\omega_0\sin\omega_0 t\right)\hat{x} + \left(b\omega_0\cos\omega_0 t\right)\hat{y}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \omega_0^2\left(-\alpha\cos\omega_0 t\hat{x} - b\sin\omega_0 t\hat{y}\right)$$ και το μέτρο:

$$\alpha = \left|\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\right| = \omega_0^2\sqrt{\alpha^2\cos^2\omega_0 t + b^2\sin^2\omega_0 t}$$

Για την εύρεση της επιτρόχιας επιτάχυνσης πρέπει αρχικά να υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο:

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha} = \omega_0^3\left(\alpha^2\sin\omega_0 t\cdot\cos\omega_0 t - b^2\sin\omega_0 t\cdot\cos\omega_0 t\right) =$$

$$= \omega_0^3(\alpha^2 - b^2)\sin\omega_0 t\cdot\cos\omega_0 t = \frac{\omega_0^3(\alpha^2 - b^2)}{2}\sin 2\omega_0 t$$, οπότε:

$$a_t = \frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}}{\upsilon} = \frac{\omega_0^3(\alpha^2 - b^2)}{2\upsilon}\sin 2\omega_0 t \quad (1)$$

Όμως το μέτρο της ταχύτητας είναι: $\upsilon = \omega_0\sqrt{\alpha^2\sin^2\omega_0 t + b^2\cos^2\omega_0 t}$ και με βάση την (1) παίρνουμε:

$$a_t = \frac{\omega_0^3(\alpha^2 - b^2)\sin 2\omega_0 t}{2\omega_0\sqrt{\alpha^2\sin^2\omega_0 t + b^2\cos^2\omega_0 t}} = \frac{\omega_0^2(\alpha^2 - b^2)\sin 2\omega_0 t}{2\sqrt{\alpha^2\sin^2\omega_0 t + b^2\cos^2\omega_0 t}} \quad (2)$$

Για την κεντρομόλο επιτάχυνση υπολογίζουμε αρχικά το εξωτερικό γινόμενο:

$$\vec{\upsilon}\times\vec{\alpha} = \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \upsilon_x & \upsilon_y & 0\\ \alpha_x & \alpha_y & 0\end{vmatrix} = \left(\upsilon_x\alpha_y - \upsilon_y\alpha_x\right)\hat{z} =$$

$$= \left(\alpha b\omega_0^3\sin^2\omega_0 t + ab\omega_0^3\cos^2\omega_0 t\right) = \alpha b\omega_0^3\hat{z} \Rightarrow$$

$\left|\vec{\upsilon}\times\vec{\alpha}\right| = \alpha b\omega_0^3$. Επομένως,

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{\left|\vec{\upsilon}\times\vec{\alpha}\right|}{\upsilon} = \frac{\alpha b\omega_0^3}{\upsilon} = \frac{\alpha b\omega_0^2}{\sqrt{\alpha^2\sin^2\omega_0 t + b^2\cos^2\omega_0 t}}$$

Από την παραπάνω προκύπτει και η ζητούμενη σχέση:

$$\frac{\upsilon^2}{\rho} = \frac{\alpha b\omega_0^3}{\upsilon} \Rightarrow \frac{\upsilon}{\omega_0} = \left(\rho\frac{A_{\varepsilon\lambda}}{\pi}\right)^{1/3}$$

Στο σημείο Α είναι: $\omega_0 t = 0 \Rightarrow \upsilon = \omega_0 b \Rightarrow \rho_A = \dfrac{b^3\omega_0^3}{\alpha b\omega_0^3} = \dfrac{b^2}{\alpha}$

Στο σημείο Β είναι: $\omega_0 t = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \upsilon = \omega_0\alpha \Rightarrow \rho_A = \dfrac{\alpha^3\omega_0^3}{\alpha b\omega_0^3} = \dfrac{\alpha^2}{b}$

β)

Η στροφορμή υπολογίζεται από τη γενική σχέση ορισμού της:

$$\vec{L} = \vec{r}\times m\vec{\upsilon} = m(\vec{r}\times\vec{\upsilon}) \quad (3)$$

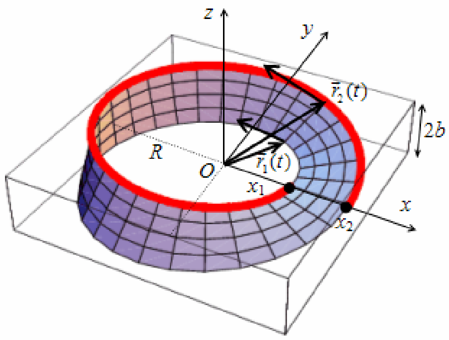
αλλά $\vec{r}\times\vec{\upsilon} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & 0 \\ \upsilon_x & \upsilon_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \alpha\cos\omega_0 t & b\sin\omega_0 t & 0 \\ -\alpha\omega_0\sin\omega_0 t & b\omega_0\cos\omega_0 t & 0 \end{vmatrix} =$

$$= \left(\alpha b\omega_0\cos^2\omega_0 t + ab\omega_0\sin^2\omega_0 t\right)\hat{z} = \alpha b\hat{z} \Rightarrow$$

$\vec{L} = \dfrac{m}{\pi}A_{\varepsilon\lambda}\hat{z}$ =σταθ. και $L = \dfrac{m}{\pi}A_{\varepsilon\lambda} \propto A_{\varepsilon\lambda}$

Δείτε το αντίστοιχο παράδειγμα προσομοίωσης στο Παράρτημα Γ1.

Άσκηση 1.12



Ένας σχηματισμός δύο αεροσκαφών A_1 και A_2, διαγράφει κοινή κλειστή τροχιά στο χώρο με παραμετρικές εξισώσεις,

$x(t) = \left(R - b\cos\dfrac{\omega t}{2}\right)\cos\omega t$, $y(t) = \left(R - b\cos\dfrac{\omega t}{2}\right)\sin\omega t$ και

$z(t) = -b\sin\dfrac{\omega t}{2}$ (παχιά γραμμή στο σχήμα και η συνέχειά της),

όπου t ο χρόνος, και ω, R, b δεδομένες θετικές σταθερές. Στο χρόνο $t=0$ βρίσκονται στις θέσεις x_1 και x_2 αντίστοιχα, δηλαδή τα χωρίζει απόσταση χρονικής διαφοράς $\Delta t = 2\pi / \omega$, οπότε πρέπει να τεθεί $t \to t - \Delta t$ για να προκύψει η θέση του A_2 για κάθε t. α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση μεταξύ τους A_1A_2 παραμένει σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου)[1]. β) Να αποδείξετε ότι, για να είναι οι ταχύτητες των A_1 και A_2 στο χρόνο $t=0$, κάθετες μεταξύ τους, θα πρέπει $2R/b = \varphi + \varphi^{-1} = 2,236...$, όπου $\varphi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2 = 1,618...$, ο λόγος της *χρυσής τομής*. γ) Να βρείτε το μέγιστο ποσοστό φαινομενικής μεταβολής του βάρους των χειριστών κατά τη διάρκεια της πτήσης και τους χρόνους που αυτή διαπιστώνεται.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 20/9/2004

α)

Αρχικά θα προσδιορίσουμε την εξίσωση της τροχιάς, τόσο του A_1 όσο και του A_2 σε παραμετρική μορφή.

$$\text{Τροχιά του } A_1\text{:} \begin{cases} x(t) = \left(R - b\cos\dfrac{\omega t}{2}\right)\cos\omega t \\ y(t) = \left(R - b\cos\dfrac{\omega t}{2}\right)\sin\omega t \\ z(t) = -b\sin\dfrac{\omega t}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Επειδή το A_2 υστερεί κατά Δt θα πρέπει να θέσουμε όπου

$t \to t - \Delta t = t - \dfrac{2\pi}{\omega}$, οπότε, $\cos\dfrac{\omega(t-\Delta t)}{2} = \cos\left(\dfrac{\omega t}{2} - \pi\right) = -\cos\dfrac{\omega t}{2}$

και $\cos\omega(t-\Delta t) = \cos\left(\omega t - 2\pi\right) = \cos\omega t$

Επίσης, $\sin\dfrac{\omega(t-\Delta t)}{2} = \sin\left(\dfrac{\omega t}{2} - \pi\right) = -\sin\dfrac{\omega t}{2}$ και

$\sin\omega(t-\Delta t) = \sin\left(\omega t - 2\pi\right) = \sin\omega t$

Συνεπώς οι παραμετρικές εξισώσεις της τροχιάς του A_2 θα είναι:

[1] Το ευθύγραμμο τμήμα A_1A_2 «σαρώνει» μια μονόπλευρη επιφάνεια, γνωστή ως λωρίδα του Möbius (1858).

$$\text{Τροχιά του } \mathrm{A}_2\text{:}\quad \begin{cases} x(t) = \left(R + b\cos\dfrac{\omega t}{2}\right)\cos\omega t \\ y(t) = \left(R + b\cos\dfrac{\omega t}{2}\right)\sin\omega t \quad (2) \\ z(t) = b\sin\dfrac{\omega t}{2} \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι το A_1 κινείται στην εσωτερική πλευρά, ενώ το A_2 στην εξωτερική, αλλά λόγω της δεδομένης χρονικής διαφοράς βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο.

Θα αποδείξουμε ότι η απόστασή τους είναι σταθερή. Αυτή υπολογίζεται από το μέτρο της διαφοράς των διανυσμάτων θέσης τους:

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \left|\vec{r}_1(t) - \vec{r}_2(t)\right| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (3)$$

Υπολογίζουμε τις διαφορές των παραπάνω συνιστωσών:

$$x_1 - x_2 = \left(R - b\cos\frac{\omega t}{2}\right)\cos\omega t - \left(R + b\cos\frac{\omega t}{2}\right)\cos\omega t = -2b\cos\frac{\omega t}{2}\cos\omega t$$

$$y_1 - y_2 = \left(R - b\cos\frac{\omega t}{2}\right)\sin\omega t - \left(R + b\cos\frac{\omega t}{2}\right)\sin\omega t = -2b\cos\frac{\omega t}{2}\sin\omega t$$

$$z_1 - z_2 = -b\sin\frac{\omega t}{2} - b\sin\frac{\omega t}{2} = -2b\sin\frac{\omega t}{2}$$

και επομένως, υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνουμε:

$$\left(x_1 - x_2\right)^2 = 4b^2\cos^2\frac{\omega t}{2}\cos^2\omega t$$

$$\left(y_1 - y_2\right)^2 = 4b^2\cos^2\frac{\omega t}{2}\sin^2\omega t$$

$$\left(z_1 - z_2\right)^2 = 4b^2\sin^2\frac{\omega t}{2}$$

Αντικαθιστώντας στην (3) καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = \sqrt{4b^2\cos^2\frac{\omega t}{2}\cos^2\omega t + 4b^2\cos^2\frac{\omega t}{2}\sin^2\omega t + 4b^2\sin^2\frac{\omega t}{2}} \Rightarrow$$

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = 2b\sqrt{\cos^2\frac{\omega t}{2}\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right) + \sin^2\frac{\omega t}{2}} \Rightarrow \boxed{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2 = 2b = \text{σταθ.}}$$

Όπως βλέπουμε η απόσταση αυτή είναι ίση με πλάτος της ταινίας.

β)

Θα βρούμε τα διανύσματα των ταχυτήτων των δύο αεροσκαφών και θα διατυπώσουμε τη συνθήκη καθετότητας που είναι η $\vec{\upsilon}_1 \cdot \vec{\upsilon}_2 = 0$ (4).
Υπολογίζουμε αναλυτικά την κάθε μια συνιστώσα:

$$\left.\begin{aligned}
\upsilon_{x,1} &= \dot{x}_1 = \frac{b\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\cos\omega t - \omega\left(R - b\cos\frac{\omega t}{2}\right)\sin\omega t \\
\upsilon_{y,1} &= \dot{y}_1 = \frac{b\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\sin\omega t + \omega\left(R - b\cos\frac{\omega t}{2}\right)\cos\omega t \\
\upsilon_{z,1} &= \dot{y}_1 = -\frac{b\omega}{2}\cos\frac{\omega t}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{aligned}
\upsilon_{x,2} &= \dot{x}_1 = -\frac{b\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\cos\omega t - \omega\left(R + b\cos\frac{\omega t}{2}\right)\sin\omega t \\
\upsilon_{y,2} &= \dot{y}_1 = -\frac{b\omega}{2}\sin\frac{\omega t}{2}\sin\omega t + \omega\left(R + b\cos\frac{\omega t}{2}\right)\cos\omega t \\
\upsilon_{z,2} &= \dot{y}_1 = \frac{b\omega}{2}\cos\frac{\omega t}{2}
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Για $t = 0$ έχουμε, $\cos 0 = \cos\frac{0}{2} = 1$ και $\sin 0 = \sin\frac{0}{2} = 0$, οπότε οι σχέσεις (5) και (6) απλουστεύονται και τα προκύπτοντα διανύσματα ταχυτήτων είναι:

$$\vec{\upsilon}_1 = 0\hat{x} + \omega(R-b)\hat{y} + -\frac{b\omega}{2}\hat{z} \text{ και } \vec{\upsilon}_2 = 0\hat{x} + \omega(R+b)\hat{y} + \frac{b\omega}{2}\hat{z}$$

Η συνθήκη (4) τελικά οδηγεί στην παρακάτω εξίσωση:

$$\vec{\upsilon}_1 \cdot \vec{\upsilon}_2 = 0 + \omega^2(R-b)(R+b) - \frac{b^2\omega^2}{4} = 0 \Rightarrow 4R^2 - 4b^2 = b^2 \Rightarrow$$

$\frac{2R}{b} = \sqrt{5}$. Όμως, είναι γνωστό ότι ο λόγος της *χρυσής τομής* είναι $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ και επομένως η συνθήκη γράφεται ως εξής:

$$\frac{2R}{b} = 2\varphi - 1 = \varphi + (\varphi - 1) = \varphi + \frac{1}{\varphi} \Rightarrow \boxed{\frac{2R}{b} = \varphi + \frac{1}{\varphi} = 2,236...}$$

γ)

Η συνιστώσα επιτάχυνσης α_z του κάθε αεροσκάφους το καθιστά *μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς* κατά την κατακόρυφο για το χειριστή του που βρίσκεται σε ηρεμία μέσα σε αυτό. Επομένως, αναπτύσσεται *αδρανειακή δύναμη*, η οποία για το A_1 υπολογίζεται ως εξής:

$$\alpha_{z,1} = \frac{d\upsilon_{z,1}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{b\omega}{2}\cos\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{b\omega^2}{4}\sin\frac{\omega t}{2} \Rightarrow \alpha_{z,1,\max} = \alpha_{z,2,\max} = \frac{b\omega^2}{4}$$ Οπότε,

$\Delta w = F_{z.\max} = -ma_{z,\max} = -m\frac{b\omega^2}{4}$. Για

$$\frac{\omega t}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \omega t = (4k-1)\pi \Rightarrow t = \frac{(4k-1)\pi}{\omega}$$

Άσκηση 1.13

Ένα μικρό σώμα μάζας m ακολουθεί καμπυλόγραμμη τροχιά στο χώρο, έτσι ώστε, το μέτρο της ταχύτητάς του να είναι $\upsilon = \upsilon_0 - ks$ και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του $\rho = \upsilon / \lambda$, όπου υ_0 το μέτρο της ταχύτητας στο χρόνο $t = 0$, s το διανυόμενο διάστημα πάνω στην τροχιά και k, λ δεδομένες θετικές σταθερές.

α) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας ως συνάρτηση του χρόνου.

β) Να δώσετε την πλήρη διανυσματική έκφραση της συνισταμένης επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση του χρόνου. Σχολιάστε τα προκύπτοντα χαρακτηριστικά της (μέτρο, κατεύθυνση).

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 4/2/2005

α)

Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης πρέπει να είναι θετική ποσότητα, επομένως λόγω της επιβράδυνσης είναι: $\alpha_t = -\dfrac{d\upsilon}{dt} = -\dfrac{d\upsilon}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt} = -\dfrac{d\upsilon}{ds}\cdot\upsilon$ (1)

Αντικαθιστούμε την έκφραση που δίνεται για την ταχύτητα:

$$\alpha_t = -\frac{d(\upsilon_0 - ks)}{ds}\cdot\upsilon = k\upsilon \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -k\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -kdt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon'}{\upsilon'} = -k\int_0^t dt' \Rightarrow$$

$$\left[\ln\upsilon'\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -kt \Rightarrow \ln\upsilon - \ln\upsilon_0 = -kt \Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_0 e^{-kt}} \quad (3)$$

β)

Η κεντρομόλος επιτάχυνση υπολογίζεται ως εξής:

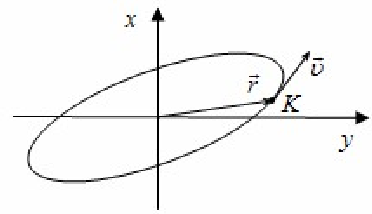
$\alpha_n = \dfrac{\upsilon^2}{\rho} = \dfrac{\lambda\upsilon^2}{\upsilon} = \lambda\upsilon$, οπότε η συνισταμένη επιτάχυνση θα είναι:

$$\alpha = \sqrt{\alpha_t^2 + \alpha_n^2} = \sqrt{k^2\upsilon_0^2 e^{-2kt} + \lambda^2\upsilon_0^2 e^{-2kt}} = \upsilon_0 e^{-kt}\sqrt{k^2+\lambda^2} = \upsilon\sqrt{k^2+\lambda^2}$$

και τελικά, $\vec{\alpha} = \vec{a}_t + \vec{\alpha}_n = \upsilon\left(-k\hat{i}_t + \lambda\hat{i}_n\right)$ ή $\boxed{\vec{\alpha} = \upsilon_0 e^{-kt}\left(-k\hat{i}_t + \lambda\hat{i}_n\right)}$

Με μέτρο $\boxed{\alpha = \upsilon\sqrt{k^2+\lambda^2}}$ Παρατηρούμε ότι οι δύο συνιστώσες της επιτάχυνσης σχηματίζουν σταθερή γωνία φ διότι: $\tan\varphi = \dfrac{\alpha_n}{\alpha_t} = \dfrac{\lambda}{k} =$ σταθ.

Άσκηση 1.14



Η φωτεινή κηλίδα K στην οθόνη παλμογράφου ακολουθεί ελλειπτική τροχιά (δείτε σχήμα) που περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις: $x(t) = A\cos(\omega t - \delta/2)$ και $y(t) = B\sin(\omega t + \delta/2)$, όπου A, B, ω και δ θετικές σταθερές, με $B/A = k \neq 1$. α) Να βρείτε το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{\upsilon}(t)$ και της επιτάχυνσής $\vec{\alpha}(t)$ της φωτεινής κηλίδας. Διατυπώστε μια σχέση υπολογισμού της ακτίνας καμπυλότητας $\rho(t)$ μέσω των $\vec{\upsilon}(t)$ και $\vec{\alpha}(t)$ χωρίς να κάνετε τις πράξεις. β) Να βρείτε τους χρόνους στους οποίους η απόσταση της κηλίδας από την αρχή του συστήματος αναφοράς $(x, y) = (0,0)$, παρουσιάζει ακρότατα (μέγιστο ή ελάχιστο).

Υπόδειξη: *Στο (β) συστήνεται να βασιστείτε σε κριτήριο που σχετίζεται με τη γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{r}$ και $\vec{\upsilon}$ στις θέσεις αυτές. Δίνονται οι τριγωνομετρικές ταυτότητες:*

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$, $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos a\sin\beta$.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 9/9/2005

α)

Έχουμε:

$$\upsilon_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\left[A\cos\left(\omega t - \delta/2\right)\right]}{dt} = -A\omega\sin\left(\omega t - \delta/2\right) \quad (1)$$

$$\upsilon_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{d\left[B\sin\left(\omega t + \delta/2\right)\right]}{dt} = B\omega\cos\left(\omega t + \delta/2\right) \quad (2)$$

Επομένως, η ταχύτητα ως διάνυσμα θα είναι: $\vec{\upsilon} = \upsilon_x(t)\hat{x} + \upsilon_y(t)\hat{y} =$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon} = \omega\left[-A\sin\left(\omega t - \delta/2\right)\hat{x} + B\cos\left(\omega t + \delta/2\right)\hat{y}\right]}$$

Η επιτάχυνση υπολογίζεται μέσω της παραγώγου της διανυσματικής ταχύτητας:

$$\alpha_x(t) = \frac{d\upsilon_x(t)}{dt} = \frac{d\left[-A\omega\sin\left(\omega t - \delta/2\right)\right]}{dt} = -A\omega^2\cos\left(\omega t - \delta/2\right)$$

$$\alpha_y(t) = \frac{d\upsilon_y(t)}{dt} = \frac{d\left[B\omega\cos\left(\omega t + \delta/2\right)\right]}{dt} = -B\omega^2\sin\left(\omega t + \delta/2\right)$$

$$\boxed{\vec{\alpha}(t) = -\omega^2\left[A^2\cos\left(\omega t - \delta/2\right)\hat{x} + B^2\sin\left(\omega t + \delta/2\right)\hat{y}\right]}$$

β)

Οι χρόνοι για τους οποίους έχουμε ακρότατα της απόστασης $r \equiv |\vec{r}|$ μπορούν να βρεθούν από τη συνθήκη σύμφωνα με την οποία στις θέσεις αυτές τα διανύσματα θέσης και ταχύτητας είναι κάθετα μεταξύ τους, δηλαδή: $\vec{r} \perp \vec{\upsilon} \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{\upsilon} = 0$ (βλ. Παράρτημα Δ1). Η συνθήκη αυτή, σύμφωνα με τις (1) και (2) δίνει:

$$A\cos\left(\omega t-\delta/2\right)\left[-A\omega\sin\left(\omega t-\delta/2\right)\right]+$$

$$+B\sin\left(\omega t+\delta/2\right)B\omega\cos\left(\omega t+\delta/2\right)=0\overbrace{\Rightarrow}^{k\equiv B/A}$$

$$-\cos\left(\omega t-\delta/2\right)\sin\left(\omega t-\delta/2\right)+$$

$$+k^2\sin\left(\omega t+\delta/2\right)\cos\left(\omega t+\delta/2\right)=0\Rightarrow$$

$-\sin\left(2\omega t-\delta\right)+k^2\sin\left(2\omega t+\delta\right)=0$ και σύμφωνα με την τριγωνομετρική ταυτότητα που δίνει το $\sin(\alpha\pm\beta)$, έχουμε:

$$-\sin 2\omega t\cos\delta+\cos 2\omega t\sin\delta+$$

$+k^2\left(\sin 2\omega t\cos\delta+\cos 2\omega t\sin\delta\right)=0$, και διαιρώντας με το $\cos 2\omega t$, παίρνουμε:

$$-\tan 2\omega t\cos\delta+\sin\delta+k^2\left(\tan 2\omega t\cos\delta+\sin\delta\right)=0\Rightarrow$$

$$\left(k^2-1\right)\tan 2\omega t+\sin\delta+\left(k^2+1\right)\tan\delta=0\overbrace{\Rightarrow}^{k\neq 1}\boxed{\tan 2\omega t=\frac{1+k^2}{1-k^2}}$$ και

$$\boxed{t_\alpha=\frac{1}{2\omega}\arctan\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\tan\delta\right)}$$

Αν αυτή η τιμή αντιστοιχεί σε μέγιστο, τότε το ελάχιστο θα εμφανίζεται σε χρόνο:

$$\boxed{t'_\alpha=\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\tan\delta+\frac{\pi}{2}\right)}$$

Το αν οι παραπάνω χρόνοι είναι χρόνοι μεγίστου ή ελαχίστου, καθορίζεται από τη διαφορά φάσης δ. Συγκεκριμένα, αν $r(t_\alpha)\geq r(t'_\alpha)\Rightarrow$ $t_\alpha\to\max$ και $t'_\alpha\to\min$ και αντιστρόφως.

Άσκηση 1.15

Ένα σωματίδιο μάζας m βάλλεται κατά μήκος οριζόντιας επιφάνειας με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0. Το σωματίδιο υπόκειται σε ολική αντίσταση μέτρου $F = km x\upsilon$, όπου υ, x είναι το μέτρο της ταχύτητας και της θέσης του, αντίστοιχα, σε τυχούσα χρονική στιγμή και k θετική σταθερά.

α) Να υπολογίσετε την απόσταση, s, που διανύει το σωματίδιο μέχρι να βρεθεί σε ηρεμία ως συνάρτηση των γνωστών μεγεθών. β) Να επαναλάβετε το ερώτημα (α) στην περίπτωση που το μέτρο της δύναμης αντίστασης είναι $F = kmx\upsilon^2$.

α)

Εφαρμόζουμε το 2$^{\text{ο}}$ Νόμο του Νεύτωνα και έχουμε:

$$F = ma \Rightarrow ma = -kmx\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -kx\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon = -kx\upsilon \overset{\upsilon\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d\upsilon}{dx} = -kx = \Rightarrow d\upsilon = -kxdx \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{0} d\upsilon = -k\int_0^s xdx = \Rightarrow [\upsilon]_{\upsilon_0}^{0} = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^s \Rightarrow$$

$$0 - \upsilon_0 = -k\left(\frac{s^2}{2} - 0\right) \Rightarrow s = \sqrt{\frac{2\upsilon_0}{k}}$$

β)

Εφαρμόζουμε την ίδια μεθοδολογία:

$$F = ma \Rightarrow ma = -kmx\upsilon^2 \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -kx\upsilon\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon = -kx\upsilon^2 \overset{\upsilon\neq 0}{\Rightarrow}$$

$$\frac{d\upsilon}{dx} = -kx\upsilon \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -kxdx \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_f} \frac{d\upsilon}{\upsilon} = -k\int_0^s xdx \Rightarrow [\ln\upsilon]_{\upsilon_0}^{\upsilon_f} = -k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^s \Rightarrow$$

$$\ln\upsilon_f - \ln\upsilon_0 = -k\frac{s^2}{2} \Rightarrow \ln\frac{\upsilon_f}{\upsilon_0} = -k\frac{s^2}{2} \Rightarrow \frac{\upsilon_f}{\upsilon_0} = e^{-ks^2/2} \Rightarrow \upsilon_f = \upsilon_0 e^{-ks^2/2}$$

όπου υ_f η τελική ταχύτητα. Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{s\to\infty}\upsilon_f = 0$, οπότε για να βρεθεί το σωματίδιο σε ηρεμία θα πρέπει να διανύσει άπειρο διάστημα. Αυτό είναι αποτέλεσμα της φθίνουσας εκθετικής συνάρτησης της ταχύτητας συναρτήσει του διαστήματος.

Άσκηση 1.16

Η ταχύτητα ενός σωματιδίου που κινείται κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x δίνεται από τη σχέση, $\upsilon = k(x + x_0)$, όπου k και x_0 θετικές σταθερές. Αν για $t = 0$, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση $x = 0$, να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σωματιδίου ως συναρτήσεις του χρόνου και τη μέση ταχύτητα του σωματιδίου στο διάστημα μέχρι να φθάσει σε απόσταση x από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

<u>*Δίνεται:*</u> Η σχέση της μέσης τιμής, $\langle \upsilon \rangle = \frac{1}{x}\int_0^x \upsilon(x')dx'$.

Με βάση την έκφραση της ταχύτητας συναρτήσει του διαστήματος έχουμε:

$$\frac{dx}{dt} = k(x + x_0) \Rightarrow \frac{dx}{x + x_0} = kdt \Rightarrow \int_0^x \frac{dx'}{x' + x_0} = kt \Rightarrow \int_{x_0}^{x+x_0} \frac{d\left(x' + x_0\right)}{x' + x_0} = kt \Rightarrow$$

$$\ln(x + x_o) - \ln x_o = kt \Rightarrow \ln\frac{x + x_o}{x_o} = kt \Rightarrow x + x_o = x_o e^{kt} \Rightarrow x = x_o\left(e^{kt} - 1\right) \ (1)$$

Παραγωγίζοντας την (1): $\upsilon = \frac{dx}{dt} = kx_0 e^{kt}$ και επίσης με νέα παραγώγιση: $\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = k^2 x_0 e^{kt}$

Η μέση ταχύτητα από $x = 0$ μέχρι την απόσταση x είναι :

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{1}{x}\int_0^x \upsilon(x')dx' = \frac{1}{x}\int_0^x k(x' + x_0)dx' = \frac{1}{x}k\left[\frac{x'^2}{2}\right]_0^x + \frac{1}{x}kx_0\left[x'\right]_0^x = \frac{kx}{2} + kx_0 = k\left(\frac{x}{2} + x_0\right)$$

Η μέση τιμή της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου προκύπτει μέσω του αποτελέσματος της εξ. (1) με απλή αντικατάσταση:

$$\langle \upsilon \rangle = k\left(\frac{x}{2} + x_0\right) = k\frac{x_0(e^{kt} - 1)}{2} + x_0 = kx_0\frac{e^{kt} - 1}{2} + 1 = \frac{kx_0}{2}\left(e^{kt} + 1\right)$$

και επομένως,

$$\boxed{\langle \upsilon \rangle = \frac{kx_0}{2}\left(e^{kt} + 1\right)}$$

Άσκηση 1.17

Η ταχύτητα ενός σωματιδίου μάζας m που κινείται κατά μήκος της θετικής κατεύθυνσης του άξονα x δίνεται από τη σχέση $\upsilon = kx^{1/3}$, όπου k θετική σταθερά. Το σωματίδιο για $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0$. Να βρείτε την έκφραση της δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο ως συνάρτηση της απόστασης.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 7/9/2009

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχομε:

$$ma = F \Rightarrow m \cdot \frac{d\upsilon}{dt} = m \cdot \frac{d\upsilon}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = m \cdot \frac{d\upsilon}{dx} \cdot \upsilon = F \quad (1)$$

Αλλά, $\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{d}{dx}(kx^{1/3}) = \frac{1}{3}kx^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}kx^{-\frac{2}{3}}$

και βάσει της (1): $F = m\frac{1}{3}kx^{-\frac{2}{3}}kx^{1/3} = \frac{1}{3}k^2mx^{-\frac{1}{3}}$

Επομένως, $\boxed{F = \frac{1}{3}k^2mx^{-\frac{1}{3}}}$

2. Δυναμική – Εξίσώσεις κίνησης

Θεωρητικά στοιχεία και μεθοδολογία

Η Δυναμική μελετά τις κινήσεις των υλικών σωμάτων που παρουσιάζουν την ιδιότητα της αδράνειας της οποίας μέτρο αποτελεί η μάζα τους. Η Δυναμική εδραιώνεται μέσω των τριών περίφημων νόμων του *Newton*. Ο πρώτος νόμος ουσιαστικά ορίζει τα *αδρανειακά συστήματα αναφοράς* ή αλλιώς τους *αδρανειακούς παρατηρητές* (ΑΠ). Αν σε ένα σώμα δεν ασκείται καμιά πραγματική δύναμη και παραμένει σε ηρεμία, τότε το σύστημα μέσω του οποίου διαπιστώνεται η ηρεμία είναι αδρανειακό. Στο δεύτερο νόμο εμφανίζεται, τόσο η μάζα όσο και η πραγματική δύναμη και ο νόμος αυτός ισχύει σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς, εμφανίζονται οι λεγόμενες *αδρανειακές ή υποθετικές δυνάμεις*. Τότε, θα πρέπει, στην έκφραση του δεύτερου νόμου, να λαμβάνονται υπόψη οι αδρανειακές δυνάμεις: για γραμμικά επιταχυνόμενο σύστημα τη γραμμική αδρανειακή δύναμη, $\vec{F}_0 = -m\vec{\alpha}_0$, ενώ για περιστρεφόμενο σύστημα τη φυγόκεντρο, $\vec{F} = -m\vec{\alpha}_n$ και την Coriolis, $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{V}'$. (βλ. Παράρτημα Α1, Α2, [4]). Ο τρίτος νόμος του Newton αναφέρεται στο γεγονός ότι οι δυνάμεις στο φυσικό κόσμο εμφανίζονται κατά ζεύγη (δράση – αντίδραση) όπου οι δύο αυτές δυνάμεις αλληλεπίδρασης έχουν ίσα μέτρα, αντίθετη φορά και ασκούνται σε διαφορετικά σώματα. Ο δεύτερος νόμος του Newton μπορεί να γραφτεί στη γενικότερη μορφή του, $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$ ή $m\dot{\vec{\upsilon}} + \dot{m}\vec{\upsilon} = \vec{F}$, όπου το πρώτο μέλος της εξίσωσης εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος, συμπεριλαμβανομένης και της συνεισφοράς από μεταβολή της μάζας του λόγω προσθήκης ή απώλειας. Το νέο στοιχείο που προκύπτει είναι ο δεύτερος όρος ο οποίος περιλαμβάνει τον παράγοντα $\lambda \equiv \dot{m}$ του ρυθμού μεταβολής της μάζας. Πρέπει να διευκρινιστεί, ότι αυτή η μεταβολή μάζας δε σχετίζεται με λεγόμενη σχετικιστική μεταβολή μάζας στη θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας.

Οι θεμελιώδεις δυνάμεις είναι τέσσερις: η ισχυρή, η ηλεκτρομαγνητική, η ασθενής και η βαρυτική, κατά σειρά φθίνουσας ισχύος. Οι δυνάμεις προκαλούν κινήσεις ή παραμορφώσεις και ερμηνεύονται μέσω της κβαντικής ηλεκτροδυναμικής, πλην της βαρύτητας. Δηλαδή ερμηνεύονται από μια διαδικασία «ανταλλαγής» *εικονικών σωματιδίων*. Η βαρύτητα είναι εξαιρετικά ασθενική σε σχέση με τις υπόλοιπες και επιδέχεται γεωμετρική ερμηνεία μέσω της θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας με βάση την αρχή της ισοδυναμίας. Δηλαδή η βαρύτητα θεωρείται ως «αδρανειακή» δύναμη, ανάλογη της μάζας ενός σώματος, που εμφανίζεται σε περιοχές του *χωρόχρονου* όπου υπάρχει μεγάλη ποσότητα μάζας - ενέργειας. Η ιδιότητα αυτή του χωρόχρονου να υφίσταται αυτήν τη διαταραχή ή παραμόρφωση προκύπτει από την ίδια τη μετρική της Γεωμετρίας του (βλ. Παράρτημα Ζ1, [4,5,6]).

Για την αντιμετώπιση προβλημάτων Δυναμικής, το πρώτο–κύριο βήμα στην επίλυση είναι η επισήμανση, του αν το σύστημα αναφοράς που αναφέρεται είναι αδρανειακό ή όχι. Αν δεν είναι αδρανειακό, τότε, εκτός των πραγματικών δυνάμεων, πρέπει να ληφθούν υπόψη και να καθορισθούν και οι αδρανειακές δυνάμεις. Πολύ χρήσιμο είναι το λεγόμενο *διάγραμμα ελευθέρου σώματος*. Στο διάγραμμα αυτό σχεδιάζουμε το σώμα ως να είναι απομονωμένο από το περιβάλλον του (άρα περιγράφεται μια ιδεατή κατάσταση) στο οποίο όμως σημειώνουμε όλες τις δυνάμεις που ασκούνται σε αυτό και μόνον αυτές. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το δεύτερο νόμο του Newton με αυτές τις δυνάμεις (βλ. Παράρτημα Γ).

Άσκηση 2.1

Το διάνυσμα θέσης κινούμενου σώματος με μάζα m=100 Kg είναι $\vec{r} = (3t^2 - 6t)\hat{x} - 4t^3\hat{y} + (3t+2)\hat{z}$, σε m. Ζητούνται: α) η ταχύτητα και η ορμή του σώματος, β) η επιτάχυνση και η δύναμη που ασκείται στο σώμα. γ) Η γωνία μεταξύ του διανύσματος της ταχύτητας και της επιτάχυνσης για $t = 0$.

α)

$$\vec{r} = (3t^2 - 6t)\hat{x} - 4t^3\hat{y} + (3t+2)\hat{z} \text{ σε m}$$

$$\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6(t-1)\hat{x} - 12t^2\hat{y} + 3\hat{z} \text{ σε m/s}$$

$$\vec{P} = m\left[(6t-6)\hat{x} - 12t^2\hat{y} + 3\hat{z}\right] = 100\left[6(t-1)\hat{x} - 12t^2\hat{y} + 3\hat{z}\right] \text{σε m.kg/s}$$

β)

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = 6\hat{x} - 24t\hat{y} \text{ σε m/s}^2 \text{ και}$$

$$\vec{F} = m\vec{\alpha} = m\left[6\hat{x} - 24t\hat{y}\right] = 100\left[6\hat{x} - 24t\hat{y}\right] = 600\hat{x} - 2400t\hat{y} \text{ σε N}$$

γ)

$$\cos\varphi = \frac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}}{\upsilon\alpha} = \frac{\left(6(t-1)\hat{x} - 12t^2\hat{y} + 3\hat{z}\right)\cdot\left(6\hat{x} - 24t\hat{y}\right)}{\sqrt{36(t-1)^2 + 144t^4 + 9}\cdot\sqrt{36 + 576t^2}} =$$

$$= \frac{36(t-1) + 288t^3}{\sqrt{144t^4 + 36t(t-2) + 45}\cdot\sqrt{36 + 576t^2}}.$$

$$\text{Για } t = 0 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{-36}{\sqrt{45\cdot 36}} = \frac{-6}{\sqrt{45}} = -0{,}894 \Rightarrow \varphi = \text{ar}\cos\left(-0.894\right) = 153.4^0$$

Άσκηση 2.2

Πλοιάριο μάζας m αρχίζει να κινείται από την ηρεμία υπό την επίδραση σταθερής δύναμης F_o. Με την έναρξη της κίνησης εμφανίζεται δύναμη αντίστασης $F=-k\upsilon$ (όπου k θετική σταθερά). α) Να βρεθούν, η ταχύτητα, η επιτάχυνση και το διάστημα που θα διανύσει το πλοιάριο ως συναρτήσεις του χρόνου. β) Να περιγράψτε σε απλή γλώσσα την κίνηση που θα εκτελέσει το πλοιάριο.

α)

Θα καταστρώσουμε την εξίσωση κίνησης που βασίζεται στο 2^o νόμο του Newton κατά το φορέα της δεδομένης σταθερής δύναμης, έστω στην κατεύθυνση $\hat{x}$, δηλαδή δεχόμαστε ότι $\vec{F}_0\hat{x}$.

$$m\alpha = F_{o\lambda} \Rightarrow m\alpha = F_0 + F = F_0 - k\upsilon \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} = F_0 - k\upsilon \quad (1)$$

Η διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (1) μπορεί να λυθεί με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών, ως εξής:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F_0 - k\upsilon \Rightarrow \frac{m}{k}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{F_0}{k} - \upsilon \Rightarrow c_1\frac{d\upsilon}{dt} = c_2 - \upsilon \Rightarrow$$

$$c_1\frac{d(\upsilon - c_2)}{dt} = -(\upsilon - c_2) \Rightarrow \frac{d(\upsilon - c_2)}{\upsilon - c_2} = -\frac{dt}{c_1}.$$ Θέτουμε $u = \upsilon - c_2 \Rightarrow$

$$\int_{-c_2}^{\upsilon - c_2}\frac{du}{u} = -\int_0^t \frac{dt'}{c_1} = \left[\ln u\right]_{-c_2}^{\upsilon - c_2} = -\frac{t}{c_1} \Rightarrow \ln\frac{\upsilon - c_2}{-c_2} = -\frac{t}{c_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon = c_2 - c_2 e^{-\frac{t}{c_1}} \Rightarrow \upsilon = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k}e^{-\frac{t}{c_1}} \Rightarrow \boxed{\upsilon = \frac{F_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)}$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow x = \int_0^t \upsilon dt' = \frac{F_0}{k}\int_0^t\left(1 - e^{-\frac{kt'}{m}}\right)dt' = \frac{F_0 t}{k} + \frac{F_0}{m}e^{-\frac{kt}{m}}$$

Η επιτάχυνση υπολογίζεται από την έκφραση της ταχύτητας:

$$\alpha = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{F_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)\right] = \frac{F_0}{k}\frac{k}{m}e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{F_0}{m}e^{-\frac{kt}{m}}}$$

β)

Παρατηρούμε ότι μετά από παρέλευση μεγάλου χρόνου, $t >> \frac{m}{k}$ ο εκθετικός όρος θα γίνει αμελητέος σε σχέση με τη μονάδα και επομένως το πλοιάριο θα αποκτήσει *οριακή ταχύτητα*, $\upsilon = \upsilon_{o\rho} = \frac{F_0}{k}$, ενώ η επιτάχυνση θα τείνει προς το 0, όπως αναμένεται.

Άσκηση 2.3

Ένα σώμα μάζας *m* μπορεί να κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο *xy*, χωρίς τριβές. Τη χρονική στιγμή *t*=0 βρίσκεται στο σημείο (*x,y*)= (0,0) και έχει ταχύτητα $\vec{\upsilon}(0)=\upsilon_0\hat{y}$, όπου $\upsilon_0>0$. Πάνω στο σώμα ασκείται η δύναμη $\vec{F}=(\alpha-bt)\hat{x}-bt\hat{y}$, όπου α,b θετικές σταθερές.

α) Να διατυπώσετε την εξίσωση κίνησης του σώματος.

β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες $x(t), y(t)$ του σώματος συναρτήσει του χρόνου.

δ) Να βρείτε τη σχέση που πρέπει να συνδέει τις σταθερές α, b και την υ_o, ώστε το σώμα να μπορέσει να ξαναπεράσει από το σημείο (*x,y*)=(0,0).

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 4/2/2004

α)

Σύμφωνα με το 2^{o} νόμο του Newton , έχουμε:

$$m\vec{\alpha}=\vec{F}\Rightarrow m\frac{d^2r}{dt^2}=(\alpha-bt)\hat{x}-bt\hat{y}\Rightarrow\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{(\alpha-bt)}{m}\hat{x}-\frac{bt}{m}\hat{y}\quad(1)$$

Η εξίσωση (1) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση της κίνησης.

β)

Η ταχύτητα μπορεί να βρεθεί από τη σχέση ορισμού της επιτάχυνσης με ολοκλήρωση:

$$\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{(\alpha-bt)}{m}\hat{x}-\frac{bt}{m}\hat{y}\Rightarrow d\vec{\upsilon}=\frac{(\alpha-bt)}{m}dt\hat{x}-\frac{bt}{m}dt\hat{y}\Rightarrow$$

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}d\vec{\upsilon}'=\int_0^t\frac{(\alpha-bt')}{m}dt'\hat{x}-\int_0^t\frac{bt'}{m}dt\hat{y}\Rightarrow$$

$$\vec{\upsilon}-\vec{\upsilon}_0=\frac{1}{m}\left(\int_0^t\alpha dt'-\int_0^t bt'dt'\right)\hat{x}-\frac{b}{m}\int_0^t t'dt\hat{y}=$$

$$=\frac{1}{m}\left\{\alpha\left[t'\right]_0^t-\left[\frac{bt'^2}{2}\right]_0^t\right\}\hat{x}-\frac{b}{m}\left[\frac{t'^2}{2}\right]_0^t\hat{y}=\frac{1}{m}\left(\alpha t-\frac{bt^2}{2}\right)\hat{x}-\frac{bt^2}{2m}\hat{y}$$

Επομένως, η ζητούμενη ταχύτητα προκύπτει:

$$\boxed{\vec{\upsilon}=\frac{1}{m}\left(\alpha t-\frac{bt^2}{2}\right)\hat{x}+\left(\upsilon_0-\frac{bt^2}{2m}\right)\hat{y}}\quad(2)$$

γ)

Ολοκληρώνοντας τη σχέση (2) με κάτω όριο (αρχική θέση) $\vec{r}(0)=\vec{0}$ παίρνουμε:

$$\boxed{\vec{r}=\frac{1}{2m}\left(\alpha t^2-\frac{bt^3}{3}\right)\hat{x}+\left(\upsilon_0 t-\frac{bt^3}{6m}\right)\hat{y}}$$

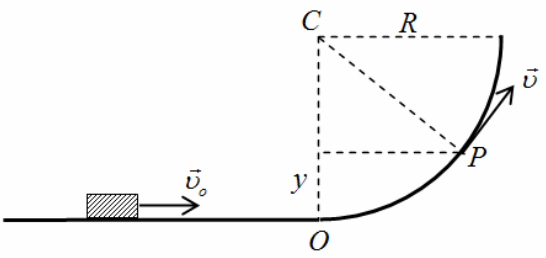
δ)

Η συνθήκη που πρέπει να πληρούται για να ξαναπεράσει το σώμα από το αρχικό σημείο $\vec{r}(0)=\vec{0}$ στο χρόνο $t>0$, είναι η ακόλουθη:

$$\left.\begin{aligned} x(t)&=\left(\frac{\alpha}{2m}-\frac{bt}{6m}\right)t^2=0\Rightarrow t=\frac{3\alpha}{b}\\ y(t)&=\left(\upsilon_0-\frac{bt^2}{6m}\right)t=0 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{t=\frac{3\alpha}{b},\upsilon_0=\frac{3\alpha^2}{2bm}}$$

Άσκηση 2.4

Σώμα μάζας m κινείται σε οριζόντιο δάπεδο, ευθύγραμμα και ομαλά με ταχύτητα υ_o. Φθάνοντας στο σημείο O, αναγκάζεται να κινηθεί (χωρίς τριβές) σε κατακόρυφη κυκλική στεφάνη, ακτίνας R (σχήμα).



α) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητάς του, υ, σ' ένα τυχαίο σημείο P(x,y) ως συνάρτηση του ύψους y από το δάπεδο.

β) Να βρείτε το μέτρο της κεντρομόλου (α_κ) και επιτρόχιας (α_ε) επιτάχυνσης στο ίδιο ύψος y.

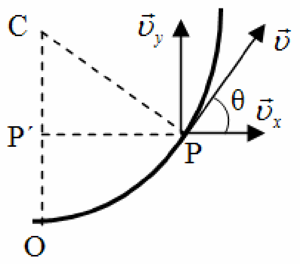
Δίνεται: $\alpha_\varepsilon = \left|\frac{d\upsilon}{dt}\right| = \left|\frac{d\upsilon}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}\right|$

Υπόδειξη: *Στο ερώτημα (β), στο σημείο P (σε ύψος y) να αναλύσετε την ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ σε οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα, ώστε, μέσω τριγωνομετρικών σχέσεων να εκφραστεί η υ_y συναρτήσει του υ και του y.*

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 4/2/2004

α)

Με βάση την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, έχουμε:



$\boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gy}}$ (1) , όπου y το ύψος OP΄.

β)

Το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$\alpha_n = \frac{\upsilon^2}{R}$ και με βάση την (1) παίρνουμε: $\alpha_\kappa = \frac{\upsilon_0^2 - 2gy}{R}$ (2)

Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης υπολογίζεται από τη σχέση:

$\alpha_t = \left|\frac{d\upsilon}{dt}\right| = \left|\frac{d\upsilon}{dy}\cdot\frac{dy}{dt}\right|$, αλλά εξ'ορισμού είναι, $\upsilon_y \equiv \frac{dy}{dt}$, όπου υ_y είναι η συνιστώσα της ταχύτητας κατά τον κατακόρυφο άξονα. Οπότε παίρνουμε:

$$\alpha_t = \left|\frac{d\upsilon}{dy}\cdot\upsilon_y\right| \quad (3)$$

Υπολογίζουμε αρχικά τη συνιστώσα υ_y συναρτήσει του y, σύμφωνα με το παραπάνω σχήμα: $\upsilon_y = \upsilon \sin\theta$ με $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ και $\cos\theta = \dfrac{R-y}{R}$.

Αντικαθιστούμε τα παραπάνω και παίρνουμε, $\upsilon_y = \upsilon \dfrac{\sqrt{y(2R-y)}}{R}$ (4)

Η ποσότητα $\dfrac{d\upsilon}{dy}$ υπολογίζεται από την (1) με παραγώγιση ως προς y:

$$\frac{d\upsilon}{dy} = \frac{1}{2}\frac{-2g}{\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gy}} = \frac{-g}{\sqrt{\upsilon_0^2 - 2gy}} = -\frac{g}{\upsilon} \quad (5)$$

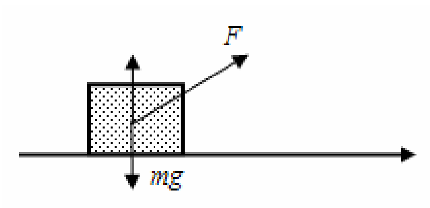
Από τις (3),(4) και (5) καταλήγουμε στην

$$\boxed{\alpha_t = \left| \frac{\upsilon\sqrt{y(2R-y)}}{R}\left(-\frac{g}{\upsilon}\right) \right| = \frac{g}{R}\sqrt{y(2R-y)}}$$

Άσκηση 2.5

Τη στιγμή $t = 0$ μια δύναμη μέτρου $F = kt$ αρχίζει να εφαρμόζεται υπό σταθερή γωνία θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο πάνω σε ένα σώμα μάζας m που ακινητεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογιστούν: α) η ταχύτητα του σώματος τη στιγμή που εγκαταλείπει την οριζόντια επιφάνεια και β) η απόσταση που καλύπτει το σώμα μέχρι εκείνη τη στιγμή.

α)



Τη στιγμή που το σώμα αφήνει το οριζόντιο επίπεδο, η κατακόρυφη συνιστώσα εξισώνεται με το βάρος. Ο χρόνος που συμβαίνει αυτό υπολογίζεται από την αντίστοιχη εξίσωση:

$$F_y = F\sin\theta = mg \Rightarrow kt_\alpha \sin\theta = mg \Rightarrow \boxed{t_\alpha = \frac{mg}{k\sin\theta}} \quad (1)$$

Μέχρι το σώμα να εγκαταλείψει το οριζόντιο επίπεδο, κινείται υπό την επίδραση της οριζόντιας συνιστώσας της F, οπότε με βάση το 2^{o} νόμο του Newton έχουμε:

$$m\alpha_x = F_x \Rightarrow m\frac{d\upsilon_x}{dt} = F\cos\theta = kt\cos\theta \Rightarrow d\upsilon_x = \frac{k}{m}\cos\theta t dt \Rightarrow$$

$$\int_0^{\upsilon_\alpha} d\upsilon_x = \frac{k}{m}\cos\theta \int_0^{t_\alpha} t dt \Rightarrow \upsilon_\alpha = \frac{k}{2m}\cos\theta t_\alpha^2$$ (2). Όμως, ο χρόνος της εγκατάλειψης έχει βρεθεί ήδη και επομένως:

$$(1),\,(2) \Rightarrow \boxed{\upsilon_\alpha = \frac{mg^2\cos\theta}{2k\sin^2\theta}} \quad (3)$$

α)

Το διάστημα που θα διανύσει μέχρι την εγκατάλειψη, υπολογίζεται από τη σχέση ορισμού της ταχύτητας και ολοκλήρωση, με άνω όριο το χρόνο t_α από την έκφραση (2):

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x(t) \Rightarrow dx = \upsilon_x(t)dt \Rightarrow \int_0^{x_\alpha} dx = \int_0^{t_\alpha} \frac{k\cos\theta t_\alpha^2}{2m} dt = \frac{k\cos\theta}{2m}\int_0^{t_\alpha} t^2 dt \Rightarrow$$

$$\boxed{x_\alpha = \frac{m^2 g^3\cos\theta}{2k^2\sin^3\theta}}$$

Άσκηση 2.6

Ένα σωματίδιο με μάζα *m* κινείται στο επίπεδο (*x,y*) υπό την επίδραση δύναμης $\vec{F}=-c\vec{r}$, όπου *c* μια θετική σταθερά και $\vec{r}$ το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου. Στο χρόνο $t=0$ το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση (x_0,y_0) και έχει αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$. α) να γραφούν και να λυθούν οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου ως προς τους *x* και *y*. β) Ποια είναι η συνθήκη μεταξύ των αρχικών συνθηκών ώστε η τροχιά του σωματιδίου να είναι περιφέρεια κύκλου και ποια είναι τότε η περίοδος της κίνησης; γ) Ποια είναι η αντίστοιχη συνθήκη ώστε η τροχιά του σωματιδίου να είναι ευθεία με κλίση $\varphi=45^o$ ως προς τον άξονα *x*;

α)

$$\vec{F}_x=m\vec{\alpha}_x \Rightarrow F_x=m\frac{d^2x}{dt^2}=-cx \rightarrow md^2x=-cxdt^2 \Rightarrow m\ddot{x}+cx=0 \quad (1)\ \text{και}$$

αντίστοιχα, $m\ddot{y}+cy=0$ (2)

Οι γενικές λύσεις των διαφορικών εξισώσεων είναι:

$$\begin{aligned} x(t)&=A_1\cos\omega t+A_2\sin\omega t \\ y(t)&=B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t \end{aligned} \quad (3)$$

όπου, $\omega=\sqrt{\frac{c}{m}}$, ενώ οι σταθερές A_i και B_i υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες ως εξής:

$$A_1=x(0)=x_0\ , B_1=y(0)=y_0\ , A_2=\dot{x}(0)=\frac{\upsilon_{x,0}}{\sqrt{c/m}}\ , B_2=\dot{y}(0)=\frac{\upsilon_{y,0}}{\sqrt{c/m}}$$

και τελικά παίρνουμε τις ακόλουθες εκφράσεις:

$$\boxed{x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{\upsilon_{x,0}}{\sqrt{c/m}}\sin\omega t}\ \text{και}\ \boxed{y(t)=y_0\cos\omega t+\frac{\upsilon_{y,0}}{\sqrt{c/m}}\sin\omega t}$$

β)

Η εξίσωση της καμπύλης που διαγράφει το σώμα μπορεί να βρεθεί με βάση το *θεώρημα αρμονικού αθροίσματος* [2] των εξισώσεων (3) είναι:

$$\begin{aligned} x(t)&=A_1\cos\omega t+A_2\sin\omega t=A\cos(\omega t+\delta_A) \\ y(t)&=B_1\cos\omega t+B_2\sin\omega t=B\sin(\omega t+\delta_B) \end{aligned} \quad (4)$$

όπου, $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}$, $B=\sqrt{B_1^2+B_2^2}$ και

$$\delta_A=\arctan\left(-\frac{A_2}{A_1}\right)\ , \delta_B=\arctan\left(\frac{B_2}{B_1}\right)$$

οπότε οι εξισώσεις (4) σε τετραγωνική μορφή γράφονται:

$$\frac{x^2(t)}{A^2}=x'(t)=\cos^2\left(\omega t+\delta_A\right)\text{και}\ \frac{y^2(t)}{B^2}=y'(t)=\sin^2\left(\omega t+\delta_B\right) \quad (5)$$

---

[2] Έστω, $f(\theta)=a\cos\theta+b\sin\theta$, τότε, αν θέλουμε μια έκφραση συνημιτόνου έχουμε: $f(\theta)=c\cos(\theta+\delta) \Rightarrow f(\theta)=c\cos\theta\cos\delta-c\sin\theta\sin\delta \Rightarrow \alpha=c\cos\delta$

και $b=-c\sin\delta$, οπότε $\alpha^2+b^2=c^2$ και $\tan\delta=\frac{\sin\delta}{\cos\delta}=-\frac{b}{\alpha}$. Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε την αντίστοιχη έκφραση ημιτόνου.

Οι εξισώσεις αυτές, αποδεικνύεται ότι οδηγούν σε συνήθη εξίσωση έλλειψης στο σύστημα x', y'. Ο άξονας α της έλλειψης σχηματίζει γωνία $\pm 45^{o}$ ως προς τον άξονα x, οι δε ημιάξονες της συνδέονται με τη διαφορά φάσης μέσω αναλυτικής σχέσης (απόδειξη και περαιτέρω εμβάθυνση δείτε στο Παράρτημα Δ1).

Αν όμως, $\delta_A + \delta_B = \dfrac{\pi}{2}$, τότε $\tan\delta_A = -\dfrac{A_2}{A_1}$,

$$\tan\delta_B = \frac{\sin\delta_B}{\cos\delta_B} = \frac{\cos\delta_A}{\sin\delta_A} = \cot\delta_A = -\frac{B_2}{B_1} \Rightarrow -\frac{A_2}{A_1} = -\frac{B_1}{B_2} \Rightarrow A_1B_1 = A_2B_2 \Rightarrow$$

$\boxed{x_0 y_0 = \dfrac{m}{c}\upsilon_{x,0}\upsilon_{y,0}}$. Επίσης, θα είναι: $\cos^2\left(\omega t + \delta_B\right) = \sin^2\left(\omega t + \delta_A\right)$ και συνεπώς η εξίσωση της καμπύλης γίνεται:

$\dfrac{x^2(t)}{A^2} + \dfrac{y^2(t)}{B^2} = 1$ Δηλαδή, εξίσωση έλλειψης με τις δύο εστίες στον άξονα x.

Αν συμβαίνει, $x_0 > y_0$, τότε αυτή θα έχει μεγάλο ημιάξονα,

$\alpha = A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{m\upsilon_{x,0}^2}{c}}$ και μικρό ημιάξονα, $b = B = \sqrt{y_0^2 + \dfrac{m\upsilon_{y,0}^2}{c}}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι, $\boxed{\alpha^2 + b^2 = r_0^2 + \dfrac{m}{c}\upsilon_0^2}$ που οδηγεί στη σχέση,

$\alpha^2 + b^2 = \dfrac{2}{c}\dfrac{cr_0^2 + m\upsilon_0^2}{2} \Rightarrow \alpha^2 + b^2 = \dfrac{2E_0}{c}$,όπου $E_0 = K_0 + U_0$ η μηχανική ενέργεια του σώματος, $K_0 = \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2$ η αρχική κινητική ενέργεια και $U_0 = \dfrac{1}{2}cr_0^2$ η αρχική δυναμική ενέργεια.

Για να έχουμε κυκλική τροχιά θα πρέπει:

$$\alpha = b = R \Rightarrow x_0^2 + \frac{m\upsilon_{x,0}^2}{c} = y_0^2 + \frac{m\upsilon_{y,0}^2}{c} \Rightarrow \boxed{x_0^2 - y_0^2 = \frac{m}{c}\left(\upsilon_{y,0}^2 - \upsilon_{x,0}^2\right)}$$

Η περίοδος περιστροφής θα είναι τότε, $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{c}}}$

γ)

Για να έχουμε ως τροχιά μια ευθεία με κλίση $\varphi = 45^o$, θα πρέπει η εξίσωση της τροχιάς να είναι της μορφής,

$$y = \lambda x \Rightarrow B_1\cos\omega t + B_2\sin\omega t = \lambda A_1\cos\omega t + \lambda A_2\sin\omega t \Rightarrow$$

$$\left(B_1 - \lambda A_1\right)\cos\omega t + \left(B_2 - \lambda A_2\right)\sin\omega t = 0 \Rightarrow$$

$B_1 - \lambda A_1 = 0$ και

$$B_2 - \lambda A_2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{B_1}{A_1} = \frac{B_2}{A_2} \Rightarrow A_1B_2 = A_2B_1 \Rightarrow \frac{x_0\upsilon_{y,0}}{\sqrt{c/m}} = \frac{y_0\upsilon_{x,0}}{\sqrt{c/m}} \Rightarrow$$

$$x_0\upsilon_{y,0} = y_0\upsilon_{x,0} \text{ ή } \frac{x_0}{y_0} = \frac{\upsilon_{x,0}}{\upsilon_{y,0}} = \frac{dx|_{x=x_0}}{dy|_{y=y_0}} = \tan 45^o = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x_0}{y_0} = \frac{\upsilon_{x,0}}{\upsilon_{y,0}}}$$

Άσκηση 2.7

Σώμα μάζας m πέφτει ελεύθερα στο πεδίο βαρύτητας της Γης (g=σταθ.) από αρχικό ύψος h, χωρίς αρχική ταχύτητα. Η αντίσταση του αέρα είναι $\vec{F}=-k\vec{\upsilon}$ όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σώματος και k θετική σταθερά. α) Να καταστρωθεί η διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση του σώματος. β) Να λυθεί η εξίσωση αυτή για να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου. γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου.

α)

Από το 2^o νόμο του Newton έχουμε:

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{\alpha}_y \Rightarrow \vec{F} - mg\hat{y} = m\vec{\alpha}_y \Rightarrow k\upsilon\hat{y} - mg\hat{y} = ma_y \Rightarrow$$

$$\left(k\upsilon - mg\right)\hat{y} = -m\frac{d\upsilon}{dt}\hat{y} \quad (1)$$

Η (1) είναι η διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση του σώματος.

β)

$$(1) \Rightarrow \frac{md\upsilon}{mg-k\upsilon} = dt \Rightarrow -\frac{(m/k)(-kd\upsilon)}{mg-k\upsilon} = dt \Rightarrow$$

$$-\frac{m}{k}\int_{mg}^{mg-k\upsilon}\frac{d\upsilon'}{\upsilon'} = \int_0^t dt' = -\frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg-k\upsilon}{mg}\right) = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg}{mg-k\upsilon}\right) = t \Rightarrow$$

$$\frac{mg}{mg-k\upsilon} = e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \boxed{\upsilon(t) = \frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)}$$

γ)

Από τη σχέση ορισμού της ταχύτητας κατά την κατεύθυνση y έχουμε:

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon(t) = \frac{mg}{k}(1-e^{-kt/m}) \Rightarrow dy = \frac{mg}{k}(1-e^{-kt/m})dt$$

Με ολοκλήρωση, θεωρώντας ότι για $t=0 \Rightarrow y=h$ παίρνουμε:

$$y(t)-h = \left[\frac{mg}{k}t' + \frac{m^2g}{k^2}e^{-kt'/m}\right]_0^t = \frac{mg}{k}t + \frac{m^2g}{k^2}e^{-kt/m} - \frac{m^2g}{k^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = h + \frac{mgt}{k} + \frac{m^2g}{k^2}(e^{-kt/m}-1)}$$

Άσκηση 2.8

Σε ένα σώμα μάζας m ασκείται δύναμη της μορφής, $\vec{F} = \kappa\hat{x} - \lambda\upsilon_y^2\hat{y} - (\mu/z^2)\hat{z}$, όπου κ, λ και μ θετικές σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Για t=0 είναι: $\vec{r}(0) = (0,0,z_0)$ και $\vec{\upsilon}(0) = (0,\upsilon_{yo},0,)$. Να βρείτε την κινητική ενέργεια του σώματος, K, ως συνάρτηση των συντεταγμένων της θέσης του x, y και z.

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Newton έχουμε:

$$m\vec{\alpha} = \vec{F} \Rightarrow \alpha_x\hat{x} + \alpha_y\hat{y} + \alpha_z\hat{z} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\hat{x} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\hat{y} + \frac{d\upsilon_z}{dt}\hat{z} =$$

$$= \frac{\kappa}{m}\hat{x} - \frac{\lambda}{m}\hat{y} - \frac{\mu}{mz^2}\hat{z} \quad (1)$$

Οι τρεις συνιστώσες της επιτάχυνσης μπορούν να εκφραστούν συναρτήσει του διαστήματος, μέσω του κανόνα παραγώγισης πεπλεγμένων συναρτήσεων των συνιστωσών της ταχύτητας:

$$\alpha_x = \frac{d\upsilon_x}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dx}\cdot\upsilon_x = \frac{\kappa}{m} \Rightarrow \upsilon_x d\upsilon_x = \frac{\kappa}{m}dx \Rightarrow \int_0^{\upsilon_x}\upsilon'_x d\upsilon'_x = \frac{\kappa x}{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_x^2 = \frac{2\kappa x}{m}} \quad (1)$$

$$\alpha_y = \frac{d\upsilon_y}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{d\upsilon_y}{dy}\cdot\upsilon_y = \frac{-\lambda\upsilon_y^2}{m} \Rightarrow \int_{\upsilon_{y,0}}^{\upsilon_y}\upsilon'_y d\upsilon'_y = \frac{-\lambda y}{m} \Rightarrow \ln\frac{\upsilon_y}{\upsilon_{y,0}} = \frac{-\lambda y}{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_y = \upsilon_{y,0}e^{\frac{-\lambda y}{m}}} \quad (2)$$

$$\alpha_z = \frac{d\upsilon_z}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{d\upsilon_z}{dz}\cdot\upsilon_z = \frac{-\mu}{z^2} \Rightarrow \int_0^{\upsilon_z}\upsilon'_z d\upsilon'_z = -\frac{\mu}{m}\int_0^z\frac{dz}{z'^2} \Rightarrow \frac{\upsilon_z^2}{2} = -\frac{\mu}{m}\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{z}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_z^2 = \frac{2\mu}{m}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right)} \quad (3)$$

Η κινητική ενέργεια υπολογίζεται με βάση τις παραπάνω εκφράσεις (1), (2) και (3), ως εξής:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2\right) = \frac{1}{2}m\left[\frac{2\kappa x}{m} + \upsilon_{y,0}^2 e^{\frac{-2\lambda y}{m}} + \frac{2\mu}{m}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\boxed{K = \kappa x + \frac{m}{2}\upsilon_{y,0}^2 e^{\frac{-2\lambda y}{m}} + \frac{\mu}{m}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right)}$$

Άσκηση 2.9

Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντιο. Υποθέστε ότι η γωνία θ είναι αρχικά μηδενική και αυξάνεται πολύ αργά μέχρι τη στιγμή που το σώμα αρχίζει να κινείται. Αν οι συντελεστές στατικής και κινητικής τριβής μεταξύ σώματος και επιπέδου είναι μ_s και μ_κ αντίστοιχα ($\mu_s > \mu_\kappa$), να βρεθούν ως συνάρτηση του χρόνου, η ταχύτητα του σώματος και η θέση του.

Σύμφωνα με την εκφώνηση, το σώμα βρίσκεται σε ηρεμία, όσο η γωνία θ δεν ξεπερνά την κρίσιμη. Μόλις στο όριο αυτό (δεχόμενοι ηρεμία του σώματος) η ισορροπία δυνάμεων κατά τον άξονα y (κάθετο στην επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου) δίνει :

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta \quad (1)$$

Επίσης, η ισορροπία κατά τον άξονα x (κάθετο στην επιφάνεια κεκλιμένου επιπέδου με βάση και την (1) δίνει :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f_{s,m} - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow \mu_s mg\cos\theta = mg\sin\theta \Rightarrow$$

$$\mu_s \cos\theta = \sin\theta \Rightarrow \mu_s = \tan\theta \quad (2)$$

Όταν το σώμα, λόγω μικρής υπέρβασης της κρίσιμης τιμής της θ, αρχίσει να κινείται, εφαρμόζουμε το 2^o νόμο του Newton και έχουμε:

$m\vec{\alpha}_x = \sum \vec{F}_x$ που στο φορέα x καταλήγουμε στην εξίσωση κίνησης με χρήση των μέτρων των διανυσμάτων:

$$m\alpha_x = mg\sin\theta - f_\kappa = mg\sin\theta - \mu_\kappa mg\cos\theta \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_x = g\cos\theta(\mu_s - \mu_\kappa)} \quad (3)$$

Η ταχύτητα του σώματος βρίσκεται ως εξής:

$$\frac{d\upsilon_x}{dt} = \alpha_x \Rightarrow d\upsilon_x = \alpha_x dt \Rightarrow \int_0^{\upsilon_x} d\upsilon'_x = \int_0^t \alpha_x dt' \Rightarrow$$

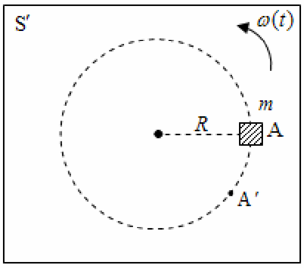
$$\upsilon_x = g\cos\theta(\mu_s - \mu_\kappa)\int_0^t dt' \Rightarrow \boxed{\upsilon_x = g\cos\theta(\mu_s - \mu_\kappa)t}$$

Το δε διάστημα βρίσκεται με ανάλογο τρόπο (ολοκλήρωση):

$$\frac{dx}{dt} = \upsilon_x \Rightarrow dx = \upsilon_x dt \Rightarrow \boxed{x = \frac{g\cos\theta}{2}(\mu_s - \mu_\kappa)t^2}$$

Άσκηση 2.10

Ένα σώμα μάζας m βρίσκεται σε ηρεμία πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι (θέση Α) σε απόσταση R από το κέντρο του (σχήμα). Οι επιφάνειες επαφής τραπεζιού-σώματος παρουσιάζουν συντελεστές τριβής $\mu_s = 1$ και $\mu_\kappa < \mu_s$.



Το τραπέζι αρχίζει να περιστρέφεται από ηρεμία, περί κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του με γωνιακή ταχύτητα $\omega(t) = \omega_o(1 - e^{-\lambda t})$, όπου λ μια θετική σταθερά, αποτελώντας ένα μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς (S'). α) Ποια είναι η (ποσοτική) συνθήκη ώστε το σώμα να μετακινηθεί ακτινικά και σε ποιο χρόνο θα συμβεί αυτό;

β) Ποια χρονική στιγμή θα μπορούσε να μετακινηθεί και εφαπτομενικά (π.χ. προς το σημείο A') και υπό ποια (ποσοτική) συνθήκη;

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 24/6/2004

α)

Το τραπέζι όταν αρχίζει να περιστρέφεται αποτελεί *μη αδρανειακό* σύστημα αναφοράς με μοναδική αδρανειακή επιτάχυνση την κεντρομόλο. Συνεπώς, αναπτύσσεται στο σώμα που ηρεμεί στο τραπέζι (σύστημα S') *φυγόκεντρος* δύναμη με κατεύθυνση από το κέντρο προς την περιφέρεια (ακτινικά), ίση με:

$$\vec{F}_\varphi = -m\alpha_n \hat{i}_n \Rightarrow F_\varphi = \frac{m\upsilon^2}{R} = \frac{m\omega^2 R^2}{R} = m\omega^2 R \quad (1)$$

Το σώμα για να μετακινηθεί θα πρέπει να ισχύει:

$$\boxed{F_\varphi - f_{s,m} > 0} \quad (2)$$

Αυτή είναι η βασική συνθήκη ακτινικής μετακίνησης που οδηγεί στον υπολογισμό του χρόνου που θα συμβεί αυτό, ως εξής:

$$(2) \Rightarrow m\omega^2(t)R - mg\mu_s > 0 \Rightarrow \omega^2(t) > \frac{g}{R} \Rightarrow \omega_0^2(1 - e^{-\lambda t})^2 > \frac{g}{R} \Rightarrow$$

$$e^{-\lambda t} < 1 - \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow -\lambda t < \ln\left(1 - \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{g}{R}}\right) \Rightarrow \boxed{t > \ln\left(\frac{\omega_0\sqrt{R}}{\omega_0\sqrt{R} - \sqrt{g}}\right)^{1/\lambda}}$$

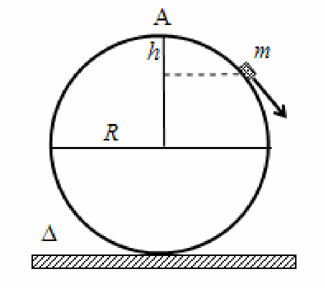
β)

Εφαπτομενική μετακίνηση θα μπορούσε να συμβεί λόγω της επιτρόχιας επιτάχυνσης στο Α που ισούται με $\vec{\alpha}_t = \dot{\upsilon}\hat{i}_t$. Η αδρανειακή δύναμη που θα προκαλούσε μετακίνηση θα ήταν η $\vec{F}' = -m\vec{\alpha}' = -m\vec{\alpha}_t\hat{i}_t$, δηλαδή σε κατεύθυνση αντίθετη της περιστροφής και εφαπτομενική. Η συνθήκη μετακίνησης θα είναι τότε:

$F' - f_{s,m} > 0 \Rightarrow -m\alpha_t - f_{s,m} > 0 \Rightarrow \dot{\upsilon} > g\mu_s$, αλλά $\mu_s = 1$, οπότε:

$\dot{\upsilon} > g \Rightarrow \dot{\omega}R > g \Rightarrow \dot{\omega} > \dfrac{g}{R} \Rightarrow \omega_0\lambda e^{-\lambda t} > \dfrac{g}{R}$. Το αριστερό μέλος γίνεται μέγιστο για $t = 0$ και τότε η συνθήκη γίνεται: $\boxed{\omega_0\lambda > \dfrac{g}{R}}$

Άσκηση 2.11

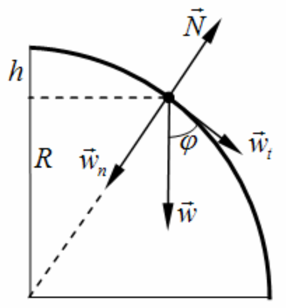


Ένα σώμα μάζας m αφήνεται (σε κατάσταση ηρεμίας) στο άνω άκρο (Α) ενός οριζόντιου ακλόνητου κυλίνδρου ακτίνας R. Λόγω της βαρύτητας, ολισθαίνει χωρίς τριβές (σχήμα). α) Να βρείτε την κατακόρυφη απόσταση h από το Α που το σώμα μόλις εγκαταλείπει την επιφάνεια του κυλίνδρου. β) Αν ο κύλινδρος αφεθεί ελεύθερος να περιστραφεί χωρίς τριβές (αλλά όχι να κυλίσει), θα προκληθεί ή όχι περιστροφή του κυλίνδρου κατά τη διάρκεια της ολίσθησης του παραπάνω σώματος; Εξηγήστε ανάλογα.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 20/9/2004

α)

Αναλύουμε το βάρος σε δύο συνιστώσες, μια εφαπτομενική, $\vec{w}_t$ και μια ακτινική, $\vec{w}_n$, των οποίων τα μέτρα είναι:



$$w_t = w\cos\varphi = mg\cos\varphi \quad (1) \text{ και } w_n = w\sin\varphi = mg\sin\varphi \quad (2)$$

Θεωρούμε το *διάγραμμα ελευθέρου σώματος* για ένα τυχαίο σημείο στην επιφάνεια του κυλίνδρου, μετά την απομάκρυνση του σώματος από το Α (Σχήμα αριστερά). Η εξίσωση κίνησης, κατά την ακτινική κατεύθυνση, με βάση το 2^o νόμο του Newton διατυπώνεται ως εξής:

$$m\vec{\alpha}_n = \vec{w}_n + \vec{N} \quad (3)$$

όπου, $\vec{\alpha}_n$ η κεντρομόλος επιτάχυνση και $\vec{N}$ η δύναμη αντίδρασης της επιφάνειας. Η δύναμη αυτή αποτελεί τη *δράση* (ή *αντίδραση*) στην αλληλεπίδραση (επαφή) μεταξύ του σώματος και της επιφάνειας του κυλίνδρου, όπου η *αντίδραση* (ή *δράση*) είναι η ίση και αντίθετη $-\vec{N}$ που δε δείχνεται στο σχήμα. Η συνθήκη εγκατάλειψης της επιφάνειας του κυλίνδρου, προκύπτει όταν απαιτήσουμε το μηδενισμό της $\vec{N}$ σε κάποιο σημείο της κυκλικής καθοδικής πορείας του.

$$(3) \Rightarrow m\vec{\alpha}_n = \vec{w}_n \Rightarrow \frac{m\upsilon^2}{R}\left(-i_n\right) = mg\sin\varphi\left(-i_n\right) \Rightarrow \upsilon^2 = gR\sin\varphi \quad (4)$$

Αλλά, από το σχηματιζόμενο ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε, $\sin\varphi = \dfrac{R-h}{R}$, οπότε η (4) γίνεται, $\upsilon^2 = gR\dfrac{R-h}{R} \Rightarrow \upsilon^2 = g(R-h) \quad (5)$

Η ταχύτητα υ υπολογίζεται από τη σχέση διατήρησης της ολικής μηχανικής ενέργειας μεταξύ των σημείων Α και της θέσης σε διαφορά ύψους h (έστω το σημείο Β) :

$$E = \underbrace{K_A}_{=0} + U_A = K_B + U_B \Rightarrow K_B = U_A - U_B \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon^2 = mgh \Rightarrow \upsilon^2 = 2gh \quad (6)\,.$$

Από τις (5) και (6) παίρνουμε, $g(R-h) = 2gh \Rightarrow \boxed{h = \dfrac{R}{3}}$

β)

Επειδή δεν υπάρχει τριβή κατά την ολίσθηση του σώματος, η μόνη δύναμη που ασκείται στον κύλινδρο (*δράση* από το σώμα) είναι η συνιστώσα $\vec{w}_n$ η οποία όμως είναι «κεντρική», οπότε δεν μπορεί να αναπτύξει ροπή και να περιστρέψει τον κύλινδρο: $I\omega = \tau = 0 \Rightarrow \omega = 0$.

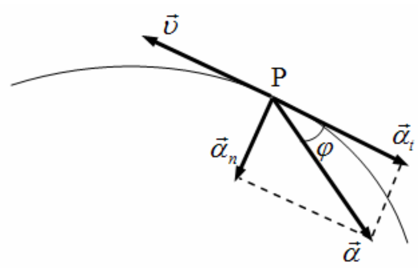
Άσκηση 2.12

Ένα αυτοκίνητο μάζας m κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_0 σε μια οριζόντια καμπή δρόμου, που είναι τόξο κύκλου ακτίνας R, ενώ ο οδηγός αρχίζει να ελαττώνει ταχύτητα προοδευτικά χωρίς να συμβαίνει ολίσθηση. Υποθέστε ότι κατά τη διάρκεια της διαδικασίας αυτής το διάνυσμα της συνισταμένης επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$, σχηματίζει σταθερή οξεία γωνία φ με τη διεύθυνση της ταχύτητας (που είναι εφαπτομένη στην τροχιά). α) Να υπολογιστεί η ταχύτητα ως συνάρτηση του χρόνου. β) Να υπολογιστεί το μέτρο της ολικής στατικής τριβής των τεσσάρων ελαστικών με το οδόστρωμα, f_s ,συναρτήσει του χρόνου.

γ) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της αρχικής ταχύτητας υ_0 ώστε να μην υπάρξει ολίσθηση μόλις αρχίζει η ελάττωση της ταχύτητας; Χρησιμοποιείστε ως εφαρμογή μόνο, τα δεδομένα: R=50 m, φ=30^o, μ_s=0,8.

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 19/2/2002

α)



Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος, το διάνυσμα της ταχύτητας και άρα της επιτρόχιας επιτάχυνσης, σχηματίζει γωνία φ με το διάνυσμα της ολικής επιτάχυνσης. Επομένως, στο τυχόν σημείο P έχουμε,

$$\alpha_t = \alpha\cos\varphi \text{ και } \alpha_n = \alpha\sin\varphi \Rightarrow \frac{\alpha_n}{\alpha_t} = \tan\varphi \Rightarrow$$

$\alpha_n = \alpha_t \tan\varphi$ (1) (σημειώνεται ότι τα $\vec{\alpha}_t$ και $\vec{\alpha}_n$ είναι κάθετα μεταξύ τους).

Ακολουθώντας τη μεθοδολογία της άσκησης 1.5, έχουμε:

$\dot{\upsilon} \equiv \dfrac{d\upsilon}{dt} < 0$ και σύμφωνα με την εκφώνηση του προβλήματος, θα πρέπει:

$$-\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{\alpha_n}{\tan\varphi} = \frac{\upsilon^2}{R\tan\varphi} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\upsilon^2} = -\frac{dt}{R\tan\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon'}{\upsilon'^2} = -\frac{1}{R\tan\varphi}\int_0^t dt' \Rightarrow -\left[\frac{1}{\upsilon'}\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon} = -\frac{t}{R\tan\varphi} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\upsilon} + \frac{1}{\upsilon_0} = -\frac{t}{R\tan\varphi} \Rightarrow \frac{1}{\upsilon} = \frac{1}{\upsilon_0} + \frac{t}{R\tan\varphi} \Rightarrow \frac{1}{\upsilon} = \frac{R\tan\varphi + \upsilon_0 t}{\upsilon_o R\tan\varphi} \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 \frac{R\tan\varphi}{R\tan\varphi + \upsilon_0 t} = \frac{\upsilon_0}{1 + \dfrac{\upsilon_0 t}{R\tan\varphi}}} \quad (2)$$

β)

Η στατική τριβή συγκρατεί το κάθε ελαστικό και άρα το αυτοκίνητο στην κυκλική τροχιά του όπου αναπτύσσεται ολική επιτάχυνση $\vec{\alpha}$. Σύμφωνα με το 2^o νόμο του Newton, αυτή συνδέεται με την επιτάχυνση ως εξής:

$$\vec{f}_s = m\vec{\alpha} = m(\vec{\alpha}_t + \vec{\alpha}_n) \Rightarrow f_s = m\sqrt{\alpha_t^2 + \alpha_n^2} = m\alpha_t\sqrt{1+\tan^2\varphi} \quad (3)$$

Όμως, $\alpha_t = \dot{\upsilon}$, ποσότητα που υπολογίζεται με παραγώγιση της

$$(2): \alpha_t = -\dot{\upsilon} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\upsilon_0}{1+\frac{\upsilon_0 t}{R\tan\varphi}}\right] = \frac{\frac{\upsilon_0^2}{R\tan\varphi}}{\left[1+\frac{\upsilon_0 t}{R\tan\varphi}\right]^2} = \frac{\upsilon_0^2}{R\tan\varphi\left[1+\frac{\upsilon_0 t}{R\tan\varphi}\right]^2}$$

$$f_s = \frac{m\upsilon_0^2\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{R\tan\varphi\left[1+\frac{\upsilon_0 t}{R\tan\varphi}\right]^2}$$

γ)

Η ελάττωση της ταχύτητας αρχίζει για $t=0$, οπότε:

$$f_s(0) = \frac{m\upsilon_0^2\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{R(1+\tan\varphi)} \quad (4)$$

Η ζητούμενη συνθήκη είναι: $f_s(0) = f_{s,m} = \mu_s mg \Rightarrow$

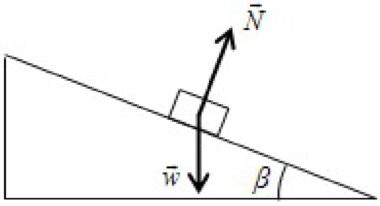
$$\frac{m\upsilon_0^2\sqrt{1+\tan^2\varphi}}{R\tan\varphi} \le \mu_s mg \Rightarrow \upsilon_0^2 \le \frac{\mu gR\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_0 \le \sqrt{\mu_s gR\sin\varphi}}$$

Η αριθμητική εφαρμογή δίνει:

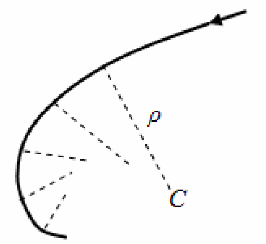
$$\boxed{\upsilon_0 \le \sqrt{\mu_s gR\sin\varphi} = \sqrt{0{,}8\times 50\times 9{,}8\times\frac{1}{\sqrt{2}}} = 14 \text{ m/s (ή 50,4 km/h)}}$$

Σημειώνεται ότι η παραπάνω έκφραση της μέγιστης ταχύτητας είναι μικρότερη κατά τον παράγοντα $\sqrt{\sin\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (ή 0,707) από την προκύπτουσα στην περίπτωση διατήρησης σταθερής ταχύτητας ($\upsilon_0 \le \sqrt{\mu_s gR}$).

Άσκηση 2.13



Κατά τη χάραξη της στροφής ενός δρόμου σε οριζόντιο επίπεδο δίνεται μια πλάγια κλίση γωνίας β ως προς το οριζόντιο επίπεδο (σχήμα με την τομή) με τέτοιο τρόπο, ώστε, σε δεδομένη σταθερή ταχύτητα των οχημάτων μέτρου υ_o να μην απαιτείται παντελώς η ύπαρξη της (στατικής) τριβής για την ασφαλή κίνηση τους κατά μήκος του κεντρικού άξονα της στροφής (κάτοψη).



α) Να αποδείξετε ότι για να επιτευχθεί αυτό, σε κάθε σημείο της στροφής η ποσότητα $\rho \tan\beta$ πρέπει να παραμένει σταθερή, όπου ρ η ακτίνα καμπυλότητας της καμπύλης σε τυχόν σημείο (εν γένει μεταβαλλόμενη κατά μήκος της καμπύλης).

β) Αν σε κάποιο τμήμα της στροφής αυτού του κεκλιμένου οδοστρώματος υπάρχει εκτεταμένο στρώμα πάγου, θα υπάρξει ολίσθηση σε όχημα που κινείται με ταχύτητα υ_o; Εξηγήστε με σαφήνεια, διακρίνοντας διάφορες περιπτώσεις. γ) Για ποια τιμή της ταχύτητας και του χρόνου t αυτά εξισώνονται;

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 4/2/2004

α)

Η κλίση του οδοστρώματος έχει ως αποτέλεσμα την ύπαρξη οριζόντιας συνιστώσας της αντίδρασης ($\vec{N}_x$) με κατεύθυνση προς το εσωτερικό της στροφής. Η συνιστώσα αυτή αναλαμβάνει ρόλο κεντρομόλου δύναμης, χωρίς την ανάγκη συνεισφοράς στατικής τριβής. Με βάση τα παραπάνω, έχουμε:

$N_x = N\sin\beta$ (1), επίσης, $N_y = N\cos\beta = mg$ (2), οπότε:

$$(1),(2) \Rightarrow N_x = \frac{mg\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{m\upsilon_0^2}{\rho} \Rightarrow \boxed{\rho\tan\beta = \frac{\upsilon_0^2}{g} = \sigma\tau\alpha\theta.} \quad (3)$$

β)

Αν υποθέσουμε την ύπαρξη πάγου στο οδόστρωμα, τότε ο αντίστοιχος συντελεστής στατικής τριβής ελαστικών-οδοστρώματος θα είναι αμελητέος. Επειδή η συνθήκη (3) ισχύει για τον άξονα χάραξης του δρόμου, μια διαφορετική πορεία του οχήματος με διαφορετική ακτίνα καμπυλότητας θα οδηγήσει σε ολίσθηση. Διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

Ι) Κίνηση στο εσωτερικό μέρος της στροφής: Θα είναι $\rho_{\varepsilon\sigma} < \rho$ και από την (3) προκύπτει ότι η N_x είναι ελλιπής ως κεντρομόλος, με αποτέλεσμα να υπάρξει ολίσθηση προς το εξωτερικό της στροφής.

ΙΙ) Κίνηση στο εξωτερικό μέρος: Θα είναι $\rho_{\varepsilon\xi} > \rho$ και από την (3) προκύπτει ότι η N_x είναι πλεονάζουσα ως κεντρομόλος, με αποτέλεσμα να υπάρξει ολίσθηση προς το εσωτερικό της στροφής.

Επέκταση-διερεύνηση στο ερώτημα (α)

Στην περίπτωση που η ταχύτητα υπερβεί την προβλεπόμενη (βάση του σχεδιασμού της κλίσης) υ_0, εμφανίζεται συνιστώσα στατικής τριβής, $f_s = \mu_s mg\cos\beta$, κατά το φορέα *x*. Τότε η εξίσωση (1) διαμορφώνεται ως εξής:

$$mg\mu_s\cos\beta + N\sin\beta = \frac{m\upsilon^2}{\rho} \quad (3\alpha)$$

Λόγω της (2), παίρνουμε:

$$mg\mu_s\cos\beta + \frac{mg\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{m\upsilon^2}{\rho} \Rightarrow g\mu_s\cos\beta + \tan\beta = \frac{\upsilon^2}{g\rho} \Rightarrow$$

$$\rho\tan\beta = \frac{\upsilon^2}{g} - \rho\mu_s\cos\beta \quad (4)$$

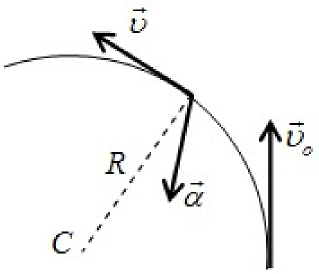
Αν αντικαταστήσουμε την ποσότητα, $\rho\tan\beta$ με το ίσο του $\frac{\upsilon_0^2}{g}$, δηλαδή την αναλλοίωτη ποσότητα για ιδανική κλίση του οδοστρώματος, παίρνουμε:

$\frac{\upsilon_0^2}{g} = \frac{\upsilon^2}{g} - \rho\mu_s\cos\beta \Rightarrow \rho\mu_s\cos\beta = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{g}$ και ο απαιτούμενος ελάχιστος συντελεστής στατικής τριβής είναι:

$\boxed{\mu_{s,\min} = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{g\rho\cos\beta}}$ ή $\mu_{s,\min} = \frac{\upsilon^2}{g\rho\cos\beta} - \mu_{s,h}\frac{1}{\cos\beta}$, όπου $\mu_{s,h}$ ο οριακός συντελεστής στατικής τριβής για οριζόντιο οδόστρωμα ($\beta = 0$) με την προβλεπόμενη ταχύτητα (υ_0).

Άσκηση 2.14

Ένα αυτοκίνητο, μάζας m, κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_o$ και στο χρόνο $t=0$ εισέρχεται σε μια κυκλική στροφή οριζόντιου δρόμου ακτίνας R (σχήμα).



Την ίδια στιγμή, ο οδηγός αφήνει το «γκάζι» και αποσυμπλέκει τον κινητήρα, οπότε το αυτοκίνητο επιβραδύνεται λόγω της δύναμης αντίστασης του αέρα και μόνο (αγνοούμε άλλες τριβές), η οποία θεωρείται ότι υπακούει στη σχέση $F=-c\upsilon^2$, όπου υ το μέτρο της ταχύτητας και c θετική σταθερά.

α) Να βρείτε το μέτρο της (ολικής) επιτάχυνσης $\vec{\alpha}$ ως συνάρτηση της ταχύτητας υ θεωρώντας το αυτοκίνητο ως σώμα αμελητέων διαστάσεων σε σχέση με την ακτίνα καμπυλότητας R.

β) Να συγκρίνετε το μέτρο της $\vec{\alpha}$ για το χρόνο $t=0$ (μέγιστη τιμή) με εκείνο που προκύπτει αν ο οδηγός θελήσει να συνεχίσει με σταθερό μέτρο υ_0 κατά την είσοδο στη στροφή.

γ) Για ποια τιμή της ταχύτητας και του χρόνου t αυτά εξισώνονται;

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 27/8/2003

α)

Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Newton:

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=F=-c\upsilon^2\Rightarrow\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{c}{m}\upsilon^2\Rightarrow\vec{\alpha}_t=\frac{c}{m}\upsilon^2\left(-\hat{i}_t\right)\Rightarrow\alpha_t=\frac{c}{m}\upsilon^2 \quad (1)$$

Επίσης η κεντρομόλος επιτάχυνση είναι:

$$\vec{\alpha}=\frac{\upsilon^2}{\rho}\hat{i}_n=\frac{\upsilon^2}{R}\hat{i}_n\Rightarrow a_n=\frac{\upsilon^2}{R} \quad (2)$$

Οπότε:

$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{m}\upsilon^2\right)^2+\left(\frac{\upsilon^2}{R}\right)^2}=\upsilon^2\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2+\frac{1}{R^2}} \quad (3)$$

β)

Για $t=0$ έχουμε:

$$a\left(t=0\right)=\upsilon_0^2\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2+\frac{1}{R^2}}=\frac{\upsilon_0^2}{R}\sqrt{1+\left(\frac{cR}{m}\right)^2}\equiv a_1$$

Αν ο οδηγός διατηρήσει την ταχύτητά του $\upsilon=\upsilon_0=$ σταθ. τότε $\alpha_t=0$ και

$$a_n=\frac{\upsilon_0^2}{R}\equiv a_2$$

Επομένως:

$$\frac{a_1}{a_2}=\sqrt{1+\left(\frac{cR}{m}\right)^2}>1\Rightarrow\boxed{a_1>a_2}$$

γ)

Τα μέτρα εξισώνονται όταν :

$$\frac{\upsilon^2}{R}\sqrt{1+\left(\frac{cR}{m}\right)^2}=\frac{\upsilon_0^2}{R}\Rightarrow \upsilon=\frac{\upsilon_0}{\left[1+\left(\frac{cR}{m}\right)^2\right]^{1/4}}$$

$$m\frac{d\upsilon}{dt}=-c\upsilon^2\Rightarrow\frac{d\upsilon}{d\upsilon^2}=-\frac{c}{m}dt\Rightarrow\int_{\upsilon_0}^{\upsilon}\frac{d\upsilon'}{\upsilon'^2}=-\frac{c}{m}\int_0^t dt'\Rightarrow\left[-\frac{1}{\upsilon'}\right]_{\upsilon_0}^{\upsilon}=-\frac{ct}{m}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\upsilon}-\frac{1}{\upsilon_0}=\frac{ct}{m}\Rightarrow\frac{1}{\upsilon}=\frac{1}{\upsilon_0}+\frac{ct}{m}\Rightarrow\upsilon=\frac{1}{\frac{1}{\upsilon_0}+\frac{ct}{m}}=\frac{m\upsilon_0}{m+c\upsilon_0 t}\Rightarrow\upsilon=\frac{\upsilon_0}{1+\frac{c\upsilon_0}{m}t}$$

0 χρόνος εξίσωσης των α_1 και α_2 βρίσκεται ως εξής:

$$u(t_\varepsilon)=\frac{\upsilon_0}{\left[1+\left(\frac{cR}{m}\right)^2\right]^{1/4}}=\frac{\upsilon_0}{1+\frac{c\upsilon_0}{m}t_\varepsilon}\Rightarrow$$

$$\left[1+\left(\frac{cR}{m}\right)^2\right]^{1/4}=1+\frac{c\upsilon_0}{m}t_\varepsilon\Rightarrow t_\varepsilon=\frac{\left[1+\left(\frac{cR}{m}\right)^2\right]^{1/4}-1}{\frac{c\upsilon_0}{m}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_\varepsilon=\frac{m}{c\upsilon_0}\left\{\left[1+\left(\frac{cR}{m}\right)^2\right]^{1/4}_{-1}\right\}$$

<u>β΄ τρόπος στο ερώτημα (α)</u>

$$I a_\omega=\tau=FR=-c\upsilon^2R\Rightarrow mR^2a_\omega=-c\upsilon^2R\Rightarrow a_\omega=-\frac{c\upsilon^2}{R}\quad(4)$$

όπου $I=mR^2$.

Αλλά $\upsilon=\omega R\Rightarrow a_\omega=\frac{1}{R}\frac{d\upsilon}{dt}$ (5)

$(4),(5)\Rightarrow\frac{1}{R}\frac{d\upsilon}{dt}=-\frac{c\upsilon^2}{R}\Rightarrow\frac{d\upsilon}{\upsilon^2}=-\frac{c}{m}dt$, η οποία ολοκληρώνεται όπως παραπάνω στο ερώτημα (γ) και προκύπτει η συνάρτηση του μέτρου της ταχύτητας που οδηγεί στον υπολογισμό της επιτάχυνσης.

Άσκηση 2.15

Αυτοκίνητο τη χρονική στιγμή $t=0$ κινείται με ταχύτητα υ_0 σε οριζόντια πλατεία πλησιάζοντας κάθετα προς ένα μακρύ τοίχο. α) Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση $d_{\min}$ από τον τοίχο έτσι ώστε, αν ο οδηγός εκείνη τη στιγμή φρενάρει με τρόπο που να αποφευχθεί οριακά η ολίσθηση των τροχών, τότε μόλις που να αποφύγει τη σύγκρουση (τελική ταχύτητα ίση με μηδέν στη θέση του τοίχου). β) Ποια θα είναι η ελάχιστη απόσταση αν ο οδηγός, αντί να φρενάρει, αποφασίσει να στρίψει έτσι ώστε να διαγράψει ένα τεταρτημόριο κύκλου εφαπτόμενο στον τοίχο; Τι προκύπτει από τη σύγκριση; Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ τροχών και εδάφους θεωρείται γνωστός και ίσος με μ_s. Αφού επιλύσετε το πρόβλημα γενικά, δώστε αριθμητικό αποτέλεσμα με δεδομένα: $\upsilon_0 = 72$ km/h (=20 m/s) και $\upsilon_0 = 144$ km/h, θεωρώντας ότι $\mu_s = 0{,}82$.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 9/9/2005

α)

Επειδή αποφεύγεται οριακά η ολίσθηση, η δύναμη επιβράδυνσης θα προέρχεται από τη μέγιστη στατική τριβή των τροχών στο σημείο επαφής τους με το οδόστρωμα, δηλαδή: $F = f_{s,\max} =$, οπότε από το 2^{o} νόμο του Newton κατά το φορέα κίνησης έχουμε:

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = -\mu_s mg \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\mu_s g \quad (1)$$

Όμως, $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dx}\cdot\upsilon$ (2), οπότε από (1), (2) $\Rightarrow$

$$\upsilon d\upsilon = -\mu_s g \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon' d\upsilon' = -\mu_s g\int_0^{d_{\min}} dx \Rightarrow -\frac{\upsilon_0^2}{2} = -\mu_s g d_{\min} \Rightarrow$$

$\boxed{d_{\min} = \dfrac{\upsilon_0^2}{2\mu_s g}}$ Με τα δεδομένα προκύπτει: $d_{\min} = \dfrac{20^2}{2\times 0{,}82\times 9{,}8} = 25$ m

β)

Αν ο οδηγός στρίψει σε τεταρτημόριο ακτίνας R, τότε για να ακολουθήσει το αυτοκίνητο την πορεία αυτή, δε θα υπάρξει και πάλι ολίσθηση, που σημαίνει ότι η στατική τριβή θα αποτελέσει την κεντρομόλο δύναμη:

$$f_{s,\max} = -\mu_s mg \le -\frac{m\upsilon^2}{R} \Rightarrow \mu_s g \le \frac{\upsilon^2}{R} \Rightarrow R \ge \frac{\upsilon^2}{\mu_s g} \text{ και άρα: } \boxed{d'_{\min} = \frac{\upsilon^2}{\mu_s g}}$$

Συγκρίνοντας το τελευταίο αποτέλεσμα με αυτό του ερωτήματος (α), παρατηρούμε ότι είναι μεγαλύτερο κατά ένα συντελεστή 2 και κατά συνέπεια, ο οδηγός είναι προτιμότερο να φρενάρει παρά να στρίψει!

Άσκηση 2.16

Ένα σωματίδιο μάζας m βάλλεται κατά μήκος οριζόντιας επιφάνειας με αρχική ταχύτητα μέτρου υ_0. Κατά την κίνησή του στο σωματίδιο ασκείται δύναμη αντίστασης μέτρου $k\upsilon^2 + k\lambda\upsilon$, όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του σε τυχούσα χρονική στιγμή και k, λ θετικές σταθερές. Να αποδείξετε ότι η απόσταση, x, που διανύει το σωματίδιο μέχρι να βρεθεί σε ηρεμία δίνεται από τη σχέση: $x = \dfrac{m}{k}\ln\left(\dfrac{\upsilon_0 + \lambda}{\lambda}\right)$.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 15/2/2008

Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Newton έχουμε:

$$ma = F \Rightarrow ma = -k\upsilon^2 - k\lambda\upsilon \quad (1)$$

Όμως, $a = \dfrac{d\upsilon}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\upsilon}{dx}\cdot\upsilon \quad (2)$

Από (1) και (2) $\Rightarrow m\upsilon\dfrac{d\upsilon}{dx} = k\upsilon^2 + k\lambda\upsilon \Rightarrow m\dfrac{d\upsilon}{dx} = -k\upsilon - k\lambda \Rightarrow$

$$\frac{d(\upsilon+\lambda)}{dx} = -\frac{k}{m}(\upsilon+\lambda) \Rightarrow \frac{d(\upsilon+\lambda)}{(\upsilon+\lambda)} = -\frac{kdx}{m} \Rightarrow \int_{\upsilon_0+\lambda}^{\lambda}\frac{d(\upsilon+\lambda)}{(\upsilon+\lambda)} = -\frac{k}{m}\int_0^s dx \Rightarrow$$

$$\left[\ln(\upsilon+\lambda)\right]_{\upsilon_0+\lambda}^{\lambda} = \ln\lambda - \ln\left(\upsilon_0+\lambda\right) = \ln\frac{\lambda}{\upsilon_0+\lambda} = -\frac{kx}{m} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{m}{k}\ln\left(\frac{\upsilon_0+\lambda}{\lambda}\right)}$$

Άσκηση 2.17

Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου έχει την ακόλουθη εξάρτηση από το χρόνο (παραμετρική μορφή): $\vec{r} = \alpha t^2 \hat{x} + bt^3 \hat{y}$ όπου α και b σταθερές. Να βρεθούν: α) η εξίσωση της τροχιάς $y = f(x)$, β) η ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, η επιτάχυνση $\vec{\alpha}$ καθώς και η δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σωματίδιο (ως διανύσματα), **γ)** το μέτρο της επιτρόχιας και κεντρομόλου επιτάχυνσης καθώς και η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του σωματιδίου.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 15/2/2008

α)

Τα μέτρα των συνιστωσών του στους άξονες x και y δίνονται σε συνάρτηση με το χρόνο από τις σχέσεις: $x = \alpha t^2$ και $y = bt^3$

Με απαλοιφή του χρόνου t προκύπτει η εξίσωση της τροχιάς $y = f(x)$:

Από την πρώτη: $t = \sqrt{\dfrac{x}{a}} = \left(\dfrac{x}{a}\right)^{1/2}$

Αντικαθιστώντας στη δεύτερη: $y = b \cdot \left(\left(\dfrac{x}{a}\right)^{1/2}\right)^3 = y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{3/2}$

Επομένως, $\boxed{y = b\left(\dfrac{x}{a}\right)^{3/2}}$

β)

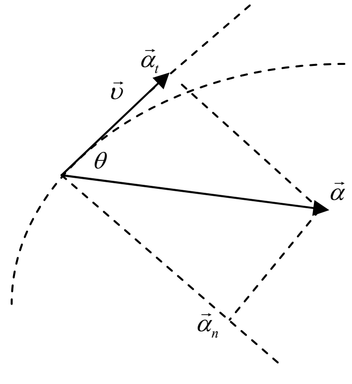
$$\vec{\upsilon} = \frac{dx}{dt}\hat{x} + \frac{dy}{dt}\hat{y} = 2\alpha t\hat{x} + 3bt^2\hat{y} = \left(2\alpha t, 3bt^2\right)$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_x}{dt}\hat{x} + \frac{d\upsilon_y}{dt}\hat{y} = 2\alpha\hat{x} + 6bt\hat{y} = \left(2\alpha, 6bt\right)$$

$$\vec{F} = m\vec{\alpha} = 2\alpha m\hat{x} + 6bmt\hat{y} = \left(2\alpha m, 6bmt\right)$$

$$\upsilon = \left|\vec{\upsilon}\right| = \sqrt{(2\alpha t)^2 + (3bt^2)^2}$$

γ)



Από το σχήμα ανάλυσης της επιτάχυνσης σε επιτρόχια και κεντρομόλο συνιστώσα έχουμε:

$$\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}=\upsilon\alpha\cos\theta=\upsilon\alpha\frac{\alpha_t}{\alpha}=\upsilon a_t\ .$$

Άρα $a_t=\dfrac{\vec{\upsilon}\cdot\vec{\alpha}}{\upsilon}=\dfrac{\upsilon_x\alpha_x+\upsilon_y\alpha_y}{\upsilon}=\dfrac{2\alpha t.2\alpha+3bt^2.6bt}{\sqrt{4\alpha^2t^2+9b^2t^4}}$

Επομένως, το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης είναι: $\boxed{a_t=\dfrac{4\alpha^2t+18b^2t^3}{\sqrt{4a^2t^2+9b^2t^4}}}$

$\left|\vec{\upsilon}\times\vec{\alpha}\right|=\upsilon a\sin\theta=\upsilon\alpha\dfrac{a_n}{a}=\upsilon a_n$. Άρα

$$a_n=\frac{\left|\vec{\upsilon}\times\vec{\alpha}\right|}{\upsilon}=\frac{\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\ \upsilon_x&\upsilon_y&\upsilon_z\\ a_x&a_y&a_z\end{vmatrix}}{\upsilon}=\frac{\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\ 2\alpha t&3bt^2&0\\ 2\alpha&6bt&0\end{vmatrix}}{\upsilon}=\frac{(12\alpha bt^2-6abt^2)}{\upsilon}=\frac{6\alpha bt^2}{\sqrt{(2\alpha t)^2+(3bt^2)^2}}$$

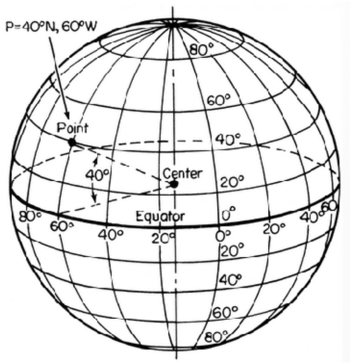
και το μέτρο της κεντρομόλου επιτάχυνσης είναι: $\boxed{a_n=\dfrac{6\alpha bt^2}{\sqrt{(2\alpha t)^2+(3bt^2)^2}}}$

Αφού $\alpha_n=\dfrac{\upsilon^2}{\rho}$, η ακτίνα καμπυλότητας ρ δίνεται από τη σχέση:

$$\rho=\frac{\upsilon^2}{a_n}=\frac{(2\alpha t)^2+(3bt^2)^2}{\dfrac{6\alpha bt^2}{\sqrt{(2\alpha t)^2+(3bt^2)^2}}}=\frac{\left[(2\alpha t)^2+(3bt^2)^2\right]^{3/2}}{6\alpha bt^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{\rho=\frac{\left[(2\alpha t)^2+(3bt^2)^2\right]^{3/2}}{6\alpha bt^2}}$$

Άσκηση 2.18



Αν η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης ήταν $\omega = k\omega_0$, όπου $\omega_0 = 7,3\times10^{-5}$ rad/s είναι η πραγματική τιμή της γωνιακής ταχύτητας και k θετική αδιάστατη σταθερά:

α) Να βρείτε το βάρος (αυτό που θα προέκυπτε πειραματικά-με ζύγιση) ενός σώματος μάζας m που θα βρισκόταν στην επιφάνεια της στον Ισημερινό συναρτήσει του k. Ποιο θα ήταν το βάρος του σώματος στο γεωγραφικό πλάτος της Αθήνας (37° 58’ 27’’);

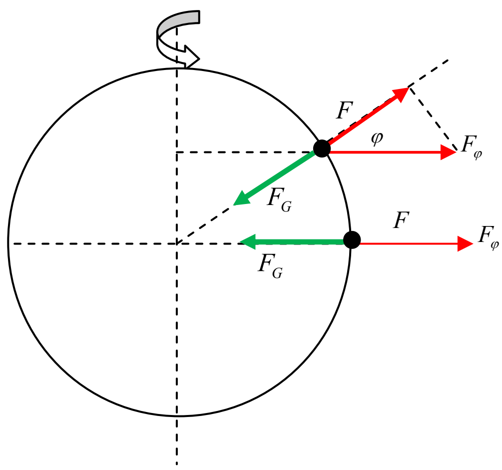
β) Για ποια τιμή του k θα μηδενιζόταν το βάρος οποιουδήποτε σώματος στον Ισημερινό; Ποια θα ήταν τότε η διάρκεια μιας ημέρας στη Γη;

Το φαινόμενο που ζητείται να μελετηθεί οφείλεται στον αδρανειακό χαρακτήρα του συστήματος αναφοράς στην επιφάνεια της Γης. Ως ακτίνα της Γης να ληφθεί η μέση ακτίνα που είναι $R = 6371\times10^3$ m.

Σημείωση: Δείτε τα βασικά χαρακτηριστικά του πλανήτη Γη στην ιστοσελίδα http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%93%CE%B7

Το βάρος ενός σώματος σε κάθε τόπο είναι ίσο με $F_w = mg = \dfrac{mGM_\Gamma}{R^2}$.

Στο περιστρεφόμενο (μη αδρανειακό) σύστημα αναφοράς της επιφάνειας της Γης το μετρούμενο βάρος στο ζυγό θα είναι: $\vec{F} = \vec{F}_w + \vec{F}_\varphi$, όπου F_φ η φυγόκεντρος δύναμη.



α)

Η ανωτέρω διανυσματική εξίσωση στη περίπτωση που το σώμα βρίσκεται στον ισημερινό μετατρέπεται στην αλγεβρική εξίσωση:

$$F = F_w - mk^2\omega_0^2 R = \frac{mGM_\Gamma}{R^2} - mk^2\omega_0^2 R .$$

$$g = \frac{GM}{R^2} = 6.673\times10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot\frac{5,9736\times10^{24}\,\mathrm{kg}}{6371\times10^3\,\mathrm{m}^2} = 9,82\,\frac{\mathrm{m}}{s^2}$$

Η κεντρομόλος επιτάχυνση της επιφάνειας της Γης είναι:

$$\omega_0^2 \cdot R = (7,3\times10^{-5})^2 \times 6371\times10^3 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 0,034\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Επομένως, $\boxed{F = m(g - k^2\omega_0{}^2 R) = m(9,82 - 0,034k^2)}$

Στο γεωγραφικό πλάτος της Αθήνας φ=37° 58’ 27’’ = 37,97417° = 0,66277 rad, όπως φαίνεται από το σχήμα η (1) οδηγεί στην αλγεβρική εξίσωση :

$$F = F_w - F_\varphi \cos\varphi = F_w - m\omega^2 r\cos\varphi = mg - m\omega^2\left(R\cos\varphi\right)\cos\varphi = m(g - \omega^2 R\cos^2\varphi)$$

$$F = m(g - k^2 0,034\times0,62) = m(g - k^2 0,02)$$

β)

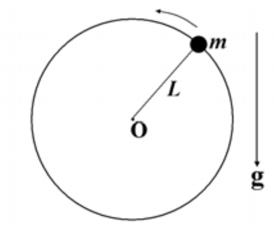
$$F = 0 \Rightarrow 9,82 - 0,034k^2 = 0 \Rightarrow k = \sqrt{\frac{9,82}{0,034}} \Rightarrow k = 17$$

Η διάρκεια μιας μέρας στη Γη θα ήταν τότε:

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\kappa\omega_0} = \frac{6,28}{17\cdot7,3\cdot10^{-5}}\,\mathrm{s} = 5060,436\ \mathrm{s} = 0,0586\ \mathrm{d}$$

Δηλαδή, περίπου 1,4 ώρες.

Άσκηση 2.19



Ένα μπαλάκι του τένις μάζας m περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από ένα σταθερό σημείο Ο μέσω ενός αβαρούς σχοινιού μήκους L, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Όταν το μπαλάκι βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του η τάση του σχοινιού είναι $T = 2mg$. Θεωρήστε ότι δεν υπάρχουν τριβές στο πρόβλημα αυτό.

α) Να βρείτε την ταχύτητα που έχει το μπαλάκι όταν βρίσκεται στο υψηλότερο σημείο της τροχιάς του.

β) Να βρείτε την ταχύτητα που έχει το μπαλάκι όταν βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του.

γ) Να βρείτε την τάση του σχοινιού όταν το μπαλάκι βρίσκεται στο χαμηλότερο σημείο της τροχιάς του.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 3/9/2012

α)

Έστω υ_a η ταχύτητα του σώματος στο υψηλότερο σημείο. Εφαρμόζουμε το 2^o Νόμο του Νεύτωνα με συνισταμένη δύναμη στο μπαλάκι το άθροισμα της δύναμης T της τάσης του σχοινιού καθώς και της δύναμης της βαρύτητας $T + W$ (η επιτάχυνση έχει την ίδια φορά με την τάση).

$$\frac{m\upsilon_a^2}{L} = T + W \Rightarrow \upsilon_a^2 = \frac{L}{m}\left(T + W\right) \Rightarrow$$

$$\upsilon_a = \sqrt{\frac{L}{m}\left(T + W\right)} = \sqrt{\frac{L}{m}\left(2mg + mg\right)} = \sqrt{\frac{3mgL}{m}} = \sqrt{3gL}$$

β)

Έστω υ_k η ταχύτητα του σώματος στο χαμηλότερο σημείο. Έχουμε διατήρηση της μηχανικής ενέργειας από το κατώτερο σημείο στο ανώτερο λόγω του γεγονότος ότι η δύναμη της βαρύτητας είναι διατηρητική δύναμη. Επομένως:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_\kappa^2 + 0 = \frac{1}{2}m\left(3gL\right) + 2Lmg \Rightarrow \upsilon_\kappa^2 = 3gL + 4Lg = 7gL \Rightarrow$$

$$\upsilon_\kappa = \sqrt{7gL}$$

Σημειώνεται η τάση του νήματος δεν παράγει έργο διότι είναι πάντα κάθετη σε κάθε απειροστή μετατόπιση επί της τροχιάς του σώματος.

γ)

Εδώ η επιτάχυνση έχει και πάλι την ίδια φορά με την τάση, οπότε η δύναμη της βαρύτητας αφαιρείται.

$$\frac{m\upsilon_k^2}{L} = T - W \Rightarrow T = \frac{m\upsilon^2}{L} + W = \frac{m\left(7gL\right)}{L} + mg = 8mg$$

Άσκηση 2.20

Η απομάκρυνση ενός απλού (μονοδιάστατου) αρμονικού ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας δίνεται από την σχέση $x = A\sin\omega t$, όπου A και ω σταθερές. Αν οι στιγμιαίες τιμές της απομάκρυνσης x και της ταχύτητας $y=\dot{x}$ καταγραφούν σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων (φασικός χώρος), να δείξετε ότι:

α) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x , $\dot{x}$) είναι έλλειψη.

β) Το εμβαδόν της επιφάνειας της έλλειψης είναι σταθερό, η δε ενέργεια E του αρμονικού ταλαντωτή είναι ανάλογη αυτού του εμβαδού.

<u>Υπόδειξη</u>: Στο ερώτημα (α) ουσιαστικά ζητείται η εύρεση της τροχιάς $f(x,y)=0$ στο λεγόμενο φασικό χώρο (x , $\dot{x}$), όπου $\dot{x} \equiv \dfrac{dx}{dt}$. Η εξίσωση της έλλειψης είναι $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Η ενέργεια του απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι $E=\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2$.

α)

$$x = A\sin\omega t \Rightarrow \frac{x}{A} = \sin\omega t \quad (1)$$

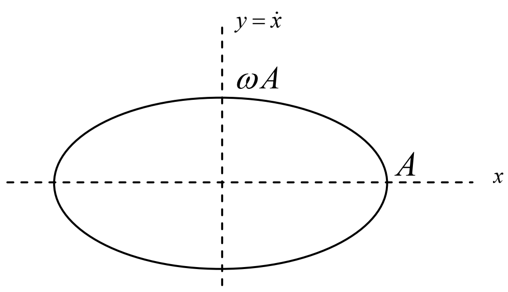
$$y = \frac{dx}{dt} = \omega A\cos\omega \mathrm{t} \Rightarrow \frac{y}{\omega A} = \cos\omega \mathrm{t} \quad (2)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη την (1) με την (2) έχουμε:

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{\omega A}\right)^2 = \sin^2\omega t + \cos^2\omega \mathrm{t}=1$$

ή $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{\omega^2A^2} = 1$

Άρα ο γ. τ. των σημείων (x , $\dot{x}$) είναι έλλειψη με μεγάλο ημιάξονα A και μικρό ωA.



β)

Το εμβαδόν της έλλειψης είναι $S = \pi \alpha b = \pi A \omega A = \pi \omega A^2 =$ σταθ.

Η ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} m\omega \cdot \omega A^2 = \frac{1}{2} m\omega \frac{S}{\pi}$$

Άρα, $E = \dfrac{m\omega}{2\pi} \cdot S$

Δηλαδή η ενέργεια είναι ανάλογη του εμβαδού S της έλλειψης.

3. Έργο – Ενέργεια – Διατηρητικά πεδία

Θεωρητικά στοιχεία και μεθοδολογία

Το πεδίο ορίζεται ως ο χώρος στον οποίο ένα μέγεθος, βαθμωτό ή διανυσματικό μπορεί εν γένει να μεταβάλλεται. Έτσι, έχουμε αντίστοιχα είτε ένα βαθμωτό πεδίο (π.χ. θερμοκρασίας, πυκνότητας), είτε ένα διανυσματικό πεδίο (π.χ. δυνάμεων, ταχυτήτων). Στο κεφάλαιο αυτό αναφερόμαστε σε διανυσματικά πεδία δυνάμεων. Στα πεδία αυτά, ορίζεται η λεγόμενη *δυναμική ενέργεια* η οποία εκφράζει την ενέργεια ενός σωματιδίου λόγω της θέσης του στο χώρο του πεδίου. Η δυναμική ενέργεια, U, μπορεί να οριστεί μόνο στην περίπτωση που το πεδίο είναι όπως λέμε *διατηρητικό* και εκφράζει το έργο της δύναμης του πεδίου για την μετακίνησή του από ένα σημείο (αναφοράς) σε ένα οποιοδήποτε άλλο. Το έργο αυτό, για διατηρητικά πεδία θα είναι πάντοτε το ίδιο, δηλαδή η δυναμική ενέργεια ορίζεται μονοσήμαντα. Στην περίπτωση αυτή, αν ένα σωματίδιο μετακινηθεί μέσω μιας οποιασδήποτε διαδρομής από ένα σημείο του πεδίου και επιστρέψει πάλι στο ίδιο σημείο από τη δράση της δύναμης του πεδίου, το συνολικό έργο της είναι μηδέν. Ένα χρήσιμο κριτήριο για το αν ένα πεδίο είναι διατηρητικό είναι ο στροβιλισμός της δύναμης, $\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{F}$. Ανα ο στροβιλισμός είναι μηδέν τότε το πεδίο είναι διατηρητικό (αστρόβιλο). Αυτό το συμπερασμα προκύπτει από το περίφημο θεώρημα του Stokes. Για κάθε μετακίνηση ενός σώματος μέσα στο πεδίο η ολική (μηχανική) ενέργεια του διατηρείται, $E = K + U =$ σταθ. Ένα πεδίο δυνάμεων οι οποίες χαρακτηρίζονται κεντρικές (*πεδίο κεντρικών δυνάμεων*), είναι διατηρητικό πεδίο, όπως αποδεικνύεται εύκολα. Η μορφή μιας κεντρικής δύναμης είναι, $\vec{F} = \pm f(r)\hat{r}$, όπου $f(r)$ είναι μια οποιαδήποτε, θετικά ορισμένη, συνάρτηση του μέτρου του διανύσματος θέσης [4,7,8,9].

Γνωρίζοντας τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας, μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη του πεδίου μέσω του διανυσματικού τελεστή της *κλίσης*, δηλαδή, $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$. Σε μονοδιάστατα προβλήματα, η συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας είναι της μορφής $U(x)$ και η δύναμη βρίσκεται από την απλή σχέση, $\vec{F} = -dU(x)/dx$. Τα προβλήματα αυτά είναι χρήσιμα διότι έχει κανείς μια σαφή ποιοτική εικόνα του φαινομένου αναφερόμενος μόνο σε μια συνιστώσα-διάσταση, αν και αυτό δεν αποτελεί γενικό κανόνα. Από τα διαγράμματα δυναμικής ενέργειας μπορεί κανείς να επισημάνει και να προσδιορίσει ποιοτικά χαρακτηριστικά και μεγέθη. Για παράδειγμα, το σημείο ευσταθούς ισορροπίας του σωματιδίου βρίσκεται στο σημείο όπου η κλίση της καμπύλης $U(x)$ είναι μηδενική (μηδενική κλίση της εφαπτομένης) και το σημείο αυτό είναι τοπικό ελάχιστο. Σημεία μηδενικής κλίσης μπορεί να είναι περισσότερα από ένα και θεωρούνται σημεία *ευσταθούς ισορροπίας* αν είναι τοπικά ελάχιστα ή σημεία *ασταθούς ισορροπίας* αν είναι τοπικά μέγιστα. Επίσης, μπορούμε να προσδιορίσουμε την *επιτρεπόμενη* περιοχή κίνησης του σωματιδίου και κατά συνέπεια την *απαγορευμένη*. Το κριτήριο προσδιορισμού είναι η συνθήκη που βασίζεται στην κινητική ενέργεια που οφείλει να είναι πάντοτε μη αρνητική και επομένως το ίδιο θα συμβαίνει και με το μέτρο της ταχύτητας, δηλαδή, $\upsilon = \sqrt{\dfrac{2\left[E - U(x)\right]}{m}} \geq 0$.

Άσκηση 3.1

Ένας κινούμενος ιμάντας χρησιμοποιείται για να μεταφέρει άμμο από ένα σημείο σε ένα άλλο. Η άμμος πέφτει χωρίς αρχική ταχύτητα από ένα χωνί στον ιμάντα, ο οποίος κινείται οριζόντια με σταθερή ταχύτητα υ_0. Αμελώντας τις τριβές, καθώς και οτιδήποτε συμβαίνει στο άλλο άκρο του ιμάντα, να υπολογίσετε την ισχύ που απαιτείται για να συντηρηθεί η κίνηση του ιμάντα. Η ισχύς να υπολογιστεί ως συνάρτηση της ταχύτητας υ_0 του ιμάντα και της μάζας της άμμου που πέφτει στον ιμάντα ανά μονάδα χρόνου (ρυθμού πτώσης μάζας $\lambda = dm/dt$). Ποιο ποσοστό της ισχύος μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των κόκκων της άμμου; (Για την άμμο που πέφτει, η ενέργεια της βαρύτητας αμελείται).

Η εναπόθεση της άμμου στον ιμάντα συνεπάγεται μεταβολή της ορμής κάθε απειροστής ποσότητας μάζας dm από 0 σε $dm \cdot \upsilon_0 = dP$ σε χρόνο dt .

Με βάση το 2^{o} νόμο του Newton, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη δύναμη που προκαλεί αυτή τη μεταβολή. Κατά το φορέα κίνησης του ιμάντα (κατεύθυνση $\vec{\upsilon}_0$) έχουμε:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\upsilon_0\right) = \frac{dm}{dt}\upsilon_0 = F \quad (1)$$

Η απαιτούμενη ισχύς του ιμάντα, P , υπολογίζεται από τη σχέση:

$$P = F\upsilon_0 \overset{(1)}{=} \frac{dm}{dt}\upsilon_0\upsilon_0 = \frac{dm}{dt}\upsilon_0^2 = \lambda\upsilon_0^2 \text{, οπότε: } \boxed{P = \lambda\upsilon_0^2} \quad (2)$$

Ο ρυθμός παραγωγής κινητικής ενέργειας στους κόκκους της άμμου είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\upsilon_0^2\right) = \frac{1}{2}\frac{dm}{dt}\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\lambda\upsilon_0^2$$ και σύμφωνα με την εξίσωση (2):

$$\boxed{\frac{dK}{dt} = \frac{P}{2}} \text{ ή } \boxed{\Delta K == \frac{1}{2}Pt}$$

Δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής (παραγωγής) κινητικής ενέργειας των κόκκων της άμμου ισούται με το μισό της ισχύος που απαιτείται (δηλαδή του ρυθμού παραγωγής έργου). Η σχέση αυτή δεν εξαρτάται από το ρυθμό μεταφοράς μάζας στον ιμάντα (λ). Είναι ενδιαφέρον να διερευνήσει κανείς το αποτέλεσμα αυτό. Γνωρίζουμε, από το *θεώρημα έργου-ενέργειας*, ότι όταν μια δύναμη ασκείται σε ένα σώμα, παράγει έργο που με τη σειρά του μεταβάλλει την κινητική ενέργεια του σώματος, δηλαδή $dW = dK \Rightarrow \frac{dW}{dt} = P = \frac{dK}{dt}$.
Όμως στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η ισχύς του ιμάντα μεταβάλλει την κινητική ενέργεια όλο και περισσότερων κόκκων άμμου, δηλαδή την κινητική ενέργεια συνεχώς αυξανόμενης μάζας, άρα και απαίτηση μεγαλύτερης ισχύος.

Άσκηση 3.2

Ένα σωματίδιο κινείται σε μονοδιάστατο πεδίο δυνάμεων με συνάρτηση δυναμικής ενέργειας $U(x) = \alpha x^2 / 2 - bx^4 / 4$, όπου α και b είναι θετικές σταθερές. Να προσδιορίσετε τα σημεία ισορροπίας του σωματιδίου και να δείξετε ποια από αυτά είναι σημεία *ευσταθούς* και ποια *ασταθούς* ισορροπίας.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ (ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ) - 10/12/2003

Τα σημεία ισορροπίας βρίσκονται από τη συνθήκη μηδενισμού της δύναμης του πεδίου, δηλαδή:

$$F = -\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{dU}{dx} = bx^3 - \alpha x = 0 \Rightarrow x\left(bx^2 - \alpha\right) = 0 \Rightarrow \text{ ή } x = x_1 = 0 \text{ ή } bx^2 - \alpha = 0 \Rightarrow$$

$x = x_2 = -\sqrt{\alpha / b}$ και $x = x_3 = \sqrt{\alpha / b}$. Συνεπώς, τα σημεία ισορροπίας είναι:

$x_1 = 0,\ x_2 = -\sqrt{\alpha / b}, x_3 = \sqrt{\alpha / b}$

Για να βρούμε ποια από αυτά είναι σημεία *ευσταθούς* και ποια *ασταθούς* ισορροπίας, θα πρέπει να υπολογίσουμε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας ως προς το διάστημα:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dU}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-bx^3 + \alpha x\right) = -3bx^2 + a \quad (1)$$

Ελέγχουμε την τιμή της έκφρασης (1) για τις διάφορες θέσεις και έχουμε:

$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_1} = -3bx_1^2 + a = \alpha > 0 \Rightarrow$ επομένως έχουμε ελάχιστο και άρα ευσταθή ισορροπία.

$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_2} = -3b\left(-\sqrt{\frac{\alpha}{b}}\right)^2 + a = -2\alpha < 0$ => επομένως έχουμε μέγιστο και άρα ασταθή ισορροπία.

$\left.\frac{d^2U}{dx^2}\right|_{x=x_3} = -3b\left(\sqrt{\frac{\alpha}{b}}\right)^2 + a = -2\alpha < 0$ => επομένως έχουμε και πάλι μέγιστο και άρα ασταθή ισορροπία.

Άσκηση 3.3

Σωματίδιο με μάζα *m* κινείται στο επίπεδο *xy* ενώ η δυναμική του ενέργεια είναι $U = \alpha x^2 + by^2$, όπου α και *b* είναι θετικές σταθερές. α) Να βρεθεί η δύναμη που δρα στη σημειακή μάζα. β) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται από τα α και *b* για να είναι η δύναμη κεντρική; γ) Είναι η δύναμη αυτή διατηρητική; δ) Αν το σώμα κρατηθεί ακίνητο στη θέση $x = x_0$, $y = 0$ και αφεθεί ελεύθερο στο χρόνο $t = 0$, να βρεθεί η θέση $\vec{r}(t)$ της σημειακής μάζας ως συνάρτηση του χρόνου, η ταχύτητα του $\vec{\upsilon}(t)$, η κινητική του ενέργεια *K* και η ολική του (μηχανική) ενέργεια *E*.

α) Η δύναμη του πεδίου υπολογίζεται από τη διαφορική σχέση ορισμού της δυναμικής ενέργειας:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U = -\frac{\partial U}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial U}{\partial y}\hat{y} \Rightarrow \vec{F} = -(2\alpha x\hat{x} + 2\beta y\hat{y}) = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} \quad (1)$$

β) Η δύναμη θα είναι κεντρική αν έχει τη μορφή: $\vec{F} = f(r)\hat{r}$, δηλαδή θα πρέπει να επαληθεύεται η ακόλουθη συνθήκη:

$$-(2\alpha x\hat{x} + 2\beta y\hat{y}) = -\sqrt{4\alpha^2 x^2 + 4\beta^2 y^2}\,\hat{r} = -2\alpha\sqrt{x^2 + \frac{\beta^2}{\alpha^2}y^2} = \pm f(r)\hat{r} \Rightarrow$$

$$\alpha = \beta \Rightarrow f(r) = 2\alpha r \text{ και } \boxed{\vec{F} = -2\alpha r\hat{r} = -2\alpha\vec{r}}$$

γ) Η δύναμη αυτή είναι διατηρητική διότι είναι κεντρική και βέβαια ισχύει η γνωστή συνθήκη του *αστρόβιλου πεδίου*: $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$.

δ) Η δυναμική ενέργεια του σωματιδίου στο σημείο $x_0 = x_0, y_0 = 0$ είναι:

$U(x_0, 0) = \alpha x_0^2$ και επομένως η ολική μηχανική ενέργεια του είναι:

$E = K + U(x_0, 0) = \alpha x_0^2$ (1). Η δύναμη στο ίδιο σημείο είναι: $\vec{F}_x = -2\alpha x\hat{x}$ και με βάση το 2^o νόμο του Newton προκύπτει η ακόλουθη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του σωματιδίου:

$m\ddot{x}\hat{x} = -2\alpha x\hat{x}$ και κατά το φορέα *x* θα είναι: $\ddot{x} + \frac{2\alpha}{m}x = 0$ (2)

Η δ.ε. (2) είναι δευτέρας τάξης με σταθερούς συντελεστές και έχει γενική λύση: $x = x_m\cos(\omega t + \varphi)$, όπου $\omega = \sqrt{2\alpha/m}$ η *κυκλική συχνότητα* και x_0, φ σταθερές (*πλάτος* και *φάση*, αντίστοιχα), που μπορούν να προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος.

Έχουμε, για $t = 0$: $x = x(0) = x_0 = x_m\cos\varphi$ (3)

Επίσης, στο σημείο αυτό, δίνεται ότι είναι ακίνητο, δηλαδή

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow dx_m\left[\cos\left(\omega t + \varphi\right)\right]/dt\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow -x_m\omega\sin(\omega\cdot 0 + \varphi) =$$

$$= -x_m\omega\sin\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \text{ και } x = x_m\cos\omega t \overset{(3)}{\Rightarrow} x(0) = x_0 = x_m$$

Επομένως, $\dot{x} = \upsilon(t) = -x_0\omega\sin\omega t \Rightarrow \boxed{\upsilon^2 = x_0^2\omega^2\sin^2\omega t}$ (4)

Τελικά θα έχουμε: $K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}x_0^2\omega^2\sin^2\omega t \Rightarrow \boxed{K = \alpha x_0^2\sin^2\omega t}$ και

$$E = K + U \Rightarrow U = E - K = \alpha x_0^2 - \alpha x_0^2\sin^2\omega t \Rightarrow \boxed{U = \alpha x_0^2\cos^2\omega t}$$

Άσκηση 3.4

Όχημα μάζας m προσκρούει σε ακλόνητο εμπόδιο με ταχύτητα $\upsilon_0\hat{x}$ και ακινητοποιείται. Υποθέστε ότι η ασκούμενη δύναμη στο όχημα (χρονικά εξαρτώμενη) προσεγγίζεται μέσω της σχέσης $\vec{F} = -F_0(e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau})\hat{x}$, όπου t ο χρόνος και F_0, τ δεδομένες θετικές σταθερές με κατάλληλες μονάδες. Θεωρείστε ότι το συμβάν πρακτικά διήρκεσε χρόνο 5τ. α) Να βρείτε την αρχική ταχύτητα υ_0 του οχήματος. β) Να δείξετε σε ένα πρόχειρο διάγραμμα $t-F$ τη μεταβολή του μέτρου της δύναμης που ασκήθηκε στο όχημα κατά τη διάρκεια της πρόσκρουσης, να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή της και να εκτιμήσετε τη μέση τιμή της.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 4/2/2005

α)

Εφαρμόζουμε το θεώρημα ώθησης-ορμής στο φορέα x:

$$\Omega = \int_0^{5\tau} F dt = -F_0 \int_0^{5\tau} \left(e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau}\right) dt = -F_0 \left[-\tau e^{-t/\tau} - (-\tau/2)e^{-2t/\tau}\right]_0^{5\tau} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Omega = -\frac{F_0 \tau}{2}} \quad (1)$$

Όμως, $\Omega = \Delta p = p_{\tau\varepsilon\lambda} - p_{\alpha\rho\chi} = 0 - m\upsilon_0 = -m\upsilon_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\upsilon_0 = \frac{F_0 \tau}{2m}}$ (2)

β)

Το μέγιστο της δύναμης βρίσκεται από τη συνθήκη:

$$\frac{dF}{dt} = 0 \Rightarrow F_0\left(-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} + \frac{2}{\tau}e^{-2t/\tau}\right) = 0 \Rightarrow e^{-t/\tau} = 2 \Rightarrow \frac{t}{\tau} = \ln 2 \Rightarrow$$

$t_{\max} = \tau \ln 2$ και η μέγιστη δύναμη: $F_{\max} = F(t_{\max}) = F_0\left(e^{-\ln 2} - e^{-2\ln 2}\right) \Rightarrow$

$$\boxed{F_{\max} = \frac{F_0}{4}}$$

Η μέση τιμή της δύναμης μπορεί να εκτιμηθεί μέσω της σχέσης:

$F_\mu = \frac{|\Delta p|}{\Delta t} = \frac{m\upsilon_0}{5\tau}$ και με βάση την (2): $\boxed{F_\mu = \frac{F_0}{10}}$

Άσκηση 3.5

I) Υποθέστε ότι μια δύναμη έχει τη μορφή $\vec{F}=kr^n\vec{r}$ όπου k και n σταθερές, με $n\neq-2$. α) Είναι διατηρητική αυτή η δύναμη; Εξηγείστε επαρκώς. β) Να βρείτε το έργο της δύναμης αυτής σε σωματίδιο για να το κινήσει από τη θέση $\vec{r}_0$ σε κάποια θέση $\vec{r}$.

II) Να εξετάσετε αν η παρακάτω δύναμη είναι διατηρητική: $\vec{F}=2xe^{-y}\hat{x}+\left(\sin z-x^2e^{-y}\right)\hat{y}-\left(y\cos z\right)\hat{z}$.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 9/9/2005

(I)-α

Η δύναμη είναι διατηρητική διότι είναι κεντρική, δηλαδή της μορφής: $\vec{F}=f(r)\hat{r}$, όπου εδώ είναι $\vec{F}=kr^n\vec{r}=kr^nr\hat{r}\Rightarrow f(r)=kr^nr=kr^{n+1}$

(I)-β

Το έργο της δύναμης αυτής για την αναφερόμενη μετακίνηση είναι:

$W=\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\vec{F}\cdot d\vec{r}'$, αλλά ισχύει η διανυσματική ταυτότητα $\vec{r}\cdot d\vec{r}=rdr$ [3] οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται γραμμικό και υπολογίζεται εύκολα ως εξής:

$$W=\int_{r_0}^{r}kr'^{n+1}dr'=k\left[\frac{r'^{n+2}}{n+2}\right]_{r_0}^{r}=k\left(\frac{r^{n+2}}{n+2}-\frac{r_0^{n+2}}{n+2}\right)=\frac{k}{n+2}\left(r^{n+2}-r_0^{n+2}\right)\quad\text{(II)}$$

Εξετάζουμε το ενδεχόμενο η δύναμη να είναι διατηρητική μέσω του κριτηρίου του στροβιλισμού της, δηλαδή θα πρέπει:

$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$. Αλλά πράγματι έχουμε:

$$\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ F_x&F_y&F_z\end{vmatrix}=0\Rightarrow\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(-y\cos z\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\sin z-x^2e^{-y}\right)\right]\hat{x}+$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(2xe^{-y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(-y\cos z\right)\right]\hat{y}+\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin z-x^2e^{-y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^{-y}\right)\right]\hat{z}=0$$

---

[3] $\vec{r}\cdot d\vec{r}=r\left(\hat{r}.d\vec{r}\right)=r\left(\left|d\vec{r}\right|\cos[\hat{r},d\vec{r}]\right)=rdr$ ή αλλιώς: $d\vec{r}^2=dr^2=2\vec{r}dr$ (1), αλλά και $d\vec{r}^2=d\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)=\vec{r}\cdot d\vec{r}+\vec{r}\cdot d\vec{r}=2\vec{r}\cdot d\vec{r}$ (2) και επομένως (1),(2) $\Rightarrow\vec{r}d\vec{r}=rdr$.

Άσκηση 3.6

Θεωρείστε δύο δυνάμεις της μορφής, $\vec{F}_1 = kx\hat{x} + ky\hat{y} = k\left(x, y\right)$ και $\vec{F}_2 = -ky\hat{x} + kx\hat{y} = k\left(-y, x\right)$, όπου k μια σταθερά με κατάλληλες μονάδες.

α) Να ελέγξετε αν η κάθε μια δύναμη χωριστά είναι διατηρητική ή όχι. β) Να υπολογίσετε το έργο της κάθε δύναμης κατά μήκος μιας ευθείας διαδρομής, από την αρχή του συστήματος συντεταγμένων $\left(0,0\right)$ ως ένα δεδομένο σημείο $\vec{r}_0 = (x_0, y_0)$.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 2/7/2007

α)

Υπολογίζουμε το διάνυσμα του στροβιλισμού της δύναμης στις δύο περιπτώσεις και έχουμε:

$$\Omega_1 = \vec{\nabla} \times \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_{1x} & F_{1y} & F_{1z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{1y}}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_{1x}}{\partial z} - \frac{\partial F_{1z}}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$= \left(\frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(ky)}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial(0)}{\partial z} - \frac{\partial(kx)}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial(ky)}{\partial x} - \frac{\partial(kx)}{\partial y}\right)\hat{z} =$$

$$= \left(0-0\right)\hat{x} + \left(0-0\right)\hat{y} + \left(0-0\right)\hat{z} = \vec{0}$$

$$\Omega_2 = \vec{\nabla} \times \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_{2x} & F_{2y} & F_{2z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_{2z}}{\partial y} - \frac{\partial F_{2y}}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial F_{2x}}{\partial z} - \frac{\partial F_{2z}}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial F_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2x}}{\partial y}\right)\hat{z} =$$

$$\left(0-0\right)\hat{x} + \left(0-0\right)\hat{y} + \left(k+k\right)\hat{z} = 2k \cdot \hat{z} \neq 0$$

Επειδή ο μηδενισμός του στροβιλισμού της δύναμης αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το δυναμικό πεδίο διατηρητικό συμπεραίνουμε ότι η $\vec{F}_1$ είναι διατηρητική δύναμη ενώ η $\vec{F}_1$ μη διατηρητική.

β)

Το έργο κατά μήκος μιας συγκεκριμένης διαδρομής από τη θέση $\vec{r}_1$ στη θέση $\vec{r}_2$ δίνεται από τη σχέση: $W_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$. Εξετάζουμε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ για την κάθε δύναμη:

$\vec{F}_1 \cdot d\vec{\ell} = k(x\hat{x} + y\hat{y}) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y}) = k\left(xdx + ydy\right)$ και

$\vec{F}_2 \cdot d\vec{\ell} = k(-y\hat{x} + x\hat{y}) \cdot (dx\hat{x} + dy\hat{y}) = k\left(-ydx + xdy\right)$

οπότε,

$$W_{12}^{F_1} = \int_0^{x_0} kxdx + \int_0^{y_0} kydy = k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0} + k\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{y_0} = k\frac{x_0^2 + y_0^2}{2} = \frac{kr_0^2}{2} \text{ και}$$

$$W_{12}^{F_2} = \int_0^{x_0} (-ky)dx + \int_0^{y_0} kxdy$$

Αλλά η ευθεία από το $(0,0)$ στο (x_0, y_0) περιγράφεται από την εξίσωση $y = \frac{y_0}{x_0}x$, οπότε:

$$W_{12}^{F_2} = -k\frac{y_0}{x_0}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{x_0} + k\frac{x_0}{y_0}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{y_0} = -kx_0y_0 + kx_0y_0 = 0$$

Το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσε να προκύψει ευκολότερα (άμεσα) παρατηρώντας ότι η $\vec{F}_2$ είναι κάθετη στην ευθεία μετακίνησης, όπου ισχύει, $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$. Οπότε, $\vec{F}_2 \cdot d\ell = k(-ydx + xdy) = k\left(-y\frac{xdy}{y} + xdy\right) = 0$

Άσκηση 3.7

Ένα σώμα μάζας m μπορεί να κινηθεί σε μονοδιάστατο πεδίο με δυναμική ενέργεια που δίνεται από τη σχέση $U(x) = -Ax(x^2 - \alpha^2)$ για $-\infty < x < +\infty$, όπου A και α θετικές σταθερές.

α) Σχεδιάστε πρόχειρα τη δυναμική ενέργεια $U(x)$ και βρείτε τα σημεία ισορροπίας του σώματος καθώς και το είδος της ισορροπίας στα σημεία αυτά (ευσταθής ή ασταθής).

β) Βρείτε την κινητική ενέργεια που πρέπει να δοθεί στο σώμα έτσι ώστε, εκτοξευόμενο από τη θέση $x = 0$, να μπορέσει να διαφύγει στο άπειρο.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 26/10/2011

α)

Βρίσκουμε τις θέσεις x στις οποίες έχουμε τοπικά ακρότατα:

$$\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow -3Ax^2 + A\alpha^2 = 0 \Rightarrow 3A(x^2 - \frac{\alpha^2}{3}) = 0 \Rightarrow x = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$

Στο $x = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ έχουμε, $\frac{d^2U}{dx^2} = -6Ax = -\frac{6A\alpha}{\sqrt{3}} < 0$ επομένως είναι τοπικό μέγιστο με τιμή $U_{\max} = -A\frac{\alpha^3}{3^{3/2}} + A\alpha^2\frac{\alpha}{3^{1/2}} = -A\frac{\alpha^3}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2A\alpha^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}A\alpha^3$

Στο $x = -\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$ έχομε $\frac{d^2U}{dx^2} = -6Ax = +\frac{6A\alpha}{\sqrt{3}} > 0$ επομένως είναι τοπικό ελάχιστο με τιμή

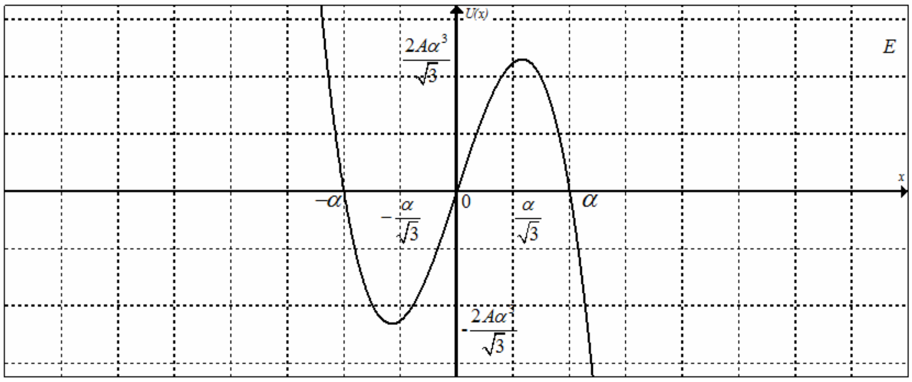
$$U_{\min} = A\frac{\alpha^3}{3^{3/2}} + A\alpha^2(-\frac{\alpha}{3^{1/2}}) = A\frac{\alpha^3}{\sqrt{3}}(\frac{1}{3} - 1) = -\frac{2A\alpha^3}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}A\alpha^3$$

Η U τέμνει τον άξονα των x στα σημεία: $U(x) = -Ax(x^2 - \alpha^2) = 0$

Δηλαδή στα $x = 0$, $x = -\alpha$ και $x = +\alpha$

Στο διάστημα (-∞, -α) η $U(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα γιατί $\frac{dU}{dx} = -A(3x^2 - \alpha^2) < 0$

Στο διάστημα (+α , +∞) η $U(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα γιατί $\frac{dU}{dx} = -A(3x^2 - \alpha^2) < 0$



E

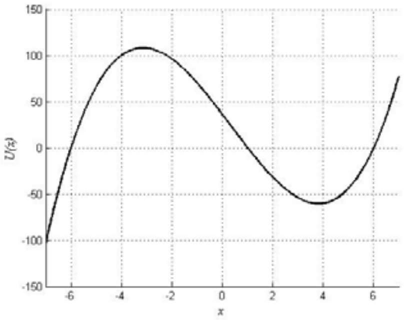
Ευσταθή ισορροπία έχουμε στο σημείο $x_1 = -\dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$ (ελάχιστο στη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας).

Ασταθή ισορροπία έχουμε στο σημείο $x_2 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$ (μέγιστο στη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας).

β)

Η ολική μηχανική ενέργεια διατηρείται, $E = K + U(x) =$ σταθ. Για τις θέσεις $x = 0$ και $x = \dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$ έχουμε: $K_0 + 0 = 0 + U_{max} \Rightarrow K_0 = U_{max}$. Αυτό σημαίνει ότι το σώμα με κινητική ενέργεια K_0 μπορεί να φθάσει στο σημείο $x = \dfrac{\alpha}{\sqrt{3}}$ που είναι η θέση του μεγίστου φράγματος δυναμικής ενέργειας, $K_0 = U_{max} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} A\alpha^3$. Τότε όμως με ελάχιστο πλεονασμό κινητικής ενέργειας μπορεί να διαφύγει στο άπειρο λόγω της απωστικής δύναμης που θα του ασκηθεί αμέσως μετά τη θέση του μεγίστου.

Άσκηση 3.8



Ένα σωματίδιο κινείται σε μονοδιάστατο διατηρητικό πεδίο του οποίου η δυναμική ενέργεια δίνεται από τη σχέση, $U(x)=x^3-x^2-36x+36$ στο σύστημα SI, όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα.

α) Να βρείτε τη δύναμη του πεδίου ως συνάρτηση της θέσης x.

β) Να βρείτε μέσω υπολογισμών τα σημεία ισορροπίας του σωματιδίου και να προσδιορίσετε το είδος της ισορροπίας αυτής (ευσταθής ή ασταθής).

γ) Αν η ολική μηχανική ενέργεια του σωματιδίου είναι, $E=36$, και το σωματίδιο βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα x, να προσδιορίσετε την επιτρεπόμενη περιοχή της κίνησής του.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 29/1/2010

α)

Η δύναμη βρίσκεται από τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας: $F=-\dfrac{dU}{dx}=-3x^2+2x+36$

β)

Σημεία ισορροπίας:

$$F=-3x^2+2x+36=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+4\times3\times36}}{6}=\begin{cases}3{,}81 \text{ m}\\ -3{,}15 \text{ m}\end{cases}$$

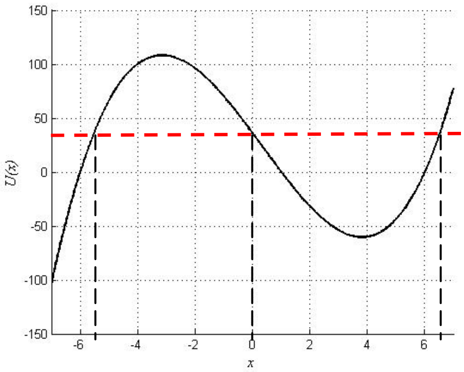
Στο σημείο $x_1=3{,}81$ m έχουμε ελάχιστο διότι $\dfrac{d^2U}{dx^2}=6x-2=6\times3.81-2>0$

(ευσταθής ισορροπία).

Στο σημείο $x_2=-3{,}15$ m έχομε μέγιστο διότι

$$\frac{d^2U}{dx^2}=6x-2=6\times(-3.15)-2<0$$

(ασταθής ισορροπία).



γ)

Η ευθεία ολικής ενέργειας Ε=36 τέμνει τη καμπύλη δυναμικής ενέργειας $U(x)$ στα σημεία που είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^3-x^2-36x+36=36 \Rightarrow x^3-x^2-36x=0 \Rightarrow$$

$$x=0 \quad ή \quad x^2-x-36=0 \quad \Rightarrow x=0 \quad ή\ x=-5{,}02 \quad ή\ x=7{,}02$$

Αν το σώμα βρεθεί μεταξύ των σημείων $x=0$ έως $x=7{,}02$ m θα παραμένει εγκλωβισμένο εκεί. Αν όμως βρεθεί στο διάστημα $-\infty < x < 5{,}02$ m θα απομακρύνεται συνεχώς κατά την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x αποκτώντας όλο και μεγαλύτερες κινητικές ενέργειες χωρίς δυνατότητα επιστροφής.

4. Βαρύτητα

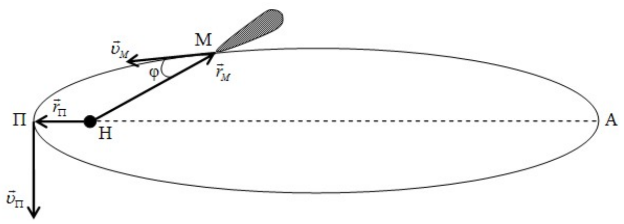
Θεωρητικά στοιχεία και μεθοδολογία

Η δύναμη της βαρύτητας είναι μια από τις τέσσερις θεμελιώδεις δυνάμεις-αλληλεπιδράσεις του φυσικού κόσμου και μάλιστα η «μακράν» ασθενέστερη. Στη Νευτώνεια μηχανική, η δύναμη της βαρύτητας περιγράφεται από τον νόμο της *παγκόσμιας έλξης* (τέταρτος νόμος Newton) και είναι πάντοτε ελκτική. Η φύση αυτής της δύναμης δεν ερμηνεύεται μέσω αυτού του νόμου. Στην μετέπειτα γεωμετρική της ερμηνεία μέσω της θεωρίας της Γενικής Σχετικότητας, η βαρύτητα θεωρείται ως ένα είδος «αδρανειακής» δύναμης που πηγάζει από την ιδιότητα του χωρόχρονου να υφίσταται «διαταραχή» ή «παραμόρφωση» στις περιοχές συγκέντρωσης μεγάλης μάζας-ενέργειας, όπως αναφέρεται και στο κεφάλαιο 2 των σημειώσεων αυτών (βλ. επίσης Παράρτημα Ζ1). Το βαρυτικό πεδίο είναι κεντρικό πεδίο εξ ορισμού και επομένως είναι διατηρητικό. Λόγω της ιδιότητας της «κεντρικής» δύναμης, η στροφορμή, $\bar{L}$, ενός σώματος στο πεδίο βαρύτητας από τη δράση της, διατηρείται, αρκεί το σύστημα να είναι απομονωμένο. Η βαρύτητα έχει την ιδιότητα να μη μπορεί να «θωρακιστεί», δηλαδή να υπάρξει τρόπος να μηδενιστεί μέσω οποιασδήποτε διάταξης [4,7,8].

Η κίνηση ενός σωματιδίου, ή μικρού σχετικά σώματος, μελετάται με βάση το νόμο της παγκόσμιας έλξης και οι δυνατές τροχιές του είναι οι λεγόμενες *κωνικές τομές*. Δηλαδή, η τροχιά μπορεί να είναι *έλλειψη*, *παραβολή* ή *υπερβολή*. Το ποια τροχιά θα ακολουθήσει το σώμα μπορεί κανείς να το καθορίσει εύκολα με βάση ενεργειακά κριτήρια (της ολικής ενέργειας), χωρίς να αναφερθεί σε λεπτομέρειες της κίνησής του. Αξίζει να αναφερθούν εδώ τα κριτήρια αυτά λόγω της χρησιμότητάς τους: Αν $E<0$ η τροχιά είναι ελλειπτική, αν $E=0$ η τροχιά είναι παραβολική και αν $E>0$ η τροχιά είναι υπερβολική. Κατά τις κινήσεις αυτές η διατήρηση της ολικής ενέργειας, σε συνδυασμό με τη διατήρηση της στροφορμής, επιτρέπει τον προσδιορισμό θέσης ή ταχύτητας. Επίσης, η διατήρηση της ολικής ενέργειας επιτρέπει τον υπολογισμό της λεγόμενης *ταχύτητας διαφυγής*. Η ταχύτητα αυτή ορίζεται ως η αρχικά απαιτούμενη, έτσι ώστε, το σώμα να φθάσει σε συγκεκριμένο σημείο, όχι κατ' ανάγκη στο άπειρο, με μηδενική ταχύτητα.

Άσκηση 4.1

Θεωρείστε έναν κομήτη μάζας m που ακολουθεί ελλειπτική τροχιά στο πεδίο βαρύτητας του Ήλιου, αγνοώντας την επίδραση των πλανητών του Ηλιακού Συστήματος. Στο πλησιέστερο σημείο προς τον Ήλιο Π (περιήλιο) με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_\Pi$, η ταχύτητα του είναι $\vec{\upsilon}_\Pi$ (σχήμα).



α) Πλησιάζοντας τον Ήλιο, στο σημείο Μ, το διάνυσμα θέσης του, $\vec{r}_M$, σχηματίζει δεδομένη γωνία φ με την εφαπτομένη της τροχιάς του στο ίδιο σημείο. Βρείτε την ταχύτητα του (ως διάνυσμα) $\vec{\upsilon}_M$ στο σημείο Μ, υποθέτοντας ότι $\hat{r}_M = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$.

β) Διατυπώστε, με σαφήνεια, την (ενεργειακή) συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε η τροχιά του κομήτη να είναι έλλειψη (μια από τις τροχιές-κωνικές τομές) και να την επαληθεύσετε για την εξεταζόμενη περίπτωση.

Δίνονται: *$r_\Pi = 5\times10^{10}$ m, $\upsilon_\Pi = 5\times10^4$ m/s, $r_M = 2{,}5\times10^{11}$ m, $\varphi = 30^o$, μάζα του Ήλιου $M_H = 1{,}99\times10^{30}$ Kg, σταθερά της παγκόσμιας έλξης $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm^2/Kg^2. Η μάζα του κομήτη, m, έχει τιμή της τάξης των 10^{13} Kg (τυπική τιμή), αλλά οι απαντήσεις δεν εξαρτώνται από αυτή.*

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 27/8/2003

α)

Κατά την διάρκεια της κίνησης του κομήτη διατηρείται η στροφορμή $\vec{L}$, διότι η μοναδική δρώσα δύναμη είναι κεντρική (άρα $\vec{\tau} = 0$). Οπότε, από τον νόμο της περιστροφικής κίνησης έχουμε:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{σταθερά}$$

Επειδή η τροχιά είναι επίπεδη, η διέυθυνση της $\vec{L}$ είναι κατά τον άξονα z $(\vec{L} = L\hat{z})$, οπότε διατηρείται και το μέτρο της, δηλαδή:

$$L = m\upsilon_\Pi r_\Pi = m\upsilon_M r_M \sin\varphi \Rightarrow \upsilon_M = \frac{r_\pi \upsilon_\pi}{r_M \sin\varphi} \quad (1)$$

και

$$\boxed{\upsilon_M = \frac{5\times10^{10}\times5\times10^4}{2{,}5\times10^{11}\times0{,}5} = 20\times10^3 = 2\times10^4 \text{ m/s}} \quad (2)$$

Επίσης, για να βρούμε την κατεύθυνση της $\vec{\upsilon}_M$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$\vec{L}_M = \vec{L}_\Pi = \vec{r}_M \times m\vec{\upsilon}_M = m\left(\vec{r}_M \times \vec{\upsilon}_M\right) = m r_\Pi \upsilon_\Pi \hat{z} \quad (3)$$, διότι $\vec{r}_\Pi \perp \vec{\upsilon}_\Pi$.

Όμως το εξωτερικό γινόμενο $\vec{r}_M \times \vec{\upsilon}_M$ είναι:

$$\vec{r}_M \times \vec{\upsilon}_M = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x_M & y_M & 0 \\ \upsilon_{M,x} & \upsilon_{M,y} & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + \left(x_M \upsilon_{M,y} - y_M \upsilon_{M,x}\right)\hat{z} \Rightarrow$$

$$m r_\Pi \upsilon_\Pi = m\left(x_M u_{M,y} - y_M u_{M,x}\right) \Rightarrow x_M \upsilon_{M,y} - y_M \upsilon_{M,x} = r_\Pi \upsilon_\Pi$$

Οι συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας στο σημείο Μ συνδέονται με το μέτρο του ως εξής:

$$\upsilon_{\mathrm{M},x}^2+\upsilon_{\mathrm{M},y}^2=\upsilon_{\mathrm{M}}^2 \text{ και } \upsilon_{\mathrm{M},x}^2+\upsilon_{\mathrm{M},y}^2=4\times10^8\ \mathrm{m^2/s^2}$$

Επειδή όμως,

$$\hat{r}_{\mathrm{M}}=\left(\sqrt{2}/2,\sqrt{2}/2,0\right)\Rightarrow \hat{r}_{\mathrm{M}}=r_{\mathrm{M}}\hat{r}_{\Pi}=\left(r_{\mathrm{M}}\sqrt{2}/2,r_{\mathrm{M}}\sqrt{2}/2,0\right)\Rightarrow$$

$$x_{\mathrm{M}}=y_{\mathrm{M}}=\frac{r_{\mathrm{M}}\sqrt{2}}{2}=2,5\times10^{11}\frac{\sqrt{2}}{2}=1,25\sqrt{2}\times10^{11}\ \mathrm{m}.\text{ Επίσης,}$$

$$\frac{x_{\mathrm{M}}}{r_{\Pi}\upsilon_{\Pi}}=\frac{1,25\sqrt{2}\times10^{11}}{25\times10^{14}}=\frac{125\sqrt{2}\times10^{9}}{25\times10^{14}}=\frac{\sqrt{2}}{2}10^{-4}\ \mathrm{m}\text{ και ακόμη,}$$

$$\frac{\mathrm{y}_{\mathrm{M}}}{r_{\Pi}\upsilon_{\Pi}}=\frac{\mathrm{x}_{\mathrm{M}}}{r_{\Pi}\upsilon_{\Pi}}=\frac{\sqrt{2}}{2}10^{-4}\ \mathrm{m}$$

Επομένως, για να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας $\vec{\upsilon}_{\mathrm{M}}$ θα πρέπει να επιλύσουμε το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\upsilon_{\mathrm{M},x}}{10^4}\right)^2+\left(\dfrac{\upsilon_{\mathrm{M},y}}{10^4}\right)^2=4\\ \dfrac{\upsilon_{\mathrm{M},y}}{10^4}-\dfrac{\upsilon_{\mathrm{M},x}}{10^4}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\end{array}\right\}\ \text{ή}\ \left.\begin{array}{l}\mathrm{x}^2+y^2=4\\ y-x=\sqrt{2}\end{array}\right\}\Rightarrow x^2+\sqrt{2}x-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{2+4}}{2}=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{6}}{2}$$

Δεκτή είναι μόνο η αρνητική ρίζα, με βάση τα δεδομένα του προβλήματος, δηλαδή η: $x_2=\dfrac{\upsilon_{\mathrm{M},x}}{10^4}=\dfrac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}=-1,932\ \mathrm{m/s}$

Τελικά καταλήγουμε στα εξής αριθμητικά αποτελέσματα:

$$\boxed{\upsilon_{\mathrm{M},x}=-1,93\times10^4\ \mathrm{m/s}}\text{ και }\boxed{\upsilon_{\mathrm{M},y}=-5,18\times10^3\ \mathrm{m/s}}\quad(4)$$

β)

Η απαιτούμενη συνθήκη, έτσι ώστε, η τροχιά σε πεδίο βαρύτητας να είναι έλλειψη, είναι η εξής:

$$E<0\Rightarrow\boxed{\frac{1}{2}m\upsilon_{\Pi}^2-\frac{GmM_H}{r_{\Pi}}<0}\quad(5)$$

όπου, E η ολική μηχανική ενέργεια στο πεδίο βαρύτητας, η οποία στην προκειμένη περίπτωση διατηρείται σταθερή (λόγω κεντρικής δύναμης και του επακόλουθου διατηρητικού χαρακτήρα του πεδίου). Από την (5), μετά τις αριθμητικές αντικαταστάσεις, προκύπτει:

$$\boxed{\upsilon_{\Pi}<\sqrt{\frac{2GM_H}{r_{\Pi}}}=\sqrt{\frac{2\times6,67\times10^{-11}\times1,99\times10^{30}}{5\times10^{10}}}=7,287\times10^4\ \mathrm{m/s}}$$

που ισχύει, πράγματι, από τα δεδομένα του προβλήματος υ_{Π}=5×10^4 m/s.

Άσκηση 4.2

Σώμα μάζας m πέφτει ελεύθερα στο πεδίο βαρύτητας της Γης (g=σταθ.) από αρχικό ύψος h, χωρίς αρχική ταχύτητα. Η αντίσταση του αέρα είναι $\vec{F} = -k\vec{\upsilon}$ όπου $\vec{\upsilon}$ η ταχύτητα του σώματος και k θετική σταθερά. α) Να καταστρωθεί η διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση του σώματος. β) Να λυθεί η εξίσωση αυτή για να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου. γ) Να βρεθεί η θέση του σώματος ως συνάρτηση του χρόνου.

α)

Η κατεύθυνση της κίνησης είναι κατακόρυφη και επομένως η ταχύτητα έχει μόνο τη συνιστώσα υ_y. Εφαρμόζοντας το 2^{o} νόμο του Newton έχουμε:

$$\sum F_y = m\alpha_y \Rightarrow F - mg = -ma_y \Rightarrow k\upsilon_y - mg = ma_y \Rightarrow$$

$$k\upsilon_y - mg = -m\dot{\upsilon}_y \Rightarrow \dot{\upsilon}_y = \frac{-k\upsilon_y}{m} + g \Rightarrow \text{δ.ε.}\ \boxed{\frac{d\upsilon_y}{dt} = -\frac{k\upsilon_y}{m} + g} \quad (1)$$

β)

Η διαφορική εξίσωση (1) είναι πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές και λύνεται με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών:

$$\frac{md\upsilon_y}{mg - k\upsilon_y} = dt \Rightarrow -\frac{m}{k}\int_{mg/k}^{mg/k-\upsilon_y} \frac{d(mg/k - \upsilon'_y)}{mg/k - \upsilon'_y} = -\frac{m}{k}\ln\frac{mg/k - \upsilon_y}{mg/k} = t \Rightarrow$$

$$\frac{mg}{k} - \upsilon_y = \frac{mg}{k}e^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow \boxed{\upsilon_y = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-kt/m}\right)} \quad (2)$$

γ)

Από την (2) μπορούμε, μέσω ορισμού της ταχύτητας, να βρούμε το διάστημα με ολοκλήρωση:

$$\frac{dy}{dt} = \upsilon_y = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m}) \Rightarrow y(t) - y(0) = \left[\frac{mg}{k}t' + \frac{m^2 g}{k^2}e^{-kt'/m}\right]_0^t \Rightarrow$$

$$y(t) = h + \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}e^{-kt/m} - \frac{m^2 g}{k^2}e^0 \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = h + \frac{mg}{k}t + \frac{m^2 g}{k^2}\left(e^{-kt/m} - 1\right)}$$

Άσκηση 4.3

Θεωρείστε ως αρχή των αξόνων, *O*, το κέντρο της Γης: α) Στην ευθεία που συνδέει τη Γη με τη Σελήνη, να βρείτε το σημείο $r = r_o$ στο οποίο ένας δορυφόρος δέχεται μηδενική δύναμη βαρύτητας. Το σημείο αυτό είναι σημείο ευσταθούς ή ασταθούς ισορροπίας; β) Να υπολογίσετε την απαιτούμενη ταχύτητα εκτόξευσης του δορυφόρου από την επιφάνεια της Γης, ώστε, μόλις να φθάσει στο παραπάνω σημείο (δηλαδή να φθάσει με μηδενική ταχύτητα). γ) Αν ο δορυφόρος μόλις ξεπεράσει το σημείο αυτό, με ποια ταχύτητα θα συγκρουστεί με την επιφάνεια της Σελήνης;

Δίνονται: *$M_\Gamma = 5.94\times10^{24}$ kg, $M_\Sigma / M_\Gamma = 0{,}0123$, απόσταση Γης-Σελήνης: $R = 3{,}84\times10^{8}$ m, ακτίνα της Γης: $R_\Gamma = 6{,}37\times10^{6}$ m, $G = 6{,}67\times10^{-11}$ Nm²/kg².*

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 24/6/2004

α)

Έστω r_0 το σημείο «μηδενικής βαρύτητας». Στο σημείο αυτό η κλίση της εφαπτομένης της συνάρτησης της δυναμικής ενέργειας είναι ίση μηδενική: $\vec{F} = -\dfrac{dU}{dr} = 0$, οπότε $\vec{F}_\Gamma + \vec{F}_\Sigma = 0 \Rightarrow F_\Gamma = F_\Sigma$.

Αλλά, $F_\Gamma = \dfrac{GmM_\Gamma}{r_0^2}$ και $F_\Sigma = \dfrac{GmM_\Sigma}{\left(R - r_0\right)^2}$. Επομένως θα έχουμε:

$$\frac{GmM_\Gamma}{r_0^2} = \frac{GmM_\Sigma}{\left(R - r_0\right)^2} \Rightarrow \frac{R - r_0}{r_0} = \sqrt{\frac{M_\Sigma}{M_\Gamma}} \equiv \mu \Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{R}{\mu + 1}}$$

Με τα αριθμητικά δεδομένα προκύπτει: $r_0 = \dfrac{3{,}84\times10^{8}}{1{,}111}\ \text{m} = 3{,}46\times10^{8}\ \text{m}$

Το σημείο αυτό είναι σημείο ασταθούς ισορροπίας*.

β)

Για να φθάσει ο δορυφόρος στο σημείο αυτό θα πρέπει να έχει μηχανική ενέργεια $E_0 \equiv \underbrace{K}_{=0} + U_0 = U_0$. Η ενέργεια αυτή πρέπει να ισούται με την αντίστοιχη ενέργεια του κατά την εκτόξευση (λόγω του διατηρητικού πεδίου), δηλαδή:

$$E = E_0 \Rightarrow K + U_\Gamma + U_\Sigma = U_0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 - \frac{GmM_\Gamma}{R_\Gamma} - \frac{GmM_\Sigma}{R - R_\Gamma} = -\frac{GmM_\Gamma}{r_0} - \frac{GmM_\Sigma}{R - r_0} \Rightarrow$$

$$\upsilon_\delta^2 = 2GM_\Gamma\left(\frac{1}{R_\Gamma} - \frac{1}{r_0}\right) - 2GM_\Sigma\left(\frac{1}{R - r_0} - \frac{1}{R - R_\Gamma}\right) \Rightarrow \upsilon_\delta = 1{,}11\times10^{4}\ \text{m/s}.$$

Σημειώνεται ότι με την ίδια αριθμητική ακρίβεια, η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης είναι $\upsilon_\delta = 1{,}12\times10^{4}$ m/s. Δηλαδή η ύπαρξη της Σελήνης επιδρά στο να μειωθεί η ταχύτητα διαφυγής κατά 1 % περίπου.

γ)

Μόλις ο δορυφόρος ξεπεράσει το σημείο αυτό, η ταχύτητα πτώσης του στην επιφάνεια της Σελήνης υπολογίζεται ως εξής:

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, $K_1 + U_1 = K_2 + U_2$, στις θέσεις $r = r_0$ και $r = R$:

$$0 - \frac{GmM_\Gamma}{r_0} - \frac{GmM_\Sigma}{R - r_0} = \frac{1}{2} m\upsilon_\Sigma^2 - \frac{GmM_\Gamma}{R - R_\Sigma} - \frac{GmM_\Sigma}{\underbrace{R_\Sigma}_{=R-(R-R_\Sigma)}} \quad (1)$$

Κάνουμε την προσέγγιση: $R - R_\Sigma \approx R$, διότι $R_\Sigma << R$

Και τελικά παίρνουμε:

$$\upsilon_\Sigma^2 = 2GM_\Gamma \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r_0} \right) + 2GM_\Sigma \left(\frac{1}{R_\Sigma} - \frac{1}{R - r_0} \right) \Rightarrow \upsilon_\Sigma = 2{,}27 \times 10^3 \text{ m/s.}$$

*<u>Παρατήρηση</u>: Στη θέση $r = r_0$ η συνολική δυναμική ενέργεια του δορυφόρου, που οφείλεται στο πεδίο βαρύτητας τόσο της Γης όσο και της Σελήνης, παρουσιάζει <u>μέγιστο</u>. Αυτό σημαίνει ότι μια μικρή απομάκρυνση δr προς τη μια ή την άλλη κατεύθυνση, θα έχει ως αποτέλεσμα άσκηση δύναμης στο δορυφόρο με φορά ίδια προς αυτήν της απομάκρυνσης. Επομένως, η δύναμη τείνει να απομακρύνει ακόμη περισσότερο το δορυφόρο. Αυτή η ισορροπία λέγεται «ασταθής» και ορίζεται μαθηματικά ως εξής:

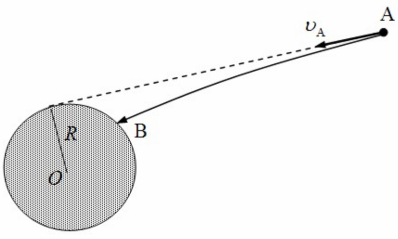
$\frac{dU}{dr} = 0$ και $\frac{d^2U}{dr^2} < 0$ (συνθήκη μεγίστου). Η δύναμη όμως τείνει να απομακρύνει το σώμα από το σημείο ισορροπίας.

Στην αντίθετη περίπτωση έχουμε «ευσταθή» ισορροπία η οποία ορίζεται ως εξής:

$\frac{dU}{dr} = 0$ και $\frac{d^2U}{dr^2} > 0$ (συνθήκη ελαχίστου). Η δύναμη όμως τείνει να επαναφέρει το σώμα στο σημείο ισορροπίας.

όπου η απειροστή μεταβολή dr, εξ ορισμού, λαμβάνεται πάντοτε θετική.

Άσκηση 4.4

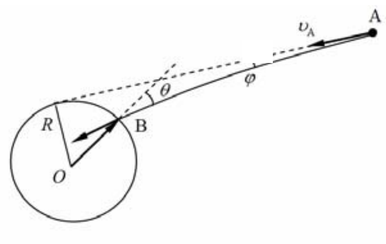


Ένας μετεωρίτης μάζας m βρίσκεται υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας της Σελήνης την οποία μπορείτε να θεωρήσετε ιδανική σφαίρα με δεδομένη μάζα M και ακτίνα R, αγνοώντας την επίδραση οποιουδήποτε άλλου ουράνιου σώματος. Στη θέση Α η ταχύτητά του μετεωρίτη έχει διεύθυνση εφαπτομενική προς στην επιφάνεια της Σελήνης, όπως φαίνεται στο σχήμα, ενώ ακολουθεί μια επίπεδη καμπύλη τροχιά σύγκρουσης σε κάποιο σημείο Β. Η ταχύτητα του μετεωρίτη μόλις πριν τη σύγκρουση υ_B (μέτρο) και η γωνία πρόσκρουσης θ, δηλαδή η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα $\vec{\upsilon}_B$ με την κατακόρυφο στο ίδιο σημείο (διεύθυνση διανύσματος θέσης $\vec{r}_B$), θεωρούνται γνωστά μεγέθη. α) Να βρείτε το μέτρο της αρχικής του ταχύτητας υ_A και στη συνέχεια την απόσταση r_A (την ΟΑ). β) Να δείξετε ότι τα δύο παραπάνω μεγέθη υπολογίζονται, από την εφαπτομενική ($\upsilon_{B,t}$) και την κάθετη συνιστώσα ($\upsilon_{B,n}$), αντίστοιχα.

Υπόδειξη: Εφαρμόστε κατάλληλα αρχές διατήρησης. Στο (β) χρησιμοποιείστε την έκφραση της ταχύτητας διαφυγής, $\upsilon_\delta^2 = 2GM/R$, για απλοποίηση της τελικής σχέσης.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 4/2/2005

α)



Στην αναφερόμενη κίνηση του μετεωρίτη στο πεδίο βαρύτητας, διατηρείται η στροφορμή (λόγω κεντρικής δύναμης και κατά συνέπεια διατηρητικής).

Η στροφορμή στο σημείο Α είναι: $\vec{L}_A = rm\upsilon_A \sin\varphi \hat{z} = \left(r\sin\varphi\right) m\upsilon_A \hat{z} = Rm\upsilon_A \hat{z}$

όπου φ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{r}_A$ και $\vec{\upsilon}_A$.

Η στροφορμή στο σημείο Β είναι: $\vec{L}_B = Rm\upsilon_B \sin\theta \hat{z}$

όπου θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{r}_B$ και $\vec{\upsilon}_B$.

Εξισώνοντας τις παραπάνω εκφράσεις των στροφορμών παίρνουμε:

$$\vec{L}_A = \vec{L}_B \Rightarrow Rm\upsilon_A \hat{z} = Rm\upsilon_B \sin\theta \hat{z} \Rightarrow \boxed{\upsilon_A = \upsilon_B \sin\theta \equiv \upsilon_{B,t}} \quad (1)$$

Επίσης διατηρείται η ολική (μηχανική) ενέργεια, οπότε:

$$E = K_A + U_A = K_B + U_B \quad (2)$$

Όμως έχουμε: $K_A = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2$, $K_B = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2$,

$U_A = -\frac{GmM}{r_A}$ και $U_B = -\frac{GmM}{R}$. Έτσι η (2) γίνεται:

$$\frac{1}{2}m\upsilon_A^2 - \frac{GmM}{r_A} = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{GmM}{R} \Rightarrow \upsilon_A^2 - \upsilon_B^2 = 2GM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{R}\right) \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\upsilon_B^2\left(\sin^2\theta - 1\right) = 2GM\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{R}\right) \Rightarrow -\frac{\upsilon_B^2\cos^2\theta}{2GM} + \frac{1}{R} = \frac{1}{r_A} \Rightarrow$$

$$\boxed{r_A = \frac{2RGM}{2GM - R\upsilon_B^2 \cos^2\theta} = \frac{R}{1 - \dfrac{R\upsilon_B^2 \cos^2\theta}{2GM}}} \quad (3)$$

β)

Η ταχύτητα υ_A μπορεί να γραφτεί πράγματι συναρτήσει της εφαπτομενικής συνιστώσας της υ_B, δηλαδή: $\upsilon_A = \upsilon_B \sin\theta \equiv \upsilon_{B,t}$

Για την απόσταση r_A μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση της ταχύτητας διαφυγής ώστε αρχικά να απλοποιηθεί η σχέση (3): $\frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 = \frac{GmM}{R} \Rightarrow \upsilon_\delta^2 R = 2GM$, οπότε στη συνέχεια

αντικαθιστώντας παίρνουμε διαδοχικά:

$$r_A = \frac{R}{1 - \dfrac{R\upsilon_B^2 \cos^2\theta}{\upsilon_\delta^2 R}} = \frac{R}{1 - \left(\dfrac{\upsilon_B \cos\theta}{\upsilon_\delta}\right)^2}$$ και θέτοντας $\upsilon_{B,n} = \upsilon_B \cos\theta$,

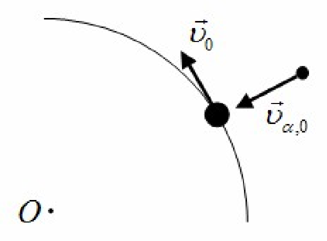
$$\boxed{r_A = \frac{R}{1 - \left(\dfrac{\upsilon_{B,n}}{\upsilon_\delta}\right)^2}} \quad (4)$$

Από τη σχέση αυτή διαπιστώνουμε τα εξής:

Αν $\upsilon_{B,n} \approx \upsilon_\delta \Rightarrow r_A \to \infty$, που σημαίνει ότι με ταχύτητα σύγκρουσης ίση αυτήν της διαφυγής, ο μετεωρίτης θα πρέπει να βρίσκεται σε άπειρη απόσταση, κάτι αναμενόμενο.

Αν $\upsilon_{B,n} \approx 0 \Rightarrow \upsilon_A \approx 0$ και $r_A \approx R$, δηλαδή αν η κάθετη στην επιφάνεια της Σελήνης συνιστώσα της ταχύτητάς του είναι μηδέν, τότε θα έχει μη μηδενική μόνο την εφαπτομενική συνιστώσα της ταχύτητας του, $\upsilon_{B,t} = \upsilon_A$ και θα βρίσκεται σε απόσταση R. Αυτό σημαίνει ότι η πορεία του θα προσεγγίζει κυκλική κίνηση πολύ κοντά στην επιφάνεια (σταθερή ταχύτητα χωρίς να προσκρούσει ποτέ στο έδαφος).

Άσκηση 4.5



Ένας δορυφόρος έχει μάζα m και εκτελεί κυκλική τροχιά με ταχύτητα μέτρου υ_0 γύρω από τη Γη, η οποία θεωρείται ιδανική σφαίρα μάζας M. α) Να αποδείξετε αρχικά ότι $\upsilon_0{}^2 r_0 = GM$ για να βρείτε την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του δορυφόρου r_0. Κάποια χρονική στιγμή ένα μικρότερο αντικείμενο μάζας km (με $k > 0$), συγκρούεται με το δορυφόρο με το ίδιο μέτρο ταχύτητας $\upsilon_{\alpha,0} = \upsilon_0$ αλλά κάθετα (δείτε σχήμα) και ενσωματώνεται δημιουργώντας ένα συσσωμάτωμα μάζας $(1+k)m$. Να βρείτε το μέτρο της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας του συσσωματώματος υ_r. β) Εξηγείστε το γεγονός, ότι η στροφορμή του συστήματος των δύο σωμάτων ως προς το κέντρο της Γης δεν μεταβλήθηκε και βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας του συσσωματώματος $\vec{\upsilon}_\sigma$ ως προς την αρχική ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ του δορυφόρου (που συνιστά τη συνισταμένη ταχύτητα). γ) Βασιζόμενοι στο αποτέλεσμα του ερωτήματος (α), να υπολογίστε την ολική του ενέργεια E του συσσωματώματος και να δικαιολογήσετε το ότι η νέα τροχιά θα είναι έλλειπτική.

<u>Παραδοχή:</u> *Δεχθείτε ότι κατά τον πολύ μικρό χρόνο της σύγκρουσης, δεν αλλάζει πρακτικά η απόσταση r_0, παρά μόνον η διανυσματική ταχύτητα του δορυφόρου ως συσσωμάτωμα πλέον.*

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 9/9/2005

α)

Στην περίπτωση της κυκλικής τροχιάς η δύναμη της βαρύτητας παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε έχουμε:

$$\vec{F}_G = \frac{m\upsilon_0^2}{r_0} \Rightarrow \frac{GmM}{r_0^2} = \frac{m\upsilon_0^2}{r_0} \Rightarrow \boxed{r_0 = \frac{GM}{\upsilon_0^2}} \quad (1)$$

Κατά την κάθετη σύγκρουση με το αντικείμενο έχουμε πλήρως ανελαστική (πλαστική) κρούση, οπότε διατηρείται η ορμή του συστήματος δορυφόρος-αντικείμενο κατά την ακτινική κατεύθυνση:

$$p_{\mu\varepsilon\tau\alpha} = p_{\pi\rho\iota\nu} \Rightarrow (km+m)\upsilon_r = km\upsilon_0 + 0 \Rightarrow m(k+1)\upsilon_r = km\upsilon_0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\upsilon_r = \upsilon_0 \frac{k}{k+1}} \quad (2)$$

Σημειώνεται ότι το αντικείμενο είχε μόνο ακτινική συνιστώσα ταχύτητας πριν την σύγκρουση.

β)

Κατά τη διάρκεια της σύγκρουσης ασκούνται δυνάμεις δράσης-αντίδρασης στα δύο σώματα, αλλά για πολύ μικρό χρονικό διάστημα. Ωστόσο, στο διάστημα αυτό η ροπή των δυνάμεων αυτών ως προς το O είναι μηδέν, σύμφωνα με το δεδομένο φορέα της κρούσης. Επομένως, για το σύστημα δορυφόρου-αντικειμένου έχουμε: $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} =$ σταθ., δηλαδή διατηρείται η στροφορμή του συστήματος. Η στροφορμή του αντικειμένου πριν την σύγκρουση ήταν μηδέν και επομένως η στροφορμή του συσσωματώματος θα είναι ίση με αυτήν του δορυφόρου και η οποία θα διατηρείται.

Η ταχύτητα του συσσωματώματος θα είναι η συνισταμένη μεταξύ της αρχικής (εφαπτομενικής την οποία και διατήρησε) και της ακτινικής ταχύτητας του, όπως υπολογίστηκε μετά τη σύγκρουση. Δηλαδή θα έχουμε:

$$\upsilon_\sigma = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_r^2} = \sqrt{\upsilon_0^2 + \upsilon_0^2\left(\frac{k}{k+1}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\sigma = \upsilon_0\sqrt{1+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2}} \quad (3)$$

Μπορούμε ακόμη να βρούμε την κατεύθυνση της ταχύτητας του συσσωματώματος από τη διατήρηση της στροφορμής:

$$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow m(k+1)\upsilon_\sigma r_0 \sin\varphi = m\upsilon_0 r_0 \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\upsilon_0}{(k+1)\upsilon_\sigma} \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow \sin\varphi = \frac{\upsilon_0}{(k+1)\upsilon_0\sqrt{1+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2}} \Rightarrow \boxed{\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+k)^2 + k^2}}}$$

γ)

Η ολική μηχανική ενέργεια του συσσωματώματος είναι:

$$E = K + U = \frac{1}{2}(1+k)m\upsilon_0^2\left[1+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right] - \frac{G(k+1)mM}{r_0} \quad (5)$$

Αλλά λόγω της (1), $r_0 = \dfrac{GM}{\upsilon_0^2}$, οπότε η (5) γράφεται:

$$E = K + U = \frac{1}{2}(1+k)m\upsilon_0^2\left[1+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2\right] - (1+k)m\upsilon_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(1+k)m\upsilon_0^2\left\{1+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2 - 2(1+k)\right\} = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2\left[\frac{k^2}{k+1} - (k+1)\right]$$

Η ποσότητα μέσα στην αγκύλη μπορεί να απλουστευθεί δίνοντας:

$$\frac{k^2}{k+1} - (k+1) = \frac{k^2 - (k+1)^2}{k+1} = \frac{k^2 - k^2 - 2k - 1}{k+1} = -\frac{2k+1}{k+1} < 0$$

Συνεπώς, $E < 0$ και η νέα τροχιά θα είναι ελλειπτική.

Άσκηση 4.6

α) Να βρείτε την ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος, μάζας m, που εκτοξεύεται από την επιφάνεια της Γης για να φθάσει σε μια θέση του βαρυτικού πεδίου απόστασης 9 γήινων ακτίνων από την επιφάνειά της. β) Να υπολογίσετε τη μέση δύναμη ώθησης F_μ κατά την εκτόξευση, υποθέτοντας ότι η απαιτούμενη ταχύτητα διαφυγής έχει επιτευχθεί στο πρώτο δευτερόλεπτο της επιτάχυνσης, εκφραζόμενη στο σύστημα μονάδων SI. γ) Να βρείτε την απαιτούμενη ταχύτητα για να τεθεί το σώμα σε κυκλική τροχιά από την προηγούμενη θέση.

Αμελείστε το πεδίο οποιουδήποτε άλλου ουράνιου σώματος πέραν της Γης. Η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G, η μάζα της Γης M_Γ και η ακτίνα της R_Γ θεωρούνται γνωστά μεγέθη.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 2/7/2007

α)

Στις δύο θέσεις του το σώμα έχει συνολική ενέργεια:

Στην επιφάνεια της Γης: $E_\Gamma = K_\Gamma + U_\Gamma = \frac{1}{2} m\upsilon_\delta^2 - \frac{GmM_\Gamma}{R_\Gamma}$

Στην θέση $r = R_\Gamma + 9R_\Gamma = 10R_\Gamma$: $E_{10R_\Gamma} = K_{10R_\Gamma} + U_{10R_\Gamma} = -\frac{GmM_\Gamma}{10R_\Gamma}$

Λόγω της αρχής διατήρησης της ενέργειας, έχουμε:

$$E_\Gamma = E_{10R_\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{2} m\upsilon_\delta^2 - \frac{GmM_\Gamma}{R_\Gamma} = -\frac{GmM_\Gamma}{10R_\Gamma} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{9GM_\Gamma}{5R_\Gamma}}}$$

β)

Από το θεώρημα ώθησης-ορμής έχουμε: $F_\mu = \frac{1}{\Delta t}\int_0^t \vec{F}dt = \frac{\Delta p}{\Delta t}$, όπου Δt το χρονικό διάστημα δράσης της δύναμης.

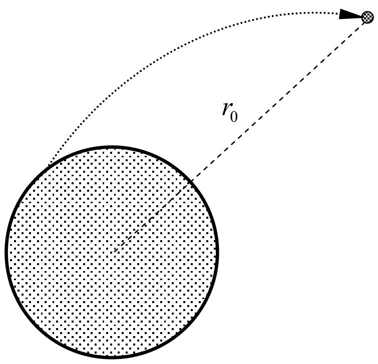
Επομένως: $F_\mu = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m\upsilon_\delta - 0}{1} = m\upsilon_\delta$ στο SI

γ)

Είναι γνωστό ότι $\upsilon^2 r = GM$, οπότε η απαιτούμενη ταχύτητα θα είναι:

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{10R_\Gamma}}}$$

Άσκηση 4.7



Ένας δορυφόρος μάζας m εκτοξεύεται από το έδαφος της Γης υπό κάποια κλίση με την ταχύτητας διαφυγής.

α) Τι είδους τροχιά θα ακολουθήσει; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την ταχύτητά του σε κάποια απόσταση από το κέντρο της Γης ίση με r_0.

γ) Στο σημείο απόστασης r_0 που αναφέρεται το ερώτημα (β), η ταχύτητά του μειώνεται μέσω ανασχετικού μηχανισμού από υ_0 σε $k\upsilon_0$ (σε σύντομο χρονικό διάστημα ώστε πρακτικά ο δορυφόρος να βρίσκεται στην αναφερόμενη απόσταση), όπου $0<k<1$. Τι είδους θα είναι η νέα του τροχιά; Δικαιολογείστε ανάλογα.

δ) Για ποια τιμή του k και με ποιά κατεύθυνση της ταχύτητας θα μπορούσε η τροχιά του να είναι κυκλική;

Δεδομένα: Η σταθερά της παγκόσμιας έλξης G και η ακτίνα της Γης R_Γ θεωρούνται γνωστές ποσότητες.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 23/2/2009

α) Υπολογίζουμε την ολική μηχανική ενέργεια του δορυφόρου η οποία διατηρείται σε κάθε θέση στο βαρυτικό πεδίο από τη τιμή της στη επιφάνεια της Γής.

$$E_\Gamma = K_\Gamma + U(R_\Gamma) = \frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 + \left(-G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma}\right) = \frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 - G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma} \quad (1)$$

Η ταχύτητα διαφυγής υπολογίζεται από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας:

$$E_\Gamma = E_\infty \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 + (-G\frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma}) = K_\infty + U_\infty = 0+0 \Rightarrow \upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma}} \quad (2)$$

Η (1) σε συνδυασμό με τη (2) δίνει:

$E = \frac{1}{2}m\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma} + \left(-G\frac{M_\Gamma m}{R_\Gamma}\right) = 0 \Rightarrow E = 0$. Άρα θα ακολουθήσει παραβολική τροχιά.

β) Στην απόσταση r_0 το μέτρο της ταχύτητάς του υ_0 υπολογίζεται από τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας μεταξύ του σημείου εκτόξευσης και της θέσης r_0.

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon_o^2 - G\frac{M_\Gamma m}{r_o} = 0 \Rightarrow \upsilon_o^2 = 2G\frac{M_\Gamma}{r_o} \Rightarrow \boxed{\upsilon_o = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{r_o}}}$$

γ) Σ αυτή την περίπτωση η ολική μηχανική ενέργεια του θα ήταν:

$$E=\frac{1}{2}m\left(k\upsilon_o\right)^2-\frac{GM_\Gamma m}{r_o}=\frac{1}{2}mk^2\upsilon_o{}^2-\frac{GM_\Gamma m}{r_o}=\frac{1}{2}mk^2\left(\frac{2GM_\Gamma}{r_o}\right)-\frac{GM_\Gamma m}{r_o}$$

$$=\frac{k^2G\ mM_\Gamma}{r_o}-G\frac{mM_\Gamma}{r_o}=G\frac{mM_\Gamma}{r_o}(k^2-1)<0$$

Άρα η νέα του τροχιά θα είναι ελλειπτική.

δ) Για να έχουμε κυκλική τροχιά πρέπει $k\vec{\upsilon}_0\perp\vec{r}_0$ και το μέτρο της ταχύτητας $k\upsilon_0$ να είναι τέτοιο ώστε:

$$G\frac{mM_\Gamma}{r_0^2}=m\frac{\left(k\upsilon_0\right)^2}{r_0}\Rightarrow G\frac{M_\Gamma}{r_0^2}=\frac{k^2\left(2G\dfrac{M_\Gamma}{r_o}\right)}{r_0}\Rightarrow k=\sqrt{\frac{1}{2}}\Rightarrow \boxed{k=\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Άσκηση 4.8

Υποθέστε ότι ένας δορυφόρος εκτοξεύεται εφαπτομενικά από την επιφάνεια της Σελήνης με ταχύτητα $\upsilon_0 = \upsilon_c \sqrt{3/2}$, όπου υ_c η απαιτούμενη ταχύτητα για κυκλική τροχιακή κίνηση.

α) Ποιά θα είναι η τροχιά που θα ακολουθήσει ο δορυφόρος με βάση το κριτήριο της ολικής ενέργειας;

β) Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση του δορυφόρου από το κέντρο της Σελήνης r_{m} συναρτήσει της ακτίνας R της Σελήνης καθώς και την αντίστοιχη ταχύτητα του υ_m συναρτήσει της υ_0.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 16/2/2011

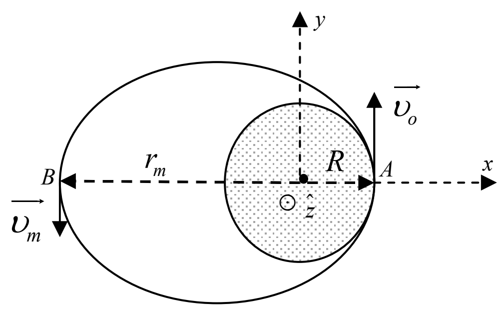
α)

$$\frac{m\upsilon_c^2}{R} = \frac{GmM}{R^2} \Rightarrow \upsilon_c = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

και $\upsilon_c^2 = \dfrac{GM}{R}$. Οπότε $\upsilon_0^2 = \dfrac{3}{2}\dfrac{GM}{R}$

Η ολική ενέργεια είναι:

$E = \dfrac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \dfrac{GmM}{R} = \dfrac{3GmM}{4R} - \dfrac{GmM}{R} = -\dfrac{GmM}{4R} < 0$ Άρα η τροχιά είναι ελλειπτική.



β)

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας και της αρχής διατήρησης της στροφορμής, οπότε έχουμε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους (r_m και υ_m):

<u>Αρχή διατήρησης της ενέργειας</u>:

$$K_0 + U_0 = K_m + U_m \Rightarrow \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2}m\upsilon_m^2 - \frac{GmM}{r_m} \quad (1)$$

<u>Αρχή διατήρησης της στροφορμής</u>: $m\upsilon_0 R = m\upsilon_m r_m \Rightarrow \upsilon_m = \dfrac{\upsilon_0 R}{r_m}$ (2)

Σημειώνεται ότι στη θέση μέγιστης απόστασης είναι: $\vec{\upsilon}_m \perp \vec{r}_m$

Λύνοντας την (1) ως προς υ_m και αντικαθιστώντας στη (2) έχουμε :

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^{\ 2}-\frac{GmM}{R}=\frac{1}{2}m\frac{R^2\upsilon_0^{\ 2}}{r_m^{\ 2}}-\frac{GmM}{r_m}\quad\Rightarrow\quad \upsilon_0^{\ 2}-\frac{2GM}{R}=\frac{R^2\upsilon_0^{\ 2}}{r_m^{\ 2}}-\frac{2GM}{r_m}\quad\Rightarrow$$

$$\left(\upsilon_0^{\ 2}-\frac{2GM}{R}\right)r_m^{\ 2}+2GMr_m-R^2\upsilon_0^{\ 2}=0$$

Αλλά $\upsilon_0^{\ 2}=\frac{3}{2}\upsilon_c^{\ 2}=\frac{3}{2}\frac{GM}{R}$

$$\left(\frac{3}{2}\frac{GM}{R}-\frac{2GM}{R}\right)r_m^{\ 2}+2GMr_m-R^2\frac{3}{2}\frac{GM}{R}=0\quad\Rightarrow -\frac{GM}{2R}r_m^{\ 2}+2GMr_m-\frac{3}{2}GMR=0\quad\Rightarrow$$

$$r_m^{\ 2}-4Rr_m+3R^2=0\Rightarrow r_m=\frac{4R\pm\sqrt{16R^2-12R^2}}{2}=\frac{4R\pm\sqrt{4R^2}}{2}=2R\pm R$$

Η λύση $r_m=R$ απορρίπτεται διότι η λύση αυτή αντιστοιχεί στο σημείο εκτόξευσης, οπότε δεχόμαστε την λύση $r_m=3R$.

Αντικαθιστώντας την τιμή στην (1) έχουμε για το μέτρο της υ_m :

$R\upsilon_o=3R\upsilon_m \quad\Rightarrow\quad \upsilon_m=\frac{\upsilon_o}{3}$ ενώ το διάνυσμά της είναι κάθετο στο $\vec{r}_m$ ($\vec{\upsilon}_m\perp\vec{r}_m$).

Δηλαδή, $\boxed{\vec{\upsilon}_m=-\frac{\upsilon_o}{3}\hat{y}}$

Άσκηση 4.9

Δορυφόρος μάζας m βρίσκεται σε κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη. Υποθέστε ότι κατά την κίνησή του ασκείται σε αυτόν δύναμη τριβής, λόγω ατμοσφαιρικού αέρα, της μορφής $\lambda\upsilon^n$, όπου υ το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου και λ, n θετικές σταθερές. Να προσδιορίσετε την παράμετρο n έτσι ώστε η απόσταση του δορυφόρου από το κέντρο της Γης, r, να μειώνεται με σταθερό ρυθμό $\left(\dfrac{dr}{dt} = \text{σταθ.}\right)$, δηλαδή μη εξαρτώμενο από το r.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε τη σχέση απόστασης και ταχύτητας για κυκλική τροχιά γενικώς υπολογίζοντας στη συνέχεια τη σχέση μεταξύ των ρυθμών μείωσης $\dfrac{d\upsilon}{dt}$ και $\dfrac{dr}{dt}$. Η επιτρόχια επιτάχυνση δίνεται από τη σχέση $\alpha_t = \dfrac{d\upsilon}{dt}$.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 26/10/2011

Για κυκλική τροχιά του δορυφόρου σε απόσταση r έχουμε:

$$G\frac{mM}{r^2} = m\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \upsilon^2 r = GM \Rightarrow$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\upsilon}\cdot\frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{2GM}{\upsilon^3}\frac{d\upsilon}{dt} \quad (1)$$

Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης του δορυφόρου $\alpha = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ καθορίζεται από την εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα στη εφαπτομενική (παράλληλη της ταχύτητας) κατεύθυνση όπου η μόνη δύναμη που ασκείται είναι η δύναμη τριβής με φορά αντίθετη της ταχύτητας:

$$m\alpha_t = f_k \Rightarrow m\frac{d\upsilon}{dt} = -\lambda\upsilon^n \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = -\frac{\lambda\upsilon^n}{m} \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{2GM}{\upsilon^3}\cdot\left(-\frac{\lambda\upsilon^n}{m}\right) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{2\lambda GM}{m}\upsilon^{n-3} = \text{σταθερό.}$$

Αλλά, $\upsilon = \left(\dfrac{GM}{r}\right)^{1/2}$, οπότε $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{2\lambda GM}{m}\left(\dfrac{GM}{r}\right)^{(n-3)/2} = \dfrac{2\lambda GM^{\frac{n-1}{2}}}{m} r^{-(n-3)/2}$

Για να εξασφαλιστεί η σταθερότητα του ρυθμού μεταβολής θα πρέπει ο εκθέτης του r να είναι μηδέν. Άρα, $\boxed{n=3}$ και $\boxed{\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{2\lambda GM}{m}}$

Εναλλακτικά:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{2\lambda GM}{m}\upsilon^{n-3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\upsilon}\left(\frac{2\lambda GM}{m}\upsilon^{n-3}\right)\cdot\frac{d\upsilon}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{2\lambda GM}{m}(n-3)\upsilon^{n-2}\left(-\frac{\lambda\upsilon^n}{m}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda^2 GM}{m^2}(n-3)\upsilon^{2n-2} = 0 \Rightarrow n-3=0 \Rightarrow n=3$$

Άσκηση 4.10

Ένας δορυφόρος βρίσκεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τη Γη. Αν είναι γνωστή η απόσταση, r_π και η ταχύτητα, υ_π του δορυφόρου στο «περίγειο», να βρεθούν τα αντίστοιχα μεγέθη, r_a, υ_a στο «απόγειο».

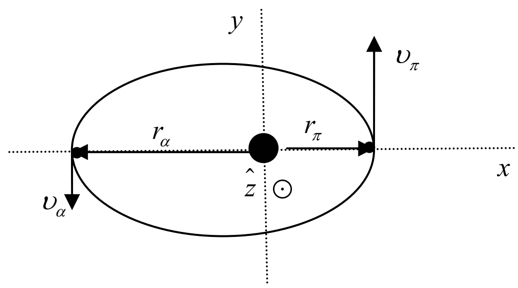
Σημείωση: *Το περίγειο είναι η κοντινότερη και το απόγειο η μακρινότερη απόσταση του δορυφόρου από το κέντρο μάζας της Γης.*

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 6/3/2012

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής για τη κίνηση του δορυφόρου από το περίγειο στο απόγειο της τροχιάς του.

$$\vec{L}_\alpha = \vec{L}_\pi \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_\alpha \times (m\vec{\upsilon}_\alpha) = \vec{r}_\pi \times (m\vec{\upsilon}_\pi) \quad \Rightarrow \quad r_\alpha \upsilon_\alpha \sin\frac{\pi}{2}\cdot\hat{z} = r_\pi \upsilon_\pi \sin\frac{\pi}{2}\cdot\hat{z} \quad \Rightarrow$$

$r_\alpha \upsilon_\alpha \cdot \hat{z} = r_\pi \upsilon_\pi \cdot \hat{z}$ Επομένως, $r_\alpha \upsilon_\alpha = r_\pi \upsilon_\pi$ (1)



Από τη διατήρηση της ολικής μηχανικής ενέργειας του δορυφόρου έχουμε:

$$E_\alpha = E_\pi \quad \Leftrightarrow \quad K_\alpha + U_\alpha = K_\pi + U_\pi$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_\alpha^{\,2} + \left(-\frac{GMm}{r_\alpha}\right) = \frac{1}{2}m\upsilon_\pi^{\,2} + \left(-\frac{GMm}{r_\pi}\right) \Rightarrow \upsilon_\alpha^{\,2} - \frac{2GM}{r_\alpha} = \upsilon_\pi^{\,2} - \frac{2GM}{r_\pi} \qquad (2)$$

Λύνοντας την (1) ως προς r_α : $r_\alpha = \dfrac{r_\pi \upsilon_\pi}{\upsilon_\alpha}$ και αντικαθιστώντας στη (2) έχουμε:

$$\upsilon_\alpha^{\,2} - \frac{2GM}{\dfrac{r_\pi \upsilon_\pi}{\upsilon_\alpha}} = \upsilon_\pi^{\,2} - \frac{2GM}{r_\pi} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_\alpha^{\,2} - \frac{2GM\upsilon_\alpha}{r_\pi \upsilon_\pi} = \upsilon_\pi^{\,2} - \frac{2GM}{r_\pi} \quad \Rightarrow$$

$$\upsilon_\alpha^{\,2} - \frac{2GM}{r_\pi \upsilon_\pi}\upsilon_\alpha + \frac{2GM}{r_\pi} - \upsilon_\pi^{\,2} = 0$$

Λύνοντας αυτή την παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς υ_α έχουμε:

$$\upsilon_\alpha = \frac{GM}{r_\pi \upsilon_\pi} \pm \sqrt{\left(\frac{GM}{r_\pi \upsilon_\pi}\right)^2 - \frac{2GM}{r_\pi} + \upsilon_\pi{}^2}$$

Κρατάμε τη λύση η οποία επαληθεύει τη σχέση $\upsilon_\alpha < \upsilon_\pi$ δηλαδή αυτή με το "–", δηλαδή :

$$\upsilon_\alpha = \frac{GM}{r_\pi \upsilon_\pi} - \sqrt{\left(\frac{GM}{r_\pi \upsilon_\pi}\right)^2 - \frac{2GM}{r_\pi} + \upsilon_\pi{}^2}$$

$$r_\alpha = \frac{r_\pi \upsilon_\pi}{\frac{GM}{r_\pi \upsilon_\pi} - \sqrt{\left(\frac{GM}{r_\pi \upsilon_\pi}\right)^2 - \frac{2GM}{r_\pi} + \upsilon_\pi{}^2}}$$

και αντικαθιστώντας στην $r_\alpha = \frac{r_\pi \upsilon_\pi}{\upsilon_\alpha}$ έχουμε:

$$r_\alpha = \frac{r_\pi \upsilon_\pi}{\frac{GM}{r_\pi \upsilon_\pi} - \sqrt{\left(\frac{GM}{r_\pi \upsilon_\pi}\right)^2 - \frac{2GM}{r_\pi} + \upsilon_\pi{}^2}}$$

5. Συστήματα Σωματιδίων

Θεωρητικά στοιχεία και μεθοδολογία

Ένα σύστημα σωματιδίων μπορεί να περιλαμβάνει διακριτά σωματίδια (πολύ μικρών διαστάσεων) ή άτομα και μόρια υλικού οπότε μπορούμε να μιλάμε για συνεχή κατανομή μάζας συγκεκριμένου σχήματος (στερεό σώμα). Η κίνηση ενός συστήματος μπορεί να περιγραφεί μέσω του δεύτερου νόμου του Newton όταν αναφερόμαστε στο ειδικό σημείο που λέγεται *κέντρο μάζας* CM. Η συνολική μάζα του συστήματος θεωρείται συγκεντρωμένη στο CM του οποίου η θέση καθορίζεται από το διάνυσμα θέσης του, $\vec{r}_{CM}$. Με τον τρόπο αυτό ορίζεται και η ταχύτητα του κέντρου μάζας, $\vec{\upsilon}_{CM}$, καθώς και η επιτάχυνσή του, $\vec{a}_{CM}$. Οπότε, ο δεύτερος νόμος διατυπώνεται ως εξής: $M\vec{a}_{CM} = \vec{F}$. Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε την ορμή και την κινητική ενέργεια αναφερόμενοι πάντοτε στην κίνηση του CM. Ένα σύστημα σωματιδίων μπορεί να διαθέτει και στροφορμή η οποία ορίζεται ως προς ένα σημείο αναφοράς. Στροφορμή διάφορη του μηδενός μπορεί να υπάρξει ακόμη και αν η κίνηση είναι αμιγώς μεταφορική (ισχύει και για μεμονωμένα σωματίδια) [4,7,8].

Πολλές φορές είναι πρακτικότερο να αναφερόμαστε στο σύστημα αναφοράς του CM. Στην περίπτωση αυτή και για διακριτά σωματίδια, οι ταχύτητες τους σε ένα αυθαίρετο αρχικό σύστημα αναφοράς, $\vec{\upsilon}_i$, μετασχηματίζονται στο CM μέσω του μετασχηματισμού του Galileo σε $\vec{u}_i$, όπου ο δείκτης i αναφέρεται στο $i-$σωματίδιο. Η ορμή του συστήματος στο CM θα είναι μηδέν ενώ η ενέργεια θα αφορά στην *εσωτερική ενέργεια* (λόγω κινήσεων ως προς το CM ή λόγω περιστροφής περί άξονα που διέρχεται από αυτό, πέραν της ενέργειας λόγω θερμικών κινήσεων). Στην επίλυση προβλημάτων, η εύρεση του CM είναι μια απαραίτητη διαδικασία, διότι μέσω αυτού μπορούν να προκύψουν και τα άλλα κινηματικά-δυναμικά μεγέθη. Στα φαινόμενα της κρούσης σε ένα *απομονωμένο* σύστημα σωματιδίων, η ορμή διατηρείται πάντοτε (για πλήρως ελαστική, ανελαστική και πλήρως ανελαστική ή αλλιώς πλαστική κρούση). Η κινητική ενέργεια διατηρείται μόνον στην περίπτωση ελαστικής κρούσης. Οι εξισώσεις διατήρησης, σε συνδυασμό με άλλα δεδομένα ενός προβλήματος, οδηγούν στην ολοκλήρωση της επίλυσης. Προσοχή χρειάζεται να δίνεται στη διάκριση, μεταξύ διατήρησης της κινητικής ενέργειας σε ένα απομονωμένο σύστημα και στη διατήρηση της ολικής ενέργειας (κινητικής και δυναμικής) κατά την κίνηση σε ένα *διατηρητικό πεδίο*. Πρόκειται για δύο διαφορετικά φαινόμενα που μπορεί να συνυπάρχουν σε ένα πρόβλημα Μηχανικής.

Άσκηση 5.1

Δύο σωματίδια με μάζες *m* και 2*m,* κινούνται έτσι ώστε τα διανύσματα θέσης τους να είναι για το πρώτο, $\vec{r}_1 = (3t + 2t^2)\hat{x} + (4 + 4t^2)\hat{y} + (5 + 2t)\hat{z}$ και για το δεύτερο, $\vec{r}_2 = (20 - t - t^2)\hat{x} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{y} + (1 + 4t)\hat{z}$ αντίστοιχα, όπου t ο χρόνος σε s. α) Αποδείξετε ότι τα σωματίδια θα συγκρουσθούν και βρείτε πότε θα συμβεί αυτό. β) Ποια δύναμη ασκείται στο κάθε σωματίδιο; γ) Διατηρείται η ορμή του συστήματος; δ) Αν μετά την κρούση τα σωματίδια ενώνονται σε ένα, να βρεθεί η θέση τους ως συνάρτηση του χρόνου.

α)

Για να συγκρουστούν τα σωματίδια θα πρέπει σε κατάλληλη χρονική στιγμή t_0 να έχουμε, $\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_2(t_0)$ (1)

Εφαρμόζουμε τη συνθήκη αυτή με τα δεδομένα και έχουμε:

$$(3t + 2t^2)\hat{x} + (4 + 4t^2)\hat{y} + (5 + 2t)\hat{z} = (20 - t - t^2)\hat{x} + (10 + 9t - 2t^2)\hat{y} + $$
$$+(1 + 4t)\hat{z} \Rightarrow$$

$$(4t + 3t^2 - 20)\hat{x} + (-6 - 9t + 6t^2)\hat{y} + (4 - 2t)\hat{z} = 0 \Rightarrow t = t_c = 2\text{ s} \quad (2)$$

Στο χρόνο αυτό τα διανύσματα θέσης θα είναι: $\vec{r}_1(t_0) = \vec{r}_2(t_0) = 14\hat{x} + 20\hat{y} + 9\hat{z}$

β)

Εφαρμόζουμε το 2^{ο} νόμο του Newton και έχουμε: $\vec{F}_1 = m\dfrac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = m(4\hat{x} + 8\hat{y})$

και $\vec{F}_2 = m\dfrac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = 2m(-2\hat{x} - 4\hat{y}) = m(-4\hat{x} - 8\hat{y})$.

γ)

Παρατηρούμε ότι: $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 =$ σταθ. Δηλαδή, αφενός μεν οι δυνάμεις είναι ανεξάρτητες του χρόνου και αφετέρου αντίθετης κατεύθυνσης (συνισταμένη ίση με μηδέν).

Επομένως, $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{F}_i = \dfrac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} =$ σταθ. (διατηρείται η ορμή).

δ)

Σύμφωνα με τα δεδομένα, τα δύο σωματίδια αφού συγκρουστούν ενσωματώνονται (πλήρως ανελαστική κρούση). Σε μια τέτοια περίπτωση, διατηρείται η ορμή του συστήματος των δύο σωματιδίων, δηλαδή:

$$P_\Sigma = p_1 + p_2 = \text{σταθ.} \Rightarrow P_\pi = P_\mu \Rightarrow m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{\upsilon}_{CM} \quad (3)$$

όπου $\vec{\upsilon}_{\text{CM}}$ η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συσσωματώματος. Επειδή, $m_1 = m$ και $m_2 = 2m$ η εξίσωση (3) γίνεται:

$$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{1}{3}\vec{\upsilon}_1 + \frac{2}{3}\vec{\upsilon}_2 = \frac{1}{3}(\vec{\upsilon}_1 + 2\vec{\upsilon}_2) = \frac{1}{3}\left[\left(3 + 4t\right)\hat{x} + 8t\hat{y} + 2\hat{z}\right] +$$
$$+\frac{2}{3}\left[\left(-2t - 1\right)\hat{x} + \left(9 - 4t\right)\hat{y} + 4\hat{z}\right] = \frac{1}{3}\left(\hat{x} + 18\hat{y} + 10\hat{z}\right)$$

Επειδή εξ ορισμού: $\frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \vec{\upsilon}_{CM}$, ολοκληρώνοντας

έχουμε: $d\vec{r}_{CM} = \vec{\upsilon}_{CM}\,dt \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \vec{\upsilon}_{CM}\,dt =$

$$= \int_{t_0}^{t} \left[\frac{1}{3}\hat{x} + \left(\frac{2}{3}9 + \frac{8}{3}t - \frac{8}{3}t \right)\hat{y} + \left(\frac{2}{3} + \frac{8}{3} \right)\hat{z} \right] dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{CM} = \frac{1}{3}\left[(t-2)\hat{x} + 18(t-2)\hat{y} + 10(t-2)\hat{z} + 42\hat{x} + 60\hat{y} + 27\hat{z} \right] \Rightarrow$$

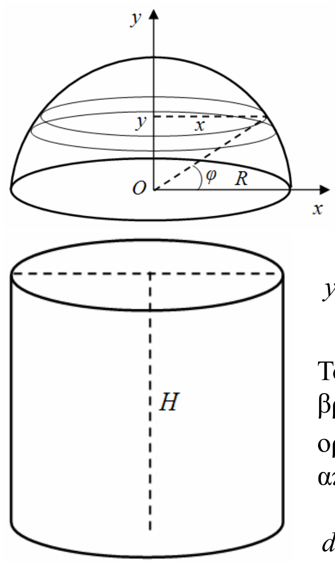
$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{3}\left[(40+t)\hat{x} + (24+18t)\hat{y} + \left(7+10t\right) \right]\hat{z}}$$

Άσκηση 5.2

Να βρείτε τη θέση του κέντρου μάζας ομογενούς στερεού σώματος που αποτελείται από κύλινδρο ύψους H με βάση ακτίνας R και από ημισφαίριο ακτίνας R.

Υπόδειξη: *Η ολοκλήρωση γίνεται ευκολότερη μέσω αλλαγής μεταβλητής, π.χ. u=cosφ*

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 19/2/2002



Ακολουθούμε την εξής μεθοδολογία:

Στο σύστημα αναφοράς με αρχή το Ο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, προσδιορίζουμε το κέντρο μάζας του κυλίνδρου, που είναι το γεωμετρικό του κέντρο, $y_c = -H/2$, λόγω συμμετρίας και στη συνέχεια το αντίστοιχο του ημισφαιρίου, $y_{CM,h}$. Το κέντρο μάζας του στερεού σώματος θα υπολογιστεί από τη σχέση:

$$y_b = \frac{M_h y_h + M_c y_c}{M_h + M_c} = \frac{M_h}{M_h + M_c} y_h + \frac{M_c}{M_h + M_c} y_c \quad (1)$$

Το κέντρο μάζας του ημισφαιρίου, λόγω κυκλικής συμμετρίας, θα βρίσκεται πάνω στον άξονα y. Θεωρούμε μια τυχαία απειροστά λεπτή οριζόντια τομή του ημισφαιρίου, η οποία θα είναι ένας δίσκος απειροστού πάχους dy. Η απειροστή μάζα του είναι,

$$dm = \rho dV = \rho \pi x^2 dy \quad (2)$$

Αλλά, $x = R\cos\varphi$ και $y = R\sin\varphi$ και αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε:

$$dm = \rho\pi R^2 \cos^2\varphi R d\left(\sin\varphi\right) = \rho\pi R^3 \cos^3\varphi d\varphi \quad (3)$$

Εφαρμόζουμε τη γενική σχέση υπολογισμού του κέντρου μάζας στερεού σώματος που είναι:

$$y_c = \frac{1}{M_h}\int_{m_h} y dm = \frac{1}{M_h}\int_0^R y\pi\rho x^2 dy \overset{(3)}{=} \frac{1}{M_h}\pi\rho R^3 \int_0^{\pi/2} R\sin\varphi\cos^3\varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{\pi\rho R^4}{M_h}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi\sin\varphi d\varphi = -\frac{\pi\rho R^4}{\rho\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi d\cos\varphi =$$

$$= -\frac{3R}{2}\int_0^{\pi/2}\cos^3\varphi d\cos\varphi$$

Θέτουμε, $u = \cos\varphi$, οπότε, $u(0) = 1$ και $u(\pi/2) = 0$ και επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$y_c = -\frac{3R}{2}\int_1^0 u^3 du = -\frac{3R}{8}\left[u\right]_1^0 = -\frac{3}{8}R\left(-1\right) = \frac{3R}{8}$$. Επομένως, $\boxed{y_c = \frac{3R}{8}}$ (4)

Με βάση τη σχέση (1), υπολογίζουμε τώρα τη θέση του κέντρου μάζας του συνολικού στερεού σώματος στο ίδιο σύστημα αναφοράς:

$y_b = \frac{M_h}{M_h + M_c} y_h + \frac{M_c}{M_h + M_c} y_c$. Υπολογίζουμε αρχικά τα δύο κλάσματα:

$$\frac{M_h}{M_h + M_c} = \frac{4\cancel{\rho\pi} R^3/6}{4\cancel{\rho\pi} R^3/6 + \cancel{\rho\pi} R^2 H} = \frac{2R}{2R+3H} \quad (5)$$

$$\frac{M_c}{M_h + M_c} = \frac{\cancel{\rho\pi} R^2 H}{4\cancel{\rho\pi} R^3/6 + \cancel{\rho\pi} R^2 H} = \frac{3H}{2R+3H} \quad (6)$$

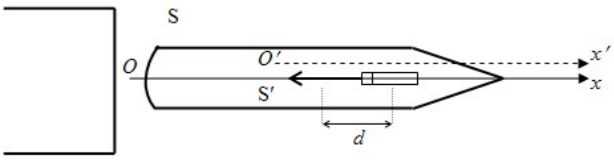
$$(1),(2),(3) \Rightarrow y_b = \frac{2R}{2R+3H}\frac{3}{8} + \frac{3H}{2R+3H}\left(-\frac{H}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y_b = \frac{3R^2 - 6H^2}{8R+12H}}$$

Στο σύστημα αναφοράς με αρχή το κέντρο της κάτω βάσης του κυλίνδρου (έστω Ο′), η θέση του κέντρου μάζας βρίσκεται εύκολα ως εξής:

$$y_{b,o'} = y_b + H = \frac{3R^2 - 6H^2}{8R+12H} + \frac{(8R+12H)H}{8R+12H} \Rightarrow \boxed{y_{b,o'} = \frac{3R^2 + 6H^2 + 8RH}{8R+12H}}$$

Άσκηση 5.3

Ένα φορτηγό μάζας $m_φ$=10000 Kg είναι ακίνητο, κοντά στην πλώρη στο κατάστρωμα ενός οχηματαγωγού πλοίου μάζας m_o=140000 kg, λίγο πριν αυτό «δέσει» στο λιμάνι. Κάποια στιγμή, το φορτηγό κινείται προς την πρύμνη (σχήμα) διανύοντας απόσταση d=15 m στο χώρο του καταστρώματος και ακινητοποιείται ξανά μετά από χρονικό διάστημα Δt.



α) Κατά πόσο θα κινηθεί (προς τα εμπρός κατά Δx_o) το πλοίο ως προς το νερό εξαιτίας της μετακίνησης αυτής; Για τόσο μικρές ταχύτητες μπορείτε να θεωρήσετε ότι το νερό δεν παρουσιάζει αντίσταση.

β) Σ' έναν επιβάτη μάζας 75 kg στο κατάστρωμα θα ασκηθεί αδρανειακή δύναμη; Αν ναι, εκτιμήστε το μέτρο της.

γ) Υποθέστε ότι συμβαίνει ακριβώς η ίδια μετακίνηση του φορτηγού, αφού όμως το πλοίο έχει «δέσει» στο λιμάνι και κατά συνέπεια παραμένει σε ηρεμία. Υπολογίστε τη μέση τάση του σχοινιού πρόσδεσης T_c. Για τα ερωτήματα (β) και (γ) υποθέστε ότι Δt=5 s.

Υπόδειξη: *Να εφαρμόσετε μετασχηματισμό συντεταγμένων (Γαλιλαίου) για το φορτηγό (από το S′ με αρχή το O′ στο σύστημα του νερού με αρχή το O) για να βρείτε τη μετακίνηση και στη συνέχεια εργαστείτε στο σύστημα S.*

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 27/8/2003

α)

Θεωρούμε το οχηματαγωγό και το φορτηγό ως ένα απομονωμένο σύστημα σωμάτων, λόγω απουσίας άλλων αλληλεπιδράσεων (ακίνητες προπέλες, αμελητέα τριβή του θαλάσσιου νερού για τόσο μικρές ταχύτητες).

Ως αρχικό σύστημα αναφοράς θεωρούμε αυτό του νερού (S), ενώ του καταστρώματος το συμβολίζουμε με S′. Η απόσταση των αρχών των δύο συστημάτων συμβολίζεται με $R = OO'$.

Θα εφαρμόσουμε το μετασχηματισμό του Γαλιλαίου για τη μετάβαση από το ένα σύστημα στο άλλο: $\boxed{x = x' + R}$

Στο σύστημα S (νερού) έχουμε:

Θέση φορτηγού πριν τη μετακίνηση: $x_{φ,1} = x'_{φ,1} + R$ (1)

Θέση φορτηγού μετά τη μετακίνηση: $x_{φ,2} = \left(x'_{φ,1} - d\right) + \left(R + \Delta x_o\right)$ (2)

όπου Δx_o είναι η (ζητούμενη-άγνωστη ακόμη) μετακίνηση του οχηματαγωγού στο ίδιο σύστημα S.

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) υπολογίζουμε τις αντίστοιχες μετακινήσεις:

$$\Delta x_φ = x_{φ,2} - x_{φ,1} = \Delta x_o - d \quad (3)$$

Στο σύστημα αυτό (οχηματαγωγού-φορτηγού), η ορμή του κατά τον άξονα x θα διατηρείται, δηλαδή:

$$P = \text{σταθ.} \Rightarrow \Delta P = 0 \Rightarrow \Delta\left(p_1 + p_2\right) = \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0 \Rightarrow \Delta p_1 = -\Delta p_2 \quad (4)$$

Οι επιμέρους μεταβολές των ορμών των δύο σωμάτων συμβαίνουν με μέσες τιμές ταχύτητας στο ίδιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα Δt και επομένως μπορούμε να γράψουμε:

$\Delta p_1 = m_o \dfrac{\Delta x_o}{\Delta t}$ και $\Delta p_2 = m_\varphi \dfrac{\Delta x_\varphi}{\Delta t}$, οπότε, με βάση την (4):

$$m_o \frac{\Delta x_o}{\cancel{\Delta t}} = -m_\varphi \frac{\Delta x_\varphi}{\cancel{\Delta t}} \Rightarrow m_o \Delta x_o = -m_\varphi \Delta x_\varphi \Rightarrow \Delta x_o = -\Delta x_\varphi \frac{m_\varphi}{m_o} \quad (5)$$

Από την (5) μέσω της (3) καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα:

$$\Delta x_o = -(\Delta x_o - d)\frac{m_\varphi}{m_o} \Rightarrow \boxed{\Delta x_o = \frac{m_\varphi d}{m_\varphi + m_o}} \quad (6)$$

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές παίρνουμε:

$\Delta x_o = \dfrac{m_\varphi d}{m_\varphi + m_o} = \dfrac{10000 \times 15}{10000 + 14000} = 1$ m Άρα $\boxed{\Delta x_o = 1}$ m κατά το $\hat{x}$

β)

Θα ασκηθεί αδρανειακή δύναμη στον επιβάτη διότι το σύστημα του οχηματαγωγού (S′) γίνεται οπωσδήποτε για κάποια χρονικά διαστήματα μη αδρανειακό (στις χρονικές στιγμές επιτάχυνσης-επιβράδυνσης). Η δύναμη αυτή έχει μέση τιμή που βρίσκεται ως εξής:

$$F = -m_p \alpha = -m_p \frac{\Delta x_o / \Delta t}{\Delta t} = -m_p \frac{\Delta x_o}{\Delta t^2} \Rightarrow \boxed{F = -m_p \frac{\Delta x_o}{\Delta t^2}} \quad (7)$$

Αντικαθιστούμε τα δεδομένα: $F = -75\dfrac{1}{5^2} = -3$ N (≈0,3 Kgf), όπου Kgf είναι χιλιόγραμμα δύναμης, δηλαδή το βάρος μάζας 1 Kg και αναφέρεται για πρακτικούς λόγους. Η κατεύθυνση της δύναμης θα είναι κατά το $-\hat{x}$, δηλαδή στην κατεύθυνση μετακίνησης του φορτηγού.

γ)

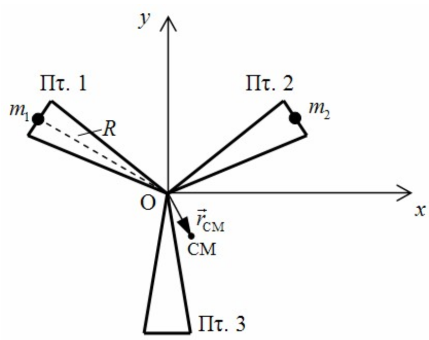
Όταν το οχηματαγωγό «δέσει» στο λιμάνι , θα παραμείνει σε ηρεμία παρά τη μετακίνηση του φορτηγού. Από τη μετακίνηση όμως θα έχουμε μεταβολή ορμής, σύμφωνα με αυτά που αναφέρθηκαν στο ερώτημα (α) και θα είναι: $\Delta p_\varphi = m_\varphi \dfrac{d}{\Delta t}$ με κατεύθυνση $-\hat{x}$. Επομένως το μέτρο της μέσης δύναμης αντίδρασης (εμφανιζόμενης ως τάση του σχοινιού) θα είναι:

$$T_c = \frac{m_\varphi d / \Delta t}{\Delta t} = \frac{m_\varphi d}{\Delta t^2} \Rightarrow \boxed{T_c = \frac{m_\varphi d}{\Delta t^2}} \quad (8)$$

$T_c = \dfrac{10000 \times 15}{25} = 6000$ N (600 Kgf ή 0,6 tn)

Σημειώνεται ότι, σύμφωνα με τα αποτελέσματα (7) και (8), οι δυνάμεις εξαρτώνται από το χρόνο μετακίνησης (αντιστρόφως ανάλογες του τετραγώνου του). Και στις δύο περιπτώσεις υπολογίσαμε <u>τη μέση τιμή τους</u>, διότι τόσο η ακριβής μεταβολή όσο και η μέγιστη τιμή τους δεν μπορούν να προκύψουν από τα δεδομένα του προβλήματος.

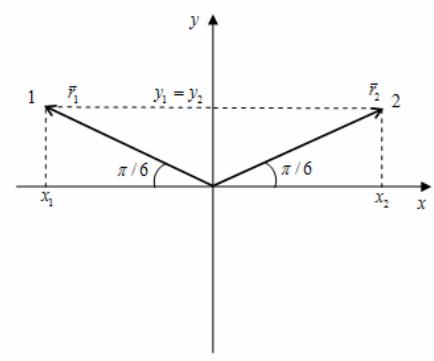
Άσκηση 5.4



Ένας ανεμιστήρας μάζας M με τρία πτερύγια ανοίγματος R σε διάταξη 120^o, όπως φαίνεται στο σχήμα, χρειάζεται ζυγοστάθμιση διότι, λόγω κατασκευαστικών ατελειών, το κέντρο μάζας του δεν συμπίπτει με το γεωμετρικό του κέντρο O στον άξονα περιστροφής (z). Υποθέστε ότι γνωρίζουμε την εσφαλμένη θέση του κέντρου μάζας CM στο σύστημα με αρχή το O στο επίπεδο xy: $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{x} + y_{CM}\hat{y}$, με $y_{CM} < 0$. Για να επιτύχουμε ζυγοστάθμιση του ανεμιστήρα τοποθετούμε δύο μικρά βαρίδια στα άκρα των πτερυγίων 1 και 2 σε αποστάσεις R από το O στο επίπεδο xy. Να βρείτε τις απαιτούμενες μάζες m_1 και m_2 των βαριδιών, συναρτήσει των x_{CM}, y_{CM}, M και R.

Υπόδειξη: *Επίτευξη ζυγοστάθμισης σημαίνει: μετάθεση του κέντρου μάζας ακριβώς στο κέντρο συμμετρίας Ο λαμβάνοντας υπόψη και τα βαρίδια.*

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 4/2/2005



Οι συντεταγμένες των βαριδίων ορίζονται από τα διανύσματα θέσης:

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y} = -R\cos\frac{\pi}{6}\hat{x} + R\sin\frac{\pi}{6}\hat{y} = -\frac{R\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{R}{2}\hat{y} \quad (1)$$

$$\vec{r}_2 = x_2\hat{x} + y_2\hat{y} = \frac{R\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{R}{2}\hat{y} \quad (2)$$

Επομένως, $x_2 = -x_1 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ και $y_2 = y_1 = \dfrac{R}{2}$

Το νέο κέντρο μάζας του ανεμιστήρα, μετά την τοποθέτηση των βαριδίων, θα πρέπει να βρίσκεται στο κέντρο συμμετρίας O του ανεμιστήρα, δηλαδή:

$$\vec{r}_{CM,\nu\varepsilon o} = \frac{M\vec{r}_{CM} + m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{M + m_1 + m_2} = 0 \Rightarrow M\vec{r}_{CM} = -m_1x_1\hat{x} - m_1y_1\hat{y} + m_2x_1\hat{x} - m_2y_1\hat{y} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}(-m_1 + m_2)x_1 = Mx_{CM} \\ (-m_1 - m_2)y_1 = My_{CM}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m_2 - m_1 = \dfrac{Mx_{CM}}{x_1} \\ m_2 + m_1 = -\dfrac{My_{CM}}{y_1}\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{M}{2}\left(-\dfrac{x_{CM}}{x_1} - \dfrac{y_{CM}}{y_1}\right) \\ m_2 = \dfrac{M}{2}\left(\dfrac{x_{CM}}{x_1} - \dfrac{y_{CM}}{y_1}\right)\end{array}\right.$$

Αν αντικαταστήσουμε τα $x_1 = -\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ και $y_1 = y_2 = \dfrac{R}{2}$, παίρνουμε:

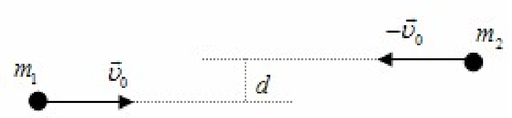
$$\boxed{\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{M}{R}\left(\dfrac{x_{CM}}{\sqrt{3}} - y_{CM}\right) \\ m_2 = \dfrac{M}{R}\left(-\dfrac{x_{CM}}{\sqrt{3}} - y_{CM}\right)\end{array}}$$

Παρατηρούμε ότι αν $x_{CM} > 0$, όπως φαίνεται στο σχήμα, θα πρέπει φυσικά,

$$m_1 > 0 \Rightarrow -\frac{x_{CM}}{x_1} - \frac{y_{CM}}{y_1} > 0 \Rightarrow \frac{x_{CM}}{x_1} + \frac{y_{CM}}{y_1} < 0 \Rightarrow \boxed{y_{CM} < 0}$$

Άσκηση 5.5

Δύο αθλητές καλλιτεχνικού πατινάζ σε πάγο μαζών m_1 και m_2 (με $m_1 > m_2$), πλησιάζουν ο ένας τον άλλο με ταχύτητες $\vec{\upsilon}_0$ και $-\vec{\upsilon}_0$ διαγράφοντας παράλληλες τροχιές απόστασης d χωρίς τριβές. Όταν βρίσκονται στην ελάχιστη τους απόσταση (ίση με d), συγκρατούνται αμοιβαία με τα χέρια σταθερά και συνεχώς. α) Προσδιορίστε τη θέση του κέντρου μάζας του συστήματος των δύο αθλητών $\vec{r}_{CM}$ τη στιγμή της συγκράτησης, επιλέγοντας ως αρχή του συστήματος αναφοράς ένα κατάλληλο σημείο στην πίστα, καθώς και την ταχύτητα του $\vec{\upsilon}_{CM}$. β) Με βάση αρχές διατήρησης, τι κίνηση θα κάνει το σύστημα αμέσως μετά τη συγκράτηση; (μεταφορική, περιστροφική ή σύνθετη)-εξηγείστε επαρκώς. Ειδικά για την απλή περίπτωση: $m_1 = m_2 = m$, εκτιμείστε τι θα αλλάξει και υπολογίστε τις αντίστοιχες ταχύτητες (π.χ. $\vec{\upsilon}_{CM}$ ή και ω).



Παραδοχή: *Για λόγους απλούστευσης, στη ροπή αδρανείας του συστήματος να μη συμπεριλάβετε τις ροπές αδρανείας του σώματος των αθλητών περί το νοητό άξονα του σώματος τους στην όρθια θέση (δηλαδή την ιδία ροπή αδρανείας τους).*

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 9/9/2005

α)

Επιλέγουμε ως αρχή του συστήματος συντεταγμένων το μέσο της κάθετης απόστασης O (ωστόσο η επιλογή είναι αυθαίρετη και θα μπορούσε κανείς να επιλέξει π.χ. το κάτω άκρο της απόστασης). Το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας θα είναι:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \frac{d}{2}(-\hat{y}) + m_2 \frac{d}{2}\hat{y}}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = -\frac{d}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\hat{y}} \quad (1)$$

Το σύστημα των δύο σωμάτων στο επίπεδο της πίστας είναι απομονωμένο και συνεπώς <u>διατηρείται η ορμή και η στροφορμή</u>. Εν γένει, η κίνηση του συστήματος θα είναι σύνθετη, δηλαδή μεταφορική και περιστροφική ταυτόχρονα. Οι ταχύτητες των κινήσεων υπολογίζονται παρακάτω:

Από τη διατήρηση της ορμής του συστήματος στο φορέα του διανύσματος $\vec{\upsilon}_0$ πριν και μετά τη συγκράτηση:

$$(m_1 + m_2)\vec{\upsilon}_{CM} = m_1\vec{\upsilon}_0 + m_2(-\vec{\upsilon}_0) \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon}_{CM} = \upsilon_0 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\hat{x} \neq 0}$$

β)

Από διατήρηση στροφορμής στο φορέα του κάθετου διανύσματος στο επίπεδο της πίστας πριν και μετά τη συγκράτηση:

$$\vec{L}_{μετα} = \vec{L}_{πριν} \Rightarrow I_{CM}\,\omega = m_1 \upsilon_0 \left(\frac{d}{2} - r_{CM} \right) + m_2 \upsilon_0 \left(\frac{d}{2} + r_{CM} \right) \Rightarrow$$

$$I_{CM}\,\omega = \frac{\upsilon_0 d}{2}\left(m_1 + m_2\right) - \upsilon_0 r_{CM}\left(m_2 - m_1\right) \quad (2)$$

Αν υποθέσουμε ότι $m_1 = m_2 = m$, τότε:

$\vec{r}_{CM} = 0$ και επομένως το κέντρο μάζας θα βρίσκεται στο μέσο της κάθετης απόστασης d ενώ πριν βρισκόταν κάτω από το O. Επίσης, $\vec{\upsilon}_{CM} = 0$, που σημαίνει ότι δε θα υπάρξει μεταφορική κίνηση, παρά μόνον περιστροφική με γωνιακή ταχύτητα που υπολογίζεται ως εξής:

Η ροπή αδρανείας του συστήματος ως προς το O, αμελώντας την ιδία ροπή αδρανείας του καθενός αθλητή, είναι:

$$I_{CM} = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2m\frac{d^2}{4} = \frac{md^2}{2}$$

Οπότε η σχέση (2) δίνει:

$$\frac{md^2}{2}\omega = m\upsilon_0\frac{d}{2} + m\upsilon_0\frac{d}{2} = m\upsilon_0 d \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{2\upsilon_0}{d}}$$

<u>Διερεύνηση-επέκταση στο ερώτημα (β)</u>

Για τη γενική περίπτωση όπου $m_1 \neq m_2$ η γωνιακή ταχύτητα υπολογίζεται ως εξής:

$$I_{CM}\,\omega = \frac{\upsilon_0 d}{2}\left(m_1 + m_2\right) - \upsilon_0 r_{CM}\left(m_2 - m_1\right) = \frac{\upsilon_0 d}{2}\left(m_1 + m_2\right) + \frac{\upsilon_0 d}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} =$$

$$I_{CM}\,\omega = \frac{\upsilon_0 d}{2}\frac{\left(m_1 + m_2\right)^2 + \left(m_1 - m_2\right)^2}{m_1 + m_2} = \upsilon_0 d\,\frac{m_1^2 + m_2^2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

Η ροπή αδρανείας σε αυτήν την περίπτωση θα είναι:

$$I_{CM}\,\omega = m_1\left(\frac{d}{2} - r_{CM}\right)^2 + m_2\left(\frac{d}{2} + r_{CM}\right)^2 =$$

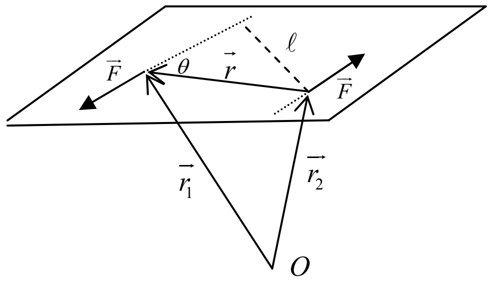
$$= m_1\left(\frac{d^2}{4} - r_{CM}^2\right) + m_2\left(\frac{d^2}{4} + r_{CM}^2\right) + 2dr_{CM}\left(m_1 + m_2\right) \text{ και τελικά:}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\upsilon_0 d\left(m_1^2 + m_2^2\right)}{\left(m_1 + m_2\right)\left[m_1\left(\frac{d^2}{4} - r_{CM}^2\right) + m_2\left(\frac{d^2}{4} + r_{CM}^2\right) + 2dr_{CM}\left(m_1 + m_2\right)\right]}}$$

Άσκηση 5.6

Να αποδείξετε ότι η ροπή ζεύγους δυνάμεων, $\vec{F}$ και $-\vec{F}$ δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου αναφοράς. Μελετήστε και σχολιάστε την αντίστοιχη περίπτωση με τη στροφορμή.

Έστω τα διανύσματα των δυνάμεων του ζεύγους που ορίζουν ένα επίπεδο. Σύμφωνα με το σχήμα, η ροπή του ζεύγους των δυνάμεων $\vec{F}$ και $-\vec{F}$, που βρίσκονται στο επίπεδο που ορίζουν, ως προς το τυχαίο σημείο του χώρου Ο είναι:



$$\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F} + \vec{r}_2 \times (-\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F} - \vec{r}_2 \times \vec{F} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F} =$$
$$rF \sin\theta \cdot \hat{z} = F\ell \cdot \hat{z}$$

όπου ℓ η απόσταση των φορέων των δυνάμεων του ζεύγους και z ο άξονας ο κάθετος στο επίπεδο των δύο δυνάμεων, δηλαδή η ροπή του ζεύγους είναι ανεξάρτητη της εκλογής του σημείου ως προς το οποίο υπολογίζεται.

Αν είχαμε ένα σύστημα δύο σωματιδίων που κινούνταν με αντιπαράλληλες ορμές $\vec{p}$ και $-\vec{p}$ ίσου μέτρου, τότε η συνολική στροφορμή (ροπή της ορμής) του συστήματος ως προς το τυχαίο σημείο Ο, υπολογίζεται παρόμοια όπου τη θέση των διανυσμάτων $\vec{F}$ του παραπάνω σχήματος θα πάρουν τα διανύσματα των ορμών:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p} + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{p}\right) = \vec{r}_1 \times \vec{p} - \vec{r}_2 \times \vec{p} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{p} =$$
$$rp \sin\theta \cdot \hat{z} = p\ell \cdot \hat{z}$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη της επιλογής του σημείου Ο.

6. Κινηματική και Δυναμική του Στερεού Σώματος

Θεωρητικά στοιχεία και μεθοδολογία

Στερεό σώμα είναι το σύστημα σωματιδίων του οποίου τα επιμέρους συστατικά-σωματίδια (ουσιαστικά άτομα ή μόρια) διατηρούν τις μεταξύ τους μέσες αποστάσεις σταθερές σε οποιαδήποτε αλλαγή προσανατολισμού. Για τη μελέτη της κίνησης του στερεού σώματος χρησιμοποιείται η μέθοδος της αναφοράς στο κέντρο μάζας CM. Οι ταχύτητες των συστατικών-σωματιδίων ως προς το CM είναι μηδενικές και επομένως οι μόνες ταχύτητες που έχουν νόημα είναι αυτές που αναφέρονται σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς που δεν είναι «συνδεδεμένο» με το στερεό σώμα. Η ταχύτητα του κάθε σημείου του σώματος είναι η συνισταμένη, δυνάμει, δύο κινήσεων. Της *μεταφορικής* και της *περιστροφικής*, οι οποίες μπορεί να συνδυάζονται και να προκύψει σύνθετη κίνηση. Η μεταφορική κίνηση ορίζεται ως εκείνη κατά την οποία, οποιοδήποτε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα σημείων του σώματος (ορίζεται έτσι ένα διάνυσμα) παραμένει παράλληλο στον εαυτό του κατά την κίνηση (το διάνυσμα αυτό παραμένει σταθερό). Επομένως κατά τη μεταφορική κίνηση όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα. Η περιστροφική κίνηση ορίζεται ως εκείνη κατά την οποία δύο τουλάχιστο σημεία του σώματος (ή έξω από αυτό αλλά εξαρτημένα από το στερεό σώμα) παραμένουν σταθερά στο χώρο. Η ευθεία που τα συνδέει αποτελεί τον *άξονα περιστροφής*. Αποδεικνύεται ότι, οποιαδήποτε αλλαγή προσανατολισμού ενός στερεού σώματος μπορεί να πραγματοποιηθεί περί έναν μοναδικό κατάλληλο άξονα (θεωρία των «*spinors*»). Επομένως, πάντοτε μπορούμε να μελετάμε την περιστροφή περί έναν άξονα, ασχέτως αν αυτός μεταβάλλεται με το χρόνο ή όχι. Σύμφωνα με το *νόμο της περιστροφικής κίνησης*, $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$, ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής προκύπτει από τη συνισταμένη ροπή $\vec{\tau}$. Ο νόμος αυτός έχει μια προφανή ποιοτική αντιστοιχία με το δεύτερο νόμο του Newton αλλά είναι ένας ανεξάρτητος νόμος. Εφαρμόζεται δε όταν έχουμε άξονες περιστροφής στιγμιαία σταθερούς ή μη επιταχυνόμενους. Είναι πρακτικό από πλευράς απομνημόνευσης, να επισημάνουμε την αντιστοιχία μεταξύ των μεγεθών της μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης: *διάνυσμα θέσης* → *γωνιακή θέση* (προσημασμένη γωνία), *ταχύτητας* → *γωνιακής ταχύτητας*, *επιτάχυνσης* → *γωνιακής επιτάχυνσης*, *μάζας* → *ροπής αδρανείας*, *δύναμης* → *ροπής* και *ορμής* → *στροφορμής*. Επίσης, υπάρχει και η ανάλογη αντιστοιχία στις αρχές διατήρησης. Η κύλιση είναι μια ειδική σύνθετη κίνηση η οποία προκύπτει από τη συνθήκη: $\vec{\upsilon} + \vec{\omega} \times \vec{r} = 0$ ή μέσω των μέτρων των διανυσμάτων σε συγκεκριμένο φορέα: $\upsilon = \omega R$. Η συνθήκη αυτή αφού εξασφαλιστεί αρχικά, διατηρείται και «κλειδώνει» (μανδαλώνει) μόνον όταν η στατική τριβή είναι μη μηδενική, όπως συμβαίνει με τους τροχούς των οχημάτων σε κανονικό-μη ολισθηρό οδόστρωμα (βλ. Παράρτημα Γ1 και [4,7,8])

Στην επίλυση προβλημάτων περιστροφικής κίνησης, εκτός από την αναγκαία κατάστρωση της εξίσωσης κίνησης, είναι πολλές φορές επιτακτικό να υπολογίσουμε τη ροπή αδρανείας. Αν πρόκειται για ένα σύνθετο στερεό σώμα, αποτελούμενο από τμήματα γεωμετρικής μορφής, υπολογίζουμε τη ροπή αδρανείας χωριστά και στη συνέχεια προσθέτουμε για να βρούμε τη συνολική. Αν το σώμα διαθέτει κοίλα τμήματα, τότε εφαρμόζουμε τη μέθοδο των «αρνητικών μαζών». Δηλαδή, υπολογίζουμε τη ροπή αδρανείας για το αντίστοιχο συμπαγές σώμα και στη συνέχεια τη ροπή αδρανείας του κοίλου τμήματος, αλλά με τη μάζα να έχει αρνητικό πρόσημο. Το άθροισμα και πάλι δίνει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Άσκηση 6.1

Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου μάζας m, δίνεται από τη σχέση: $\vec{r} = \left(3t^2 - 6t\right)\hat{x} - 4t^3\hat{y} + \left(3t+2\right)\hat{z}$.Υπολογίστε: α) Τη στροφορμή του ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων. β) Τη ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στο σωματίδιο ως προς το ίδιο σημείο.

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 19/2/2002

α)

Η στροφορμή του σωματιδίου υπολογίζεται από τη γενική σχέση ορισμού της στροφορμής:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{\upsilon} = m \cdot \vec{r} \times \vec{\upsilon} = m\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

Η ταχύτητα είναι: $\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = (6t-6)\hat{x} - 12t^2 y + 3\hat{z} = 3\left[2(t-1)\hat{x} - 4t^2\hat{y} + \hat{z}\right]$

Οπότε, αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε:

$$\vec{L} = m\left[(y\upsilon_z - z\upsilon_y)\hat{x} + (z\upsilon_x - x\upsilon_z)\hat{y} + (x\upsilon_y - y\upsilon_x)\hat{z}\right] =$$
$$3m\left\{\left[-4t^3 - (3t+2)\cdot(-4t^2)\right]\hat{x} + \left[(3t+2)\cdot 2(t-1) - (3t^2-6t)\right]\hat{y} +\right.$$
$$\left. + \left[(3t^2-6t)(-4t^2) - 2(-4t^3)(t-1)\right]\hat{z}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{L} = 3m\left[8t^2(t+1)\hat{x} + (3t^2+4t-4)\hat{y} + 4t^3(4-t)\hat{z}\right]}$$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 3m\left\{\left[8t(t+1) + 8t^2\right]\hat{x} + (6t+4)\hat{y} + \left[12t^2(4-t) - 4t^2\right]\hat{z}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{\tau} = 6m\left[4t(3t+2)\hat{x} + (3t+2)\hat{y} + 8t^2(3-t)\hat{z}\right]}$$

Άσκηση 6.2

Ένα σωματίδιο κινείται σε πεδίο κεντρικής δύναμης με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ που έχει σταθερό μέτρο. Ποιες είναι οι δυνατές τροχιές του;

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 19/2/2002

Γνωρίζουμε ότι μια δύναμη είναι κεντρική εφόσον έχει τη μορφή, $\vec{F} = f(r)\hat{r}$ και τότε, αποδεικνύεται ότι διατηρείται η στροφορμή, δηλαδή:

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$ (ή $\vec{L} = \text{σταθ.}$). Η επιτάχυνση του θα είναι, $\vec{\alpha} = \dfrac{\vec{F}}{m} = \dfrac{f(r)}{m}\hat{r}$.

Όμως, ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας είναι 0 ($\upsilon = \text{σταθ.}$) και επομένως η επιτρόχια επιτάχυνση είναι επίσης 0. Κατά συνέπεια, η μοναδική συνιστώσα επιτάχυνσης θα είναι η κεντρομόλος με αβεβαιότητα φοράς καμπυλότητας (κοίλη-κυρτή καμπύλη) άρα και προσήμου . Στην εξίσωση που ακολουθεί το + αντιστοιχεί σε ελκτική δύναμη.

$\vec{\alpha} \equiv \vec{\alpha}_n \Rightarrow \dfrac{f(r)}{m}\hat{r} = \pm\dfrac{\upsilon^2}{\rho}\hat{i}_n \Rightarrow \hat{r} = \pm\hat{i}_n$ και αφού $\hat{i}_t \perp \hat{i}_n$ θα είναι:

$\hat{r}\cdot\hat{i}_t = 0 \Rightarrow \dfrac{r\hat{r}\cdot\upsilon\hat{i}_t}{r\upsilon} = \vec{r}\cdot\vec{\upsilon} = 0 \Rightarrow \vec{r}\cdot\dfrac{d\vec{r}}{dt} = r\cdot\dfrac{dr}{dt} = 0 \Rightarrow r = \text{σταθερό}$ και ίσο με ρ .

Επομένως, <u>οι δυνατές τροχιές του σωματιδίου</u> είναι ομόκεντροι κύκλοι, με κέντρο την αρχή του συστήματος συντεταγμένων O και ακτίνες $\rho = r$ που θα ικανοποιούν την εξίσωση: $r = \dfrac{m\upsilon^2}{|f(r)|}$ ή $\boxed{r|f(r)| - m\upsilon^2 = 0}$ (2)

Επιπλέον, αίρεται η αβεβαιότητα του προσήμου στην παραπάνω εξίσωση της κεντρομόλου επιτάχυνσης, λαμβάνοντας μόνο το +. Αυτό συμβαίνει, διότι λόγω της κυκλικής τροχιάς, πρέπει να δεχθούμε αναγκαστικά ότι η δύναμη είναι ελκτική, δηλαδή $f(r) < 0$.

<u>Εφαρμογή για το πεδίο βαρύτητας</u>

Αν η μορφή της κεντρικής δύναμης είναι π.χ. ελκτική αντιστρόφου τετραγώνου, $\vec{F} = \dfrac{C}{r^2}(-\hat{r})$, τότε η εξίσωση (2) γίνεται:

$$r\left(\frac{C}{r^2}\right) - m\upsilon^2 = 0 \Rightarrow r = R = \frac{C}{m\upsilon^2}$$

Αν αντικαταστήσουμε τη σταθερά από το νόμο της παγκόσμιας έλξης, παίρνουμε:

$$r = R = \frac{GmM_\Gamma}{m\upsilon^2} \Rightarrow \boxed{R = \frac{GM_\Gamma}{\upsilon^2}}$$

Άσκηση 6.3

Κύλινδρος μάζας M και ακτίνας R είναι ανηρτημένος με δύο νήματα που απέχουν ίσες αποστάσεις από τα άκρα του κυλίνδρου. Αν τη χρονική στιγμή $t=0$ αφεθεί ο κύλινδρος ελεύθερος να ξετυλιχτεί υπό την επίδραση του βάρους του, να βρεθούν: α) οι τάσεις στα νήματα, β) η γωνιακή επιτάχυνση, γ) η χρονική εξάρτηση της στιγμιαίας ισχύος που αναπτύσσεται υπό την επίδραση της βαρυτικής δύναμης.

ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΙΤΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 19/2/2002

α)

Διατυπώνουμε τις εξισώσεις *μεταφορικής* και *περιστροφικής* κίνησης:

Εξίσωση μεταφορικής κίνησης:

$m\vec{\alpha} = -mg\hat{y} + 2T\hat{y} = \left(-mgy + 2T\right)\hat{y}$ (1) , όπου y η κατακόρυφη κατεύθυνση.

Εξίσωση περιστροφικής κίνησης του κυλίνδρου περί τον άξονα του και με αναφορά ροπών ως προς το κέντρο μάζας του CM:

$I_{CM}\vec{\alpha}_{\omega} = \vec{\tau} = 2RT(\text{-}\hat{x})$ (2) , όπου x η οριζόντια κατεύθυνση.

Εξίσωση σύζευξης των δύο παραπάνω κινήσεων, διότι έχουμε ισοδύναμη κύλιση λόγω περιέλιξης του σχοινιού:

$\upsilon = \omega R$ ή $\alpha = \alpha_{\omega} R$ (3)

Κατά τον φορέα x και y, διατυπώνουμε τις παραπάνω σχέσεις:

$(2) \Rightarrow I_{CM}\alpha_{\omega} = -2RT$ (4)

$(1) \Rightarrow m\alpha = -mg + 2T$ (5)

Από την εξίσωση (5) μπορούμε να έχουμε μια έκφραση της τάσης T και στη συνέχεια να αντικαταστήσουμε μεγέθη από τις (2) και (3), όπως ακολουθεί:

$$T = \frac{m\alpha + mg}{2} \overset{(3)}{=} \frac{-m\alpha_{\omega}R + mg}{2} = \frac{-mR(2RT/I_{CM}) + mg}{2} =$$

$$\frac{-2mR^2T + mgI_{CM}}{2I_{CM}} \Rightarrow 2I_{CM}T = -2mR^2T + mgI_{CM} \Rightarrow \boxed{T = \frac{mgI_{CM}}{2(I_{CM} + mR^2)}}$$

Αλλά, $I_{CM} = \dfrac{1}{2}mR^2$, οπότε: $T = \dfrac{m^2gR^2}{4(\frac{1}{2}mR^2 + mR^2)} \Rightarrow \boxed{T = \dfrac{mg}{6}}$

β)

$$\alpha_{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2RT}{I_{CM}} = \frac{2R(\frac{mg}{6})}{\frac{1}{2}mR^2} = \frac{2}{3}\frac{g}{R} \Rightarrow \boxed{\alpha_{\omega} = \frac{2g}{3R}} \text{και} \boxed{\alpha = \frac{2}{3}g}$$

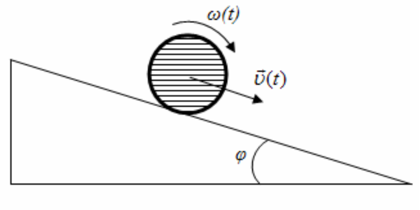
γ)

Οι τάσεις T δεν παράγουν έργο διότι δε μετατοπίζουν το εκάστοτε σημείο εφαρμογής τους. Η ταχύτητα και η θέση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου κατά το φορέα y, υπολογίζονται ως εξής:

Από (4): $\alpha = \dfrac{d\upsilon_{CM}}{dt} = \dfrac{2}{3}g \Rightarrow \boxed{\upsilon_{CM} = \dfrac{2}{3}gt}$ και $\boxed{y = \dfrac{1}{3}gt^2}$

Άσκηση 6.4

Ένα κυλινδρικό βαρέλι μάζας M_β με λεπτά (αλλά ανθεκτικά) τοιχώματα είναι γεμάτο με νερό μάζας M_ν και αφήνεται να κυλήσει σε κεκλιμένο επίπεδο από την κατάσταση ηρεμίας (σχήμα).



Υποθέστε ότι η τριβή μεταξύ των εσωτερικών τοιχωμάτων και του νερού είναι αμελητέα, δηλαδή η μάζα του νερού δεν περιστρέφεται κατά τη διάρκεια της κίνησης.

Να δείξετε ότι η μεταφορική επιτάχυνση, α , είναι ίση με αυτήν που προκύπτει στην περίπτωση ολίσθησης χωρίς τριβές, του ίδιου ή οποιουδήποτε άλλου σώματος, στο αναφερόμενο κεκλιμένο επίπεδο.

<u>Υπόδειξη:</u> *Συνιστάται, κατά την επίλυση, να κάνετε την υπόθεση ότι $M_\beta << M_\nu$.*

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 3/3/2004

Διατυπώνουμε τις εξισώσεις κίνησης:

Εξίσωση μεταφορικής κίνησης: $(M_\nu + M_\beta)\alpha = (M_\nu + M_\beta)g\sin\varphi - f_s$ (1)

Εξίσωση περιστροφικής κίνησης: $Ia_\omega = Rf_s \Rightarrow M_\beta R^2 a_\omega = Rf_s$ (2)

Λόγω σύζευξης των δύο κινήσεων (κύλιση): $a = a_\omega R$ (3)

Από τις (1),(2) και (3), υπολογίζουμε τη μεταφορική επιτάχυνση α :

$$f_s = \frac{M_\beta R^2 \alpha_\omega}{R} = M_\beta R\alpha_\omega \stackrel{(3)}{=} \frac{M_\beta R\alpha}{R} = M_\beta \alpha \quad (4)$$

$$(1),(4) \Rightarrow (M_\nu + M_\beta)\alpha = (M_\nu + M_\beta)g\sin\theta - M_\beta\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{(M_\nu + M_\beta)g\sin\theta}{2M_\beta + M_\nu} \quad (5)$$

Θεωρώντας ότι $M_\beta << M_\nu$ μπορούμε να κάνουμε στην (5) την ακόλουθη προσέγγιση:

$2M_\beta + M_\nu = M_\beta + M_\beta + M_\nu \approx M_\beta + M_\nu$, οπότε θα πάρουμε, $\boxed{\alpha \approx g\sin\theta}$

Η επιτάχυνση αυτή, πράγματι, είναι εκείνη με την οποία ένα σώμα ολισθαίνει χωρίς τριβές:

$m\alpha = mg\sin\phi \Rightarrow \alpha = g\sin\phi$

Άσκηση 6.5

Ένας συμπαγής ομογενής κύλινδρος, ακτίνας R, κυλίεται προς τα κάτω σε κεκλιμένο επίπεδο με γωνία κλίσης θ. Να βρείτε την επιτάχυνση της μεταφορικής κίνησης με τη χρήση των παρακάτω μεθόδων: α) Θεώρηση ροπών ως προς το κέντρο μάζας του, β) Θεώρηση ροπών ως προς το σημείο επαφής του (και ροπή αδρανείας περί τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο αυτό) και γ) Ενεργειακή θεώρηση: Βασιζόμενοι στο ότι η ολική μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της κίνησης.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ (ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ) - 10/12/2003

α) Θεώρηση ροπών ως προς το κέντρο μάζας

Λόγω ισορροπίας στον άξονα y : $\Rightarrow \sum \vec{F}_y = 0 \Rightarrow \quad N = Mg\cos\theta \quad (1)$

Από το $2^{ο}$ Νόμο του Newton κατά τον φορέα x: $\sum \vec{F}_x = M\vec{a}_x \Rightarrow$ $Mg\sin\theta - f_s = m\dot{\upsilon}_{CM} \quad (2)$

όπου f_s η στατική τριβή στο σημείο επαφής. Εξίσωση περιστροφικής κίνησης με τη ροπή να υπολογίζεται ως προς το κέντρο μάζας του κυλίνδρου: $\sum \tau = I\alpha_\omega \Rightarrow f_s R = I\alpha_\omega = \frac{MR}{2}\alpha_\omega \Rightarrow f_s = \frac{MR}{2}\alpha_\omega \quad (3)$

όπου, $I = \frac{1}{2}MR^2$, η ροπή αδρανείας του συμπαγούς κυλίνδρου περί τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου.

Λόγω κύλισης: $\upsilon_{CM} = \omega R \Rightarrow \dot{\upsilon}_{CM} = \dot{\omega} R$ ή $\alpha = \alpha_\omega R \ (4)$

$$(1), (4) \Rightarrow Mg\sin\theta = \frac{MR}{2}\alpha_\omega + M\alpha = M\alpha + \frac{MR}{2}\cdot\frac{\alpha}{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g\sin\theta = \alpha + \frac{1}{2}\alpha = \frac{3}{2}\alpha \Rightarrow \boxed{a = \dot{\upsilon}_{CM} = \frac{2}{3}g\sin\theta}$$

β) Υπολογισμός ως προς το σημείο επαφής (Α)

Από την εξίσωση περιστροφικής κίνησης, με ροπές υπολογισμένες ως προς το σημείο επαφής (Α) και ροπή αδρανείας περί άξονα διερχόμενο από το ίδιο σημείο και παράλληλο στον άξονα περιστροφής, παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \sum \tau_A = I_A\dot{\omega} \\ \alpha = \alpha_\omega R \end{array}\right\} \Rightarrow \left(Mg\sin\theta\right)R = I_A\cdot\frac{\alpha}{R} = \frac{3}{2}MR\alpha \Rightarrow$$

$$Mg\sin\theta = \frac{3}{2}M\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2}{3}g\sin\theta}$$

γ) <u>Ενεργειακή θεώρηση</u>

Αλλά : $W_{τριβής} = 0$ γιατί η f_s δεν μεταφέρει το σημείο εφαρμογής της.

Με βάση το θεώρημα έργου-ενέργειας, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας θα ισούται με το έργο που παράγουν οι δυνάμεις.

$$W_{ολ} = W_{βαρους} = \Delta E_{\mathrm{KIN}} \Rightarrow Mg\sin\theta \cdot s = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Αλλά λόγω κύλισης, έχουμε, $\upsilon = \omega R$ και επομένως:

$$Mg\sin\theta \cdot s = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{\upsilon^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{2}M\upsilon^2 + \frac{1}{4}M\upsilon^2 = \frac{3}{4}M\upsilon^2 \Rightarrow sg\sin\theta = \frac{3}{4}\upsilon^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon^2 = \frac{4}{3}sg\sin\theta \quad (5)$$

Επίσης, $W_{\vec{F}_{ΟΛ}} = (ma)s = \Delta E_{\mathrm{KIN}} = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ (6)

Θεωρούμε ότι όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μάζας CM, όπου ασκείται η συνισταμένη δύναμη $\vec{F}$.

$$(6) \Rightarrow \upsilon = \sqrt{2as} \Rightarrow \upsilon^2 = 2as \quad (7)$$

$$(5), (7)\ \ 2as = \frac{4}{3}sg\sin\theta \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}g\sin\theta}$$

Ως προς στιγμιαίο άξονα περιστροφής (τον άξονα κάθετο στο Α), από Θεώρημα Steiner :

$$\left.\begin{aligned} I_A &= I_{CM} + MR^2 \\ I_{CM} &= \frac{1}{2}MR^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_A = \frac{3}{2}MR^2$$

Άσκηση 6.6

Στην επιφάνεια ενός οριζόντιου συμπαγούς κυκλικού δίσκου έχει σχηματιστεί ομοιόμορφο στρώμα πάγου. Ο δίσκος περιστρέφεται ελεύθερα χωρίς τριβές με γωνιακή ταχύτητα ω_o περί τον κατακόρυφο άξονα συμμετρίας του. Τη χρονική στιγμή $t=0$, λόγω αύξησης της θερμοκρασίας ο πάγος αρχίζει να λιώνει προοδευτικά και ομοιόμορφα σε όλη την επιφάνεια, ενώ το νερό ρέει ακτινικά προς το έδαφος, με αποτέλεσμα η συνολική μάζα του δίσκου να μειώνεται από την αρχική του (με τον πάγο) M_o με ρυθμό $dM/dt=-\lambda$, όπου λ θετική σταθερά. Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα ω του δίσκου ως συνάρτηση του χρόνου. Να σημειώσετε ότι, η μάζα και άρα η ροπή αδρανείας μεταβάλλεται με το χρόνο, δηλαδή $M=M(t)$ και φυσικά $\omega=\omega(t)$.

Δίνονται: *Ροπή αδρανείας συμπαγούς ομογενούς κυλίνδρου ή δίσκου περί τον άξονα συμμετρίας του:* $I = MR^2/2$

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 3/3/2004

Έχουμε:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{\varepsilon\xi} \quad (1)$$

Όμως, $\tau_{\varepsilon\xi} = 0$ (δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές). Αλλά επίσης, από τη στιγμή που διαπιστώνεται περιστροφική κίνηση θα ισχύει, $L = I(t)\omega(t)$. Εδώ πρέπει να δοθεί προσοχή στο γεγονός ότι έχουμε μεταβαλλόμενη ροπή αδρανείας κατά συνέπεια η ω θα είναι συνάρτηση του χρόνου. Από την (1), κατά το φορέα που είναι κάθετος στην επιφάνεια του δίσκου και διέρχεται από το κέντρο του, έχουμε:

$$\frac{d(I\omega)}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} + \omega\frac{dI}{dt} = 0 \quad (2)$$

Αλλά γνωρίζουμε ότι

$I(t) = \frac{1}{2}M(t)R^2$, οπότε η (2) γίνεται: $\frac{1}{2}M(t)R^2\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\omega R^2\frac{dM(t)}{dt} = 0 \quad (3)$

Με βάση τα δεδομένα του προβλήματος:

$\frac{dM(t)}{dt} = -\lambda$ και συνεπώς:

$$\frac{1}{2}M(t)R^2\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{2}\omega R^2(-\lambda\ ) = 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = \frac{\lambda dt}{M(t)}$$

Όμως,

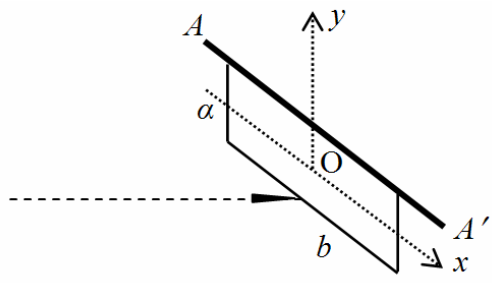
$$\int_{M_0}^{M} dM' = -\int_0^t \lambda dt' \Rightarrow M = M_0 - \lambda t$$

και τελικά

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{\lambda dt}{M_0 - \lambda t} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega'}{\omega'} = \lambda\int_0^t \frac{dt'}{M_0 - \lambda t'} \Rightarrow$$

$$[\ln\omega']_{\omega_o}^{\omega} = -\lambda[\ln(M_0 - \lambda t')]_0^t \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0\frac{M_0}{M_0 - \lambda t}}$$

Άσκηση 6.7



Μια λεπτή, επίπεδη ορθογώνια ξύλινη πινακίδα διαφημίσεων μάζας M και διαστάσεων a, b είναι αναρτημένη έτσι ώστε να μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές περί σταθερό οριζόντιο άξονα (AA' στο σχήμα). Μια μικρή σφαίρα μάζας m την κτυπά στο μέσο του κάτω άκρου της με ταχύτητα μέτρου υ_o και ενσωματώνεται μέσα σ' αυτή.

α) Να βρείτε τη ροπή αδρανείας της πινακίδας περί τον άξονα AA'.

β) Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα του συσσωματώματος, ω_o, αμέσως μετά την κρούση και να προσδιορίσετε τη θέση του κέντρου μάζας του, y_{CM}, στο σύστημα αναφοράς με αρχή το O.

γ) Ποια θα είναι η μέγιστη γωνία θ που θα σχηματίσει η πινακίδα (ως συσσωμάτωμα) με τον άξονα y στην επακόλουθη κίνηση;

Δίνεται: *Η ροπή αδρανείας της πινακίδας περί τον άξονα x (που περνά από το κέντρο μάζας της, βρίσκεται στο επίπεδό της και είναι παράλληλος στην πλευρά b):* $I_\chi = Mb^2/12$.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 4/2/2004

α)

Η ροπή αδρανείας της πινακίδας περί τον άξονα ΑΑ′ βρίσκεται με βάση το θεώρημα των *παραλλήλων αξόνων* (ή *Steiner*), δηλαδή:

$$I_{\mathrm{AA'}} = I_x + M\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{Mb^2}{12} + \frac{M\alpha^2}{4} = \frac{M}{12}(b^2 + 3\alpha^2) \quad (1)$$

β)

Λόγω συμμετρίας, το κέντρο μάζας (CM) της πινακίδας θα βρίσκεται πάνω στον άξονα y, οπότε με αρχή το Ο έχουμε:

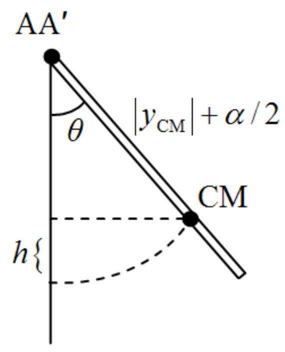
$$y_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i r_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \Rightarrow y_{\mathrm{CM}} = \frac{m(-\alpha/2) + M\cdot 0}{m+M} = -\frac{\alpha}{2}\frac{m}{m+M} \quad (2)$$

Η κρούση είναι *πλήρως ανελαστική* η δε στροφορμή του συστήματος πινακίδα-σφαίρα, πριν και μετά την κρούση, διατηρείται διότι η δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές κατά τη διάρκεια του φαινομένου. Επομένως,

$\vec{L}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{L}_{\mu\varepsilon\tau\alpha}$ και κατά το φορέα x θα είναι

$$L_{\pi\rho\iota\nu} = L_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow I_{\mathrm{AA'}}\omega_0 = m\upsilon_0\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{m\upsilon_0\alpha}{2I_{\mathrm{AA'}}} \overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\omega_0 = \frac{6m\upsilon_0\alpha}{M(b^2+3\alpha^2)}}$$

γ)



Έστω R_{CM} η ακτίνα περιστροφής του κέντρου μάζας, οπότε, $R_{CM}=|y_{CM}|+\dfrac{\alpha}{2}$ (3). Κατά την περιστροφή της πινακίδας στο πεδίο βαρύτητας, η μηχανική ενέργεια διατηρείται, δηλαδή: $E=K+U=\text{σταθ.}\Rightarrow \Delta E=\Delta K+\Delta U=0\Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{2}I_{AA'}\omega_0^2-0\right)+\left[0-(m+M)gh\right]=0\Rightarrow h=\frac{I_{AA'}\omega_0^2}{2g\left(m+M\right)} \quad (4)$$

Αλλά, από τη γεωμετρική θέση της πινακίδας στο ανώτερο σημείο (γωνία θ) έχουμε:

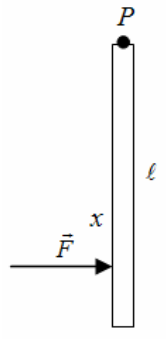
$\cos\theta=\dfrac{R_{CM}-h}{R_{CM}}=1-\dfrac{h}{R_{CM}}$ και επομένως, με βάση την (4) προκύπτει:

$\cos\theta=1-\dfrac{\dfrac{I_{AA'}\omega_0^2}{2g\left(m+M\right)}}{r_{CM}}$ και με βάση τη σχέση (3) τελικά παίρνουμε:

$$\cos\theta=1-\frac{I_{AA'}\omega_0^2}{2g\left(m+M\right)}\frac{1}{|y_{CM}|+\alpha/2}=1-\frac{m\alpha\omega_0^2}{4g\left(m+M\right)^2}\frac{1}{|y_{CM}|+\alpha/2}\Rightarrow$$

$$\boxed{\theta=ar\cos\left[1-\frac{m\alpha\omega_0^2}{4g\left(m+M\right)^2\left(|y_{CM}|+\alpha/2\right)}\right]}$$

Άσκηση 6.8



Θεωρούμε μια λεπτή ομογενή ράβδο μήκους ℓ και μάζας M, που την κρεμάμε από το ένα άκρο της με τη βοήθεια μιας άρθρωσης στο σημείο P. Μια δύναμη $\vec{F}$ πρόκειται να εφαρμοστεί για λίγο χρόνο, ώστε με την ώθηση που θα δώσει να θέσει τη ράβδο σε κίνηση εκκρεμούς, όπως το σχήμα. Η διάταξη στήριξης στο P είναι πολύ εύθραυστη και η δύναμη F πρέπει να εφαρμοστεί σε απόσταση x (που λέγεται κέντρο κρούσης), τέτοια, που να μην εκδηλώνεται δύναμη αντίδρασης στο P. Να βρεθεί αυτή η απόσταση x, ως συνάρτηση του ℓ, που ικανοποιεί αυτή την απαίτηση.

Δίδεται: *Η ροπή αδρανείας λεπτής ομογενούς ράβδου περί εγκάρσιο άξονα διερχόμενο από το ένα άκρο της* $I = M\ell^2/3$.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ (ΚΑΤΑΤΑΚΤΗΡΙΕΣ) - 10/12/2003

Για να μην εκδηλωθεί δύναμη αντίδρασης στο σημείο P, θα πρέπει το σημείο αυτό να παραμείνει σε ηρεμία (δηλαδή να αποτελέσει το κέντρο περιστροφής του κέντρου μάζας CM της ράβδου).

Στην περίπτωση αυτή, θα έχουμε, $\upsilon_{\mathrm{CM}} = \omega\ell/2 \quad (1)$

Η δύναμη, μέτρου F, προσδίδει ορμή: $\int_{\Delta t} F dt = \Delta P = M\upsilon_{\mathrm{CM}} - 0 = M\upsilon_{\mathrm{CM}} \quad (2)$

και λόγω της (1), $\Delta P = M\omega\ell/2 \quad (3)$

Όμως, προσδίδεται και στροφορμή λόγω της δράσης ροπής $\tau = xF$, που είναι:

$$\int_{\Delta t} \tau dt = \int_{\Delta t} xF dt = x\int_{\Delta t} F dt = xM\upsilon_{\mathrm{CM}} = xM\omega\ell/2 \equiv \Delta L \quad (4)$$

Επομένως, η στροφορμή έχει ως αποτέλεσμα περιστροφή με γωνιακή ταχύτητα ω που, βάσει των (2) και (4) θα είναι:

$$I_p\omega = \frac{1}{3}M\ell^2\omega = \Delta L = x\frac{1}{2}M\omega\ell \Rightarrow x = \frac{\frac{1}{3}M\ell^2\omega}{\frac{1}{2}M\omega\ell} \Rightarrow \boxed{x = \frac{2\ell}{3}}$$

Άσκηση 6.9

Ένα αεροπλάνο μάζας M λίγο πριν την προσγείωση του κινείται με ταχύτητα μέτρου υ_o ενώ οι τέσσερις κύριοι τροχοί του, ακτίνας R και μάζας m ο καθένας, δεν περιστρέφονται μέχρις ότου ακουμπήσουν στην επιφάνεια του διαδρόμου (ω_o=0). Τη στιγμή της επαφής ο κάθε τροχός υποβαστάζει το ένα τέταρτο του βάρους του αεροπλάνου, οπότε, στο σημείο επαφής (Α) αναπτύσσεται δύναμη κινητικής τριβής με συντελεστή μ_κ όσο διαρκεί η ολίσθηση. α) Να καταστρώσετε τις εξισώσεις μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης δεχόμενοι ότι $M \gg m$. β) Να γράψετε τη σχέση που δίνει την ταχύτητα ολίσθησης $\upsilon_{o\lambda}$ του τροχού συναρτήσει του χρόνου. γ) Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που θα περάσει μέχρι να αρχίσει η κύλιση. Σχολιάστε αν θα έπρεπε να δεχθούμε από την αρχή ότι η ταχύτητα του αεροπλάνου παραμένει πρακτικά σταθερή στο παραπάνω χρονικό διάστημα.

Δίνονται: *Η ροπή αδρανείας του τροχού: $I=mK^2$, όπου K η ακτίνα αδρανείας του. Ως εφαρμογή μόνο, χρησιμοποιείστε τα δεδομένα, υ_o =100 m/s, $M=2\times10^5$ Kg, m=40 Kg, R=0,6 m, K=,4 m, μ_κ=1, g=9,81 m/s^2.*

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 4/2/2004

α)

Εξίσωση μεταφορικής κίνησης:

$$\left(M+4m\right)\alpha=-f_k=-\mu_k(M+4m)g \Rightarrow \alpha=-\mu_k g \Rightarrow \upsilon=\upsilon_0-\mu_k gt \quad (1)$$

Εξίσωση περιστροφικής κίνησης: $I\alpha_\omega=\tau \quad (2)$

Αλλά, $I=mK^2$, $\tau=f_kR=\mu_k\dfrac{M+4m}{4}gR=\mu_k gR\left(\dfrac{M}{4}+m\right)$

Αλλά γνωρίζουμε ότι, $\dfrac{M}{4}>>m$, οπότε, $\tau=\dfrac{\mu_k gRM}{4}$ και επομένως:

$mK^2\alpha_\omega=\dfrac{\mu_k gRM}{4}\Rightarrow\alpha_\omega=\dfrac{\mu_k gRM}{4mK^2}\Rightarrow\dfrac{d\omega}{dt}=\dfrac{\mu_k gRM}{4mK^2}$ και ολοκληρώνοντας με $\omega_0=0$, έχουμε:

$\omega(t)=\dfrac{\mu_k gRM}{4mK^2}t \quad$ (3), η οποία με τα αριθμητικά δεδομένα δίνει:

$$\boxed{\omega(t)=4,6\times10^4 t \text{ rad/s}}$$

β)

Η ταχύτητα ολίσθησης είναι η ταχύτητα του σημείου επαφής κατά το φορέα της ταχύτητας του αεροπλάνου και δίνεται από την ακόλουθη σχέση: $\upsilon_{\text{ολ}}(t)=\upsilon(t)-\omega(t)R \quad$ (4).

Επειδή, τόσο η μεταφορική ταχύτητα όσο και η περιστροφική ταχύτητα των τροχών αεροπλάνου είναι συναρτήσεις του χρόνου, η ταχύτητα ολίσθησης θα είναι και αυτή συνάρτηση του χρόνου. Από τις εξισώσεις (1), (3) και (4) έχουμε: $\upsilon_{\text{ολ}}(t)=\left(\upsilon_0-\mu_k gt\right)-\omega(t)R=\upsilon_0-\mu_k gt-\dfrac{\mu_k gR^2M}{4mK^2}t\Rightarrow$

$$\boxed{\upsilon_{\text{ολ}}(t)=\upsilon_0-\mu_k g\left(1+\frac{R^2M}{4mK^2}\right)t} \quad (5)$$

γ)

Για να αρχίσει η κύλιση θα πρέπει να συμβεί $\upsilon_{\text{ολ}}(t)=0$ στον κατάλληλο χρόνο t_κ. Επομένως ο χρόνος αυτός θα βρεθεί από το μηδενισμό του δεξιού μέλους της εξίσωσης (5):

$$\upsilon_0-\mu_k g\left(1+\frac{R^2M}{4mK^2}\right)t_\kappa=0\Rightarrow \boxed{t_\kappa=\frac{\upsilon_0}{\mu_k g\left(1+\dfrac{R^2M}{4mK^2}\right)}}$$

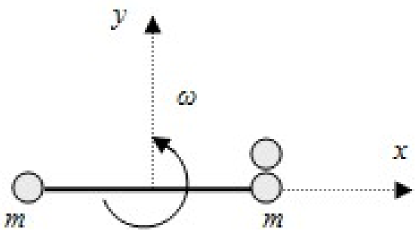
Με τα αριθμητικά δεδομένα του προβλήματος παίρνουμε:

$$\boxed{t_\kappa=3,6\times10^{-3}\ \text{s}=3,6\ \text{ms}}$$

Παρατηρούμε ότι κατά το μικρό αυτό διάστημα η ταχύτητα του αεροπλάνου παραμένει πρακτικά σταθερή, παρά την επιβράδυνση του με μέτρο g (όσο η επιτάχυνση της βαρύτητας). Αυτό τεκμηριώνεται και βέβαια ισχύει γενικότερα, από τη μεγάλη τιμή του όρου $\dfrac{R^2M}{4mK^2}$ στην έκφραση του χρόνου t_κ σε σχέση με τη μονάδα (περίπου 3000:1). Η τεράστια δύναμη ολίσθησης πριν την κύλιση οφείλεται στη μεγάλη μάζα του αεροπλάνου και εξαναγκάζει τους τροχούς να περιστραφούν με βίαιο τρόπο, με αποτέλεσμα να υπερθερμαίνονται και να εξαερώνεται ένα στρώμα από το πέλμα τους (το σύννεφο καπνού που εμφανίζεται ακαριαία κατά την επαφή των τροχών).

Άσκηση 6.10

Δύο σώματα ίσης μάζας *m* συνδέονται μέσω μιας αβαρούς ράβδου μήκους *l*. Το κέντρο μάζας του συστήματος ηρεμεί κάπου στο διάστημα, μακριά από κάθε βαρυτική επίδραση. Το σύστημα περιστρέφεται περί σταθερό άξονα z που διέρχεται από το κέντρο μάζας του με γωνιακή ταχύτητα μέτρου *ω* (σχήμα). Το ένα από τα δύο περιστρεφόμενα σώματα συγκρούεται κεντρικά με ένα τρίτο μάζας *m* που βρίσκεται σε ηρεμία και προσκολλώνται μεταξύ τους.



α) Να προσδιοριστεί η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος των τριών σωμάτων ακριβώς πριν από την κρούση. Ποια είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας μόλις συμβεί η προσκόλληση;

β) Ποια είναι η στροφορμή του συστήματος των τριών σωμάτων ως προς το κέντρο μάζας τους, ακριβώς πριν από την κρούση; Διατηρείται αυτή μετά την κρούση; Δικαιολογείστε την απάντηση σας.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 4/10/2002

α)

$$x_{CM} = \frac{m\ell/2 + m\ell/2 + m(-\ell/2)}{3m} = \frac{\ell}{6}$$

$$\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{m(\omega\ell/2)\hat{y} + 0 + m(\omega\ell/2)(-\hat{y})}{3m} = 0$$

$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} =$ σταθ. και $\underbrace{\vec{p}_1 + \vec{p}_3}_{=0} + \underbrace{\vec{p}_2}_{=0} = 0$, επομένως το συσσωμάτωμα εκτελεί μόνο περιστροφική κίνηση. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του συστήματος θα είναι:

$\boxed{\vec{\upsilon}_{CM} = \frac{\vec{P}}{m} = 0}$ όπως αναμέναμε.

β)

Η στροφορμή του συστήματος των σωμάτων θα είναι το άθροισμα των επιμέρους στροφορμών και βεβαίως διατηρείται διότι το σύστημα είναι απομονωμένο:

$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3$, όπου $L_i = \vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i\vec{u}_i$ ($i = 1,2,3$) η στροφορμή του κάθε σώματος. Η συνολική στροφορμή, πριν την κρούση, <u>ως προς το CM</u> είναι:

$$\left.\begin{aligned}
\vec{L}_1 &= \underbrace{\left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{6}\right)\hat{x}}_{\vec{r}_1} \times m\underbrace{\frac{\omega\ell}{2}\hat{y}}_{\vec{u}_1} = m\omega\frac{\ell^2}{6}(\hat{x}\times\hat{y}) = m\omega\frac{\ell^2}{6}\hat{z} \\
\vec{L}_3 &= \underbrace{\left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{6}\right)(-\hat{x})}_{\vec{r}_3} \times m\underbrace{\frac{\omega\ell}{2}(-\hat{y})}_{\vec{u}_3} = m\omega\frac{\ell}{2}(\hat{x}\times\hat{y}) = m\omega\frac{\ell^2}{3}\hat{z} \\
\vec{L}_2 &= 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\vec{L} = m\omega\frac{\ell^2}{6}\hat{z} + \vec{0} + m\omega\frac{\ell^2}{3}\hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \frac{1}{2}m\omega\ell^2\hat{z}}$$

Άσκηση 6.11

Ο ρυθμός περιστροφής της Γης και της Σελήνης περί τον εαυτό τους θα έπρεπε να ελαττώνεται συνεχώς ($\alpha_{\varpi}=d\omega/dt<0$) από την αρχή της δημιουργίας τους, λόγω εσωτερικών τριβών που προκαλούνται από μετακινήσεις μαζών οφειλόμενες σε ασυμμετρία της βαρυτικής έλξης (π.χ. στη Γη αυτό προδίδεται από τις παλιρροϊκές κινήσεις). α) Υποθέστε ότι ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας περιστροφής είναι $dK/dt=-\lambda\omega^{\nu}$, όπου λ μια θετική σταθερά και $1\leq\nu<2$. Βρείτε την έκφραση για το χρόνο που απαιτείται ώστε να μειωθεί η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της Γης κατά 10% σε σχέση με τη σημερινή ω_o. β) Να συγκρίνετε με τον αντίστοιχο χρόνο για τη Σελήνη για ίδια λ και ν, αν υποθέσουμε ότι περιστρεφόταν σήμερα με τη γωνιακή ταχύτητα της Γης (ω_o). Δικαιολογείστε το ότι η Σελήνη σήμερα στρέφει προς τη Γη πάντα την ίδια πλευρά. Θεωρείστε τα δύο σώματα ως ομογενείς σφαίρες. Επίσης διευκολύνει να αναφερθείτε στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς της τροχιακής κίνησης της Σελήνης γύρω από τη Γη (δηλαδή «παγώνοντας» την τροχιακή κίνηση της Σελήνης).

Δίνονται: $I_{\sigma\phi}=\frac{2}{5}MR^2$, $M_\Gamma/M_\Sigma=8{,}13$, $R_\Gamma/R_\Sigma=3{,}66$

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 4/10/2002

α)

$$\frac{dk}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}I\omega^2\right)=\frac{1}{2}I2\omega d\omega=I\omega\frac{d\omega}{dt}\Rightarrow-\lambda\omega^{\nu}=I\omega\frac{d\omega}{dt}$$

$$dt=-\frac{I}{\lambda}\omega^{1-\nu}d\omega\Rightarrow t=-\frac{I}{\lambda}\int_{\omega_0}^{0,9\omega_0}\omega^{1-\nu}d\omega=-\frac{I}{\lambda}\left[\frac{\omega^{2-\nu}}{2-\nu}\right]_{\omega_0}^{0,9\omega_0}\Rightarrow$$

$$t=-\frac{I}{\lambda(2-\nu)}\left[\left(0,9\omega_0\right)^{2-\nu}-\omega_0^{2-\nu}\right]=\frac{I\omega_0^{2-\nu}}{\lambda(2-\nu)}\left(1^{2-\nu}-0,9^{2-\nu}\right)=$$

$$=\frac{\mathrm{I}\omega_0^{2-\nu}}{\lambda(2-\nu)}\left(1-\frac{9^2}{10^2}\frac{9^{-\nu}}{10^{-\nu}}\right)=\frac{I\omega_0^{2-\nu}}{\lambda(2-\nu)}\left[1-\left(\frac{10}{9}\right)^{\nu}\frac{81}{100}\right],\text{για}\rightarrow\nu=1\Rightarrow$$

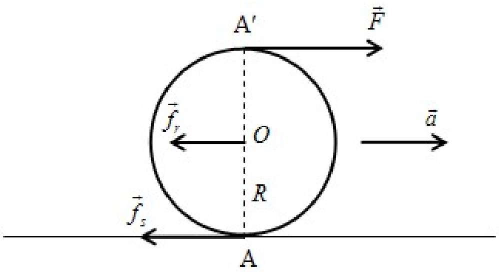
$$t=\frac{I\omega_0^{2-\nu}}{\lambda(2-\nu)}\left(1-\frac{810}{900}\right)=\frac{I\omega_0^{2-\nu}}{\lambda(2-\nu)}\frac{1}{10}$$

β)

$$\frac{t_\Gamma}{t_\Sigma}=\frac{I_\Gamma}{I_\Sigma}=\left(\frac{M_\Gamma}{M_\Sigma}\right)\left(\frac{R_\Gamma}{R_\Sigma}\right)^2\cong110$$

Στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς της τροχιακής κίνησης της Σελήνης, διαπιστώνουμε ότι έχει σήμερα $\omega_\Sigma=0$! (δηλαδή δεν εκτελεί περιστροφή περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της). Αυτό συμβαίνει διότι, λόγω της πολύ μικρότερης ροπής αδρανείας σε σχέση με τη Γη (110 φορές μικρότερη), είχε συνεχή και γρηγορότερο, αντίστοιχο, ρυθμό επιβράδυνσης από την εποχή της δημιουργίας της (πριν μερικά δισεκατομμύρια χρόνια) μέχρι που έπαψε να περιστρέφεται.

Άσκηση 6.12



Στο ανώτατο σημείο (A′) του τροχού μάζας m ενός οχήματος με μάζα M, ασκείται συνεχώς μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $\vec{F}$.

Ο τροχός τείνει να κυλήσει, και τότε, εκτός της στατικής τριβής $\vec{f}_s$, ασκείται η σταθερή δύναμη $\vec{f}_r$ λόγω τριβών κύλισης.

α) Να βρείτε το μέτρο της μεταφορικής και γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού.

β) Ποια είναι η ελάχιστη F για να υπάρξει κίνηση και ποια θα ήταν αυτή αν η $\vec{F}$ ασκούνταν στο O;

Θεωρείστε τον τροχό ως συμπαγή ομογενή κύλινδρο ακτίνας R και αμελείστε κάθε άλλη δύναμη τριβής του οχήματος.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 27/8/2003

α)

Καταστρώνουμε τις εξισώσεις μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης κατά το φορέα κίνησης και άξονα περιστροφής αντίστοιχα:

Εξίσωση μεταφορικής κίνησης: $(M+m)\alpha = F - f_s - f_r$ (1)

Εξίσωση περιστροφικής κίνησης: $I\alpha_\omega = (F + f_s)R$ (2)

Εξίσωση σύζευξης των δύο κινήσεων (κύλιση): $\alpha = \alpha_\omega R$ (3)

Όπου, I η ροπή αδρανείας του τροχού, δηλαδή $I = \frac{1}{2}MR^2$ (4)

Από (2) και (3) παίρνουμε: $f_s = \frac{m\alpha}{2} - F$ (5)

$$(1),(5) \Rightarrow F - \frac{m\alpha}{2} + F - f_r = (M+m)\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2F - f_r}{M + 3m/2}}$$

Επίσης, μέσω της (3) προκύπτει: $\boxed{\alpha_\omega = \frac{2F - f_r}{R\left(M + 3m/2\right)}}$

β)

Αν η δύναμη $\vec{F}$ εφαρμοζόταν στο κέντρο μάζας του τροχού, O, η εξίσωση (2) θα γινόταν: $I\alpha_\omega = f_s R \Rightarrow f_s = \frac{m\alpha}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{F - f_r}{M + 3m/2}}$

και $\boxed{\alpha_\omega = \frac{F - f_r}{M + 3m/2}}$

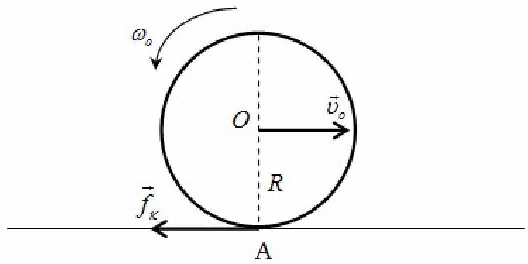
Η συνθήκη για να υπάρξει κίνηση είναι: $\boxed{a > 0 \Rightarrow 2F > f_r}$

Για τη συνήθη περίπτωση εφαρμογής της $\vec{F}$ στο κέντρο μάζας του τροχού, η συνθήκη είναι: $\boxed{F > f_r}$

Άσκηση 6.13

Υποθέστε ότι ένας από τους τροχούς οχήματος, μετά από πρόσκρουση, μάζας m και ακτίνας R, αποσυνδέεται και εκτινάσσεται πίσω ενώ συνεχίζει να περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_o. Ο τροχός ακουμπά στο οδόστρωμα στο χρόνο $t=0$, με αρχική μεταφορική ταχύτητα υ_o και με φορά όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής κινητικής τριβής ελαστικού-οδοστρώματος είναι μ_κ.

α) Να καταστρώσετε τις εξισώσεις μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης του τροχού. β) Να βρείτε τη μεταφορική και τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού ως συναρτήσεις του χρόνου. γ) Να δώσετε την έκφραση της ταχύτητας ολίσθησης $\upsilon_{o\lambda}(t)$ του τροχού (ταχύτητα του σημείου επαφής) συναρτήσει του χρόνου.



δ) Να γράψετε τη συνθήκη για την οποία θα υπάρξει σύγχρονος μηδενισμός και των δύο ταχυτήτων. Να ελέγξετε αν ισχύει η συνθήκη και αν ναι, να υπολογίσετε το χρόνο αυτό t_σ με τα δεδομένα που δίνονται.

__*Δίνονται:*__ Η ροπή αδρανείας του τροχού: $I = mK^2$, όπου K η ακτίνα αδρανείας του. $\upsilon_o = 30$ m/s, $\omega_0 = 144$ rad/s, $m = 10$ kg, $R = 0{,}3$ m, $K = 0{,}25$ m, $\mu_k = 1$, $g = 9{,}8$ m/s^2.

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 24/6/2004

α)

Εξίσωση μεταφορικής κίνησης στο φορέα κίνησης:

$$M\alpha = f_k = -\mu_k M g \quad (1)$$

(η μόνη δύναμη που ασκείται στον τροχό είναι αυτή που οφείλεται στην κινητική τριβή).

Εξίσωση περιστροφικής κίνησης στο φορέα του άξονα περιστροφής:

$$I_{CM}\alpha_\omega = -Rf_k = -\mu_k MgR \quad (2)$$

(η μόνη ροπή που ασκείται στον τροχό είναι αυτή που οφείλεται στη δύναμη της κινητικής τριβής ως προς το κέντρο του).

β)

Από την (1) έχουμε: $\alpha = -\mu_k g \Rightarrow \boxed{\upsilon = \upsilon_0 - \mu_k g t}$

Από την (2) έχουμε: $\alpha_\omega = -\dfrac{\mu_k g}{R}\left(\dfrac{R}{K}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\omega R = \omega_0 R - \mu_k g \left(\dfrac{R}{K}\right)^2 t}$ (3)

γ)

Η ταχύτητα ολίσθησης βρίσκεται για κάθε χρονική στιγμή από τη σχέση: $\boxed{\upsilon_{o\lambda} = \upsilon + \omega R}$ (θεωρούμε, $\upsilon > 0$ κατά τη διεύθυνση κίνησης και το $\omega > 0$ κατά τη φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού). Οπότε:

$$\upsilon_{o\lambda}(t) = \upsilon_0 - \mu_k g t + \omega_0 R - \mu_k g\left(\frac{R}{K}\right)^2 t = \left(\upsilon_0 + \omega_0 R\right) + \mu_k g\left[1 + \left(\frac{R}{K}\right)^2\right] t$$

δ)

Για να υπάρξει σύγχρονος μηδενισμός της μεταφορικής και περιστροφικής ταχύτητας θα πρέπει για συγκεκριμένο χρόνο t_σ να ισχύει:

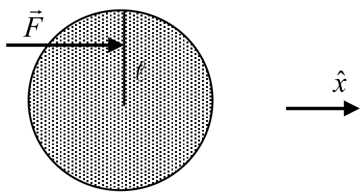
$\upsilon(t_\sigma) = \omega(t_\sigma)R \overset{(1),(2)}{\Rightarrow} \quad \dfrac{\upsilon_0}{\mu_k g} = \dfrac{\omega_0 R}{\mu_k g}\left(\dfrac{K}{R}\right)^2 \Rightarrow \upsilon_0 = \omega_0 R\left(\dfrac{K}{R}\right)^2$. Αν θέσουμε $\lambda = \left(\dfrac{R}{K}\right)^2$ τότε η συνθήκη ταυτόχρονου μηδενισμού γίνεται: $\boxed{\upsilon_0 = \dfrac{\omega_0 R}{\lambda}}$

Μέσω της παραμέτρου λ η ροπή αδρανείας γράφεται: $I_{CM} = \dfrac{1}{\lambda}MR^2$, οπότε η φυσική σημασία του μεγέθους αυτού είναι το ότι εκφράζει τον παράγοντα μείωσης της ροπής αδρανείας σε σχέση αυτήν ενός λεπτού κυλινδρικού κελύφους (π.χ. για τον κύλινδρο είναι $\lambda = 2$).

Ελέγχουμε αν ισχύει η συνθήκη σύγχρονου μηδενισμού: $\dfrac{\omega_0 R}{\lambda} = \dfrac{144 \times 0,3}{\left(0,3/0,25\right)^2} = 30$ s και άρα ισούται με την υ_0 ($= 30$ s).

Ο χρόνος σύγχρονου μηδενισμού προκύπτει: $t_\sigma = \dfrac{\upsilon_0}{\mu_k g} = \dfrac{30}{1 \times 9,8}\text{ s} \approx 3.1\text{ s}$

Άσκηση 6.14



Ομογενής συμπαγής κυκλικός δίσκος μάζας M και ακτίνας R, είναι τοποθετημένος σε οριζόντια θέση πάνω σε μια επιφάνεια και βρίσκεται σε ηρεμία. Ο συντελεστής τριβής των δύο επιφανειών θεωρείται μηδενικός. Μια σταθερή δύναμη $\vec{F} = F_0\hat{x}$, εφαρμόζεται σε κάποιο σημείο του δίσκου (όπως στο σχήμα) που απέχει αυθαίρετη απόσταση ℓ από το κέντρο του, επί μικρό χρονικό διάστημα δt (σαν ένα βραχύ κτύπημα). Να διερευνήσετε την κίνηση που θα εκτελέσει ο δίσκος μετά το χρόνο δt (μεταφορική; περιστροφική; σύνθετη;) και να υπολογίσετε τις αντίστοιχες ταχύτητες. Ποια είναι η σχετική θέση ℓ / R, ώστε η κίνηση να είναι συμβατή με «εικόνα» κύλισης;

<u>Υπόδειξη:</u> *Θεωρείστε τις πεπερασμένες μεταβολές γραμμικής ορμής, $\delta P = M\delta\upsilon_{CM}$ και στροφορμής, $\delta L = I\delta\omega$ εξαιτίας της ώθησης της F_0. Η εικόνα κύλισης ισοδυναμεί με τη συνθήκη ώστε κάθε σημείο του δίσκου βρίσκεται μια φορά σε στιγμιαία ηρεμία σε κάθε πλήρη περιστροφή του.*

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 4/2/2005

Η εφαρμογή της δύναμης $\vec{F}$ έχει ως αποτέλεσμα την πρόσδοση πεπερασμένης ποσότητας τόσο ορμής $\Delta\vec{p}$ όσο και στροφορμής $\Delta\vec{L}$ που υπολογίζονται μέσω του θεωρήματος της ορμής-ώθησης ως εξής:

$$\int_{\delta t} F_0 dt = \Delta p = M\Delta\upsilon_{CM} \Rightarrow F_0\delta t = M\Delta\upsilon_{CM} = M(\upsilon_{CM} - 0) \Rightarrow \boxed{\upsilon_{CM} = \frac{F_0\delta t}{M}}$$

Επίσης,

$$\int_{\delta t} \tau dt = \int_{\delta t} F_0\ell dt = \Delta L = I_{CM}\Delta\omega \Rightarrow F_0\ell\delta t = I_{CM}\Delta\omega = M(\omega - 0) \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{F_0\ell\delta t}{I_{CM}}}$$

Για να έχουμε «εικόνα» κύλισης θα πρέπει, $\upsilon_{CM} = \omega R$ και τότε θα έχουμε:

$\dfrac{F_0\delta t}{M} = \dfrac{F_0\ell\delta t}{I_{CM}}R \Rightarrow I_{CM} = M\ell R$ και θέτοντας $I_{CM} = \dfrac{1}{2}MR^2$ καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα: $\boxed{\ell = \dfrac{R}{2}}$

Δηλαδή, αυτό θα συμβεί αν η δύναμη εφαρμοστεί κατά το φορέα που διέρχεται από το σημείο που βρίσκεται στο μέσο της ακτίνας του δίσκου.

Άσκηση 6.15

Να βρείτε το κέντρο μάζας $\vec{r}_{CM}$ ενός συμπαγούς ομογενούς δίσκου μάζας M και ακτίνας R στον οποίο έχουν ανοιχτεί τρεις κυκλικές οπές: μία στο κέντρο με ακτίνα R_0=R/20 και δύο αντιδιαμετρικά, διαμέτρων R_1=R/12, $R_2 = R/8$ στις θέσεις $(R/2, R/2)$ και $(-R/2, -R/2)$, αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα να δοθεί συναρτήσει της ακτίνας R. Υπάρχει μετακίνηση του κέντρου μάζας σε σχέση με του αρχικού συμπαγούς δίσκου και σε ποια κατεύθυνση; Ποιά θα έπρεπε να ήταν η θέση της δεύτερης οπής (ακτίνας $R_2 = R/8$) έτσι ώστε το κέντρο μάζας να μη μετακινηθεί καθόλου;

Υπόδειξη: *Χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο των αρνητικών μαζών: δηλαδή, στον υπολογισμό του κέντρου μάζας θα συμμετέχουν τρία σώματα, το υποθετικό αρχικό προτού αφαιρεθεί το υλικό και τα δύο κομμάτια που αφαιρέθηκαν αλλά με μάζα το αρνητικό της απούσας μάζας. Το πάχος του δίσκου δεν επηρεάζει τη λύση λόγω αξονικής συμμετρίας του κυλίνδρου. Δίνεται:*

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

Το κέντρο μάζας του αρχικού ομογενούς δίσκου μάζας M, λόγω συμμετρίας, είναι στο κέντρο του (0,0,0) όπου θεωρούμε την αρχή του συστήματος αναφοράς, ενώ η μάζα του υπολογίζεται από τη σχέση: $M = \pi R^2 h\rho$ όπου h το πάχος του και ρ η πυκνότητα του.

Θεωρούμε τις μάζες των κυλινδρικών κομματιών που αφαιρέθηκαν ως σημειακές με αρνητικό πρόσημο τοποθετημένες στις θέσεις των κέντρων τους (που είναι τα κέντρα μάζας τους αν τις θεωρήσουμε μόνες τους) . Δηλαδή:

$$M_o = -\pi\left(\frac{R}{20}\right)^2 \cdot h\cdot\rho \quad \text{στη θέση } (x_o, y_o, 0) = (0,0,0)$$

$$M_1 = -\pi\left(\frac{R}{12}\right)^2 \cdot h\cdot\rho \quad \text{στη θέση } (x_1, y_1, 0) = \left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}, 0\right)$$

$$M_2 = -\pi\left(\frac{R}{8}\right)^2 \cdot h\cdot\rho \quad \text{στη θέση } (x_2, y_2, 0) = \left(-\frac{R}{2}, -\frac{R}{2}, 0\right)$$

Το πάχος του κυλινδρικού δίσκου δεν επηρεάζει τη λύση καθώς μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το C.M. βρίσκεται στο επίπεδο $x-y$ με $z=0$ στο μέσο του ύψους του κυλινδρικού δίσκου.

Η θέση $\vec{r}_{CM} = (x'_{CM}, y'_{CM}, 0)$ του νέου κέντρου μάζας προσδιορίζεται από τις εξισώσεις :

$$x'_{CM} = \frac{Mx + M_o x_o + M_1 x_1 + M_2 x_2}{M + M_o + M_1 + M_2} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2}{M + M_o + M_1 + M_2}$$

$$y'_{CM} = \frac{My + M_o y_o + M_1 y_1 + M_2 y_2}{M + M_o + M_1 + M_2} = \frac{M_1 y_1 + M_2 y_2}{M + M_o + M_1 + M_2}$$

$$x'_{CM}=\frac{-\pi\left(\frac{R}{12}\right)^2 h\rho\frac{R}{2}-\pi\left(\frac{R}{8}\right)^2 h\rho\left(-\frac{R}{2}\right)}{\pi R^2 h\rho-\pi\left(\frac{R}{20}\right)^2 h\rho-\pi\left(\frac{R}{12}\right)^2 h\rho-\pi\left(\frac{R}{8}\right)^2 h\rho}=\frac{-\left(\frac{R}{12}\right)^2\frac{R}{2}-\left(\frac{R}{8}\right)^2\left(-\frac{R}{2}\right)}{R^2-\left(\frac{R}{20}\right)^2-\left(\frac{R}{12}\right)^2-\left(\frac{R}{8}\right)^2}=$$

$$=\frac{R^3\left(\frac{1}{128}-\frac{1}{288}\right)}{R^2\left(1-\frac{1}{400}-\frac{1}{144}-\frac{1}{64}\right)}=\frac{R\frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{18}\right)}{\frac{1}{16}\left(16-\frac{1}{25}-\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{5}{72}}{\frac{15539}{900}}R=\frac{3}{746}R$$

και αντίστοιχα,

$$y'_{CM}=\frac{-\pi\left(\frac{R}{12}\right)^2 h\rho\frac{R}{2}-\pi\left(\frac{R}{8}\right)^2 h\rho\left(-\frac{R}{2}\right)}{\pi R^2 h\rho-\pi\left(\frac{R}{20}\right)^2 h\rho-\pi\left(\frac{R}{12}\right)^2 h\rho-\pi\left(\frac{R}{8}\right)^2 h\rho}=\frac{-\left(\frac{R}{12}\right)^2\frac{R}{2}-\left(\frac{R}{8}\right)^2\left(-\frac{R}{2}\right)}{R^2-\left(\frac{R}{20}\right)^2-\left(\frac{R}{12}\right)^2-\left(\frac{R}{8}\right)^2}=$$

$$=\frac{R^3\left(\frac{1}{128}-\frac{1}{288}\right)}{R^2\left(1-\frac{1}{400}-\frac{1}{144}-\frac{1}{64}\right)}=\frac{R\cdot\frac{1}{16}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{18}\right)}{\frac{1}{16}\left(16-\frac{1}{25}-\frac{1}{9}-\frac{1}{4}\right)}=\frac{\frac{5}{72}}{\frac{15539}{900}}R=\frac{3}{746}R$$

Άρα : $$\vec{r}'_{CM}=(x'_{CM},y'_{CM},0)=\left(\frac{3R}{746},-\frac{3R}{746},0\right)$$

Δηλαδή έχουμε μετατόπιση του C.M. στη διεύθυνση της διαγωνίου των αξόνων x,y με κατεύθυνση προς το κέντρο της οπής μικρότερης διαμέτρου R_1.

Για να αποφεύγαμε τη μετακίνηση του C.M θα έπρεπε: $x'_{CM}=x_{CM}=0$ και $y'_{CM}=y_{CM}=0$ δηλαδή να ισχύει:

$$M_1x_1+M_2x_2=0 \quad\Rightarrow\quad x_2=-\frac{M_1x_1}{M_2}$$

$$M_1y_1+M_2y_2=0 \quad\Rightarrow\quad y_2=-\frac{M_1y_1}{M_2}$$

Αναλυτικότερα παίρνουμε:

$$x_2=-\frac{-\pi\left(\frac{R}{12}\right)^2 h\rho\frac{R}{2}}{-\pi\left(\frac{R}{8}\right)^2 h\rho}=-\frac{\frac{R^3}{288}}{\frac{R^2}{128}}=-\frac{128}{288}R=-\frac{4}{9}R$$

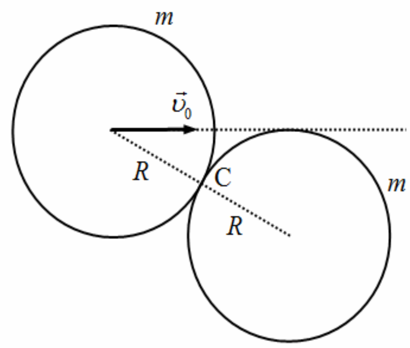
$$y_2 = -\frac{-\pi\left(\frac{R}{12}\right)^2 h\rho\frac{R}{2}}{-\pi\left(\frac{R}{8}\right)^2 h\rho} = -\frac{\frac{R^3}{288}}{\frac{R^2}{128}} = -\frac{128}{288}R = -\frac{4}{9}R$$

Δηλαδή θα έπρεπε η διάνοιξη της οπής διαμέτρου $R_2 = R/8$ να γίνει στη θέση $(x_2', y_2') = \left(-\frac{4R}{9}, -\frac{4R}{9}\right)$.

<u>Εφαρμογή</u>: Στους δίσκους των φρένων μηχανών και σπορ αυτοκινήτων ανοίγονται πολλές οπές περιμετρικά (διάτρητες δισκόπλακες) με σκοπό να αποβάλλεται γρηγορότερα το στρώμα νερού της βροχής. Οι οπές συνήθως έχουν ίδια διάμετρο και κατανέμονται με τέτοιο τρόπο που το κέντρο μάζας του διάτρητου δίσκου να συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο του (άξονας). Πρέπει δηλαδή να παραμένει «ζυγοσταθμισμένος» για την αποφυγή ανεπιθύμητων ταλαντώσεων, που με τη σειρά τους, συνεπάγονται αντιδράσεις στον άξονα περιστροφής και παράλληλα φθορές.

Άσκηση 6.16

Δυο όμοιοι λεπτοί ομογενείς δίσκοι μάζας m και ακτίνας R ολισθαίνουν χωρίς τριβή πάνω σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς να περιστρέφονται. Στην αρχική κατάσταση, ο ένας δίσκος είναι ακίνητος ως προς το οριζόντιο επίπεδο ενώ ο άλλος πλησιάζει με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon}_0$ με διεύθυνση εφαπτομενική προς τον ακίνητο δίσκο (βλέπε σχήμα). Επακολουθεί πλαστική κρούση των δύο δίσκων. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα:



α) Την ταχύτητα του κέντρου μάζας $\vec{\upsilon}_C$ του συστήματος των δύο δίσκων.

β) Τη στροφορμή του συστήματος των δύο δίσκων, μόλις πριν την κρούση, ως προς το κέντρο μάζας του (C).

γ) Να υπολογίστε τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ω του συστήματος των δύο δίσκων μετά την κρούση.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 29/1/2010

α)

Από την αρχή διατήρησης της ορμής σε πλαστική κρούση έχουμε: $\vec{p}_0 = \vec{p}_\sigma$

όπου $\vec{p}_0$ η αρχική ορμή και $\vec{p}_\sigma$ η ορμή του συσσωματώματος μετά τη κρούση.

Επομένως: $m\vec{\upsilon}_0 = m \cdot 0 + 2m\vec{\upsilon}_C \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon}_C = \dfrac{\vec{\upsilon}_0}{2}}$ (1)

Εναλλακτικά, μπορεί να βρεθεί και από τη σχέση που δίνει την ταχύτητα του κέντρου μάζας συστήματος σωματιδίων: $\vec{\upsilon}_C = \dfrac{m \cdot \vec{\upsilon}_0 + m \cdot 0}{m+m} = \dfrac{\vec{\upsilon}_0}{2}$

β)

Στη στροφορμή του συστήματος συνεισφέρει μόνον το κινούμενο σώμα:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}_0 + 0 = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}_0 \Rightarrow \vec{L} = mR\upsilon_0 \sin\theta \cdot (-\vec{z}) = mR\upsilon_0 \frac{1}{2} \cdot (-\vec{z}) = \frac{mR\upsilon_0}{2} \cdot (-\vec{z}) =$$

$= mR\upsilon_C \cdot (-\vec{z})$. Από το σχήμα προκύπτει ότι: $\sin\theta = \dfrac{R}{2R} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$.

γ)

Λόγω διατήρησης της στροφορμής του συστήματος των δύο δίσκων έχουμε: $\vec{L}_0 = I\omega$. Αλλά η ροπή αδρανείας του συστήματος I περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος C είναι:

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{2}mR^2 + md^2\right) + \left(\frac{1}{2}mR^2 + md^2\right) \overset{d=R}{=} mR^2 + 2mR^2 = 3mR^2$$

Οπότε έχουμε: $m\dfrac{\upsilon_0}{2}R = 3mR^2\omega \Rightarrow \boxed{\omega = \dfrac{\upsilon_0}{6R}}$

Άσκηση 6.17

Ένας άξονας μετάδοσης κίνησης, θεωρούμενος ως ομογενής κοίλος κύλινδρος μάζας M, έχει εσωτερική ακτίνα R και εξωτερική $R\sqrt{3}$. Κατά τη διάρκεια δοκιμών του, στο χρόνο $t=0$ ο άξονας περιστρέφεται περί τον άξονα συμμετρίας του με γωνιακή ταχύτητα ω_0 και επιβραδύνεται μέσω μιας ροπής αντίστασης μέτρου $\tau = k\omega$, όπου k μια θετική σταθερά. Να βρείτε τη γωνιακή ταχύτητα ω του άξονα ως συνάρτηση του χρόνου.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 16/2/2011

Η εξίσωση της περιστροφικής κίνησης είναι:

$$I\alpha_\omega = \tau \Rightarrow I\frac{d\omega}{dt} = -k\omega \Rightarrow \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{k}{I}dt \quad (1)$$

Η ροπή αδράνειας κοίλου κυλίνδρου αυθαίρετου μήκους L εσωτερικής ακτίνας R_1 και εξωτερικής R_2 μπορεί να υπολογιστεί ως εξής :

$$I = \int_M r^2 \cdot dm = \rho \int_V r^2 dV = \frac{M}{V}\int_{R_1}^{R_2} r^2 L \cdot 2\pi r dr = \frac{M}{L(\pi R_2^2 - \pi R_1^2)} 2\pi L \int_{R_1}^{R_2} r^2 r dr =$$

$$= \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2}\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2}\left[\frac{R_2^4}{4} - \frac{R_1^4}{4}\right] = \frac{2M}{R_2^2 - R_1^2}\frac{(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2)}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}M\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$

Επομένως, η ροπή αδρανείας του κοίλου κυλίνδρου περί τον άξονα συμμετρίας του είναι: $I = \frac{1}{2}M\left(R_i^2 + R_e^2\right) = \frac{1}{2}M\left(R^2 + 3R^2\right) = 2MR^2 \quad (2)$

Από τις (1) και (2) λαμβάνουμε:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{kdt}{2MR^2} \Rightarrow \int_{\omega_0}^{\omega}\frac{d\omega'}{\omega'} = -\frac{k}{2MR^2}\int_0^t dt' \Rightarrow \left[\ln\omega'\right]_{\omega_0}^{\omega} = -\frac{kt}{2MR^2} \Rightarrow \ln\omega - \ln\omega_0 = \frac{kt}{2MR^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{kt}{2MR^2} \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} = e^{-\frac{kt}{2MR^2}} \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 e^{-\frac{kt}{2MR^2}}}$$

Επομένως, η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου μειώνεται εκθετικά με το χρόνο.

Άσκηση 6.18

Θεωρείστε έναν λεπτό δίσκο με ανομοιογενή επιφανειακή πυκνότητα μάζας ακτινικά, $\sigma \equiv dm / dA$, που δίνεται από τη σχέση: $\sigma(r) = \sigma_0\left(1+\frac{r}{R}\right)$, όπου σ_0 μια σταθερά, R η ακτίνα του και dA το απειροστό εμβαδόν της επιφάνειάς του.

α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδρανείας του, I_z περί τον κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του και να τη συγκρίνετε με τη ροπή αδρανείας υποθετικού ομογενούς λεπτού δίσκου ίσης μάζας με τον αρχικό.

β) Να βρείτε τις ροπές αδρανείας I_x και I_y του ίδιου δίσκου περί τους άξονες x και y που είναι κάθετοι μεταξύ τους και διέρχονται από το κέντρο του.

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΜΕΤΑΛΛΕΙΩΝ-ΜΕΤΑΛΛΟΥΡΓΩΝ - 6/3/2012

α)

Η ροπή αδρανείας I_z υπολογίζεται θεωρώντας ένα απειροστό τμήμα του δίσκου που λόγου της κυκλικής συμμετρίας πρέπει να είναι ένας δακτύλιος απειροστού πάχους ως εξής:

$$dI_z = dm \cdot r^2 = \sigma(r)dA \cdot r^2 = \sigma(r)\left(2\pi r dr\right)r^2 = 2\pi\sigma(r)r^3 dr \Rightarrow$$

$$I_z = \int_0^R 2\pi\sigma(r)r^3 dr = 2\pi\int_0^R \sigma_0\left(1+\frac{r}{R}\right)r^3 dr = 2\pi\left(\int_0^R \sigma_0 r^3 dr + \int_0^R \frac{r}{R}r^3 dr\right) =$$

$$= 2\pi\sigma_0\left(\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R + \frac{1}{R}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R\right) = = 2\pi\sigma_0\left(\frac{R^4}{4}+\frac{1}{R}\frac{R^5}{5}\right) = 2\pi\sigma_0\frac{9R^4}{20} = \frac{9\pi\sigma_0 R^4}{10} \Rightarrow$$

$$\boxed{I_z = \frac{9\pi\sigma_0}{10}R^4 = \frac{9}{10}\left(\sigma_0 A\right)R^2}$$

Αν I' είναι η ροπή αδρανείας υποθετικού ομογενούς λεπτού δίσκου ίσης μάζας με τον αρχικό τότε $I' = \frac{1}{2}MR^2$. Θα υπολογίσουμε τη μάζα του μη ομογενούς δίσκου και θα την εξισώσουμε με του ομογενούς για να μπορέσουμε να κάνουμε τη σύγκριση:

$$M = \int_0^R \sigma(r)2\pi r dr = \pi\sigma_0 R^2 + 2\pi\sigma_0\int_0^R \frac{r}{R}dr = \pi\sigma_0 R^2 + \frac{2}{3}\pi\sigma_0 R^2 = \frac{5}{3}\pi\sigma_0 R^2 = \frac{5}{3}\sigma_0 A$$

Άρα $\dfrac{I_z}{I'} = \dfrac{\frac{9}{10}\pi\sigma_0 R^4}{\frac{1}{2}MR^2} = \dfrac{\frac{9}{10}\pi\sigma_0 R^4}{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\pi\sigma_0 R^2\right)R^2} = \dfrac{54\pi\sigma_0 R^4}{50\pi\sigma_0 R^4} = \dfrac{27}{25}$

Ακόμη προκύπτει ότι: $I_z = \dfrac{9}{10}\dfrac{3M}{5}R^2 = \dfrac{27}{50}MR^2 = 0,54MR^2$

β)

Με βάση το θεώρημα των καθέτων αξόνων και λόγω της κυκλικής συμμετρίας έχουμε:

$$I_z = I_x + I_y = 2I_x = 2I_y \Rightarrow I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{9\pi\sigma_0}{20}R^4$$

Άρα, $\boxed{I_z = \frac{9\pi\sigma_0}{20}R^4}$

7. Σχετικιστική Μηχανική (βλ. Παρ. Ζ1-Ζ4)

Άσκηση 7.1

Ποιος είναι ο ελάχιστος δυνατός χρόνος μετάδοσης ύλης ή ενέργειας σε απόσταση Δx σε οποιοδήποτε μέσο ή στο κενό; β) Από ένα αδρανειακό σύστημα S′ που κινείται με ταχύτητα $V\hat{x}$ ως προς ένα άλλο S, καταγράφονται δύο συμβάντα: Το Σ_1 στη θέση x_1' στο χρόνο t_1' και το Σ_2 στη θέση x_2' στο χρόνο t_2', με $\Delta x'=x_2'-x_1'>0$ και $\Delta t'=t_2'-t_1'>0$. Αν το Σ_2 είναι δυνατό να προκληθεί από το Σ_1 (π.χ. εκπομπή και λήψη κάποιου σήματος) διατυπώστε τη σχέση *αιτίου-αιτιατού* μέσω των $\Delta x'$ και $\Delta t'$. Να δείξετε ότι τα δύο συμβάντα, αν παρατηρηθούν από το σύστημα S, θα ικανοποιούν και πάλι τη σχέση *αιτίου-αιτιατού*, δηλαδή η σχέση (συνθήκη) αυτή δεν παραβιάζεται.

Δίνονται: *Αντίστροφος μετασχηματισμός Lorentz:* $x=\gamma(x'+\beta ct')$, $t=\gamma\left(t'+\frac{\beta}{c}x'\right)$, $y=y'$, $z=z'$ *ή αλλιώς:* $\Delta x=\gamma\Delta x'+\gamma\beta c\Delta t'$, $\Delta t=\gamma\Delta t'+\frac{\gamma\beta}{c}\Delta x'$, $\Delta y=\Delta y'$, $\Delta z=\Delta z'$ *όπου* $\beta=\frac{V}{c}$, $\gamma=1/\sqrt{1-\beta^2}$. *Για $t=t'=0$ οι άξονες των S και S′ συμπίπτουν.*

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 4/10/2002

α)

Σε όλα τα μέσα και στο κενό, $\Delta t_{\min}=\Delta x/c$, διότι η *έσχατη ταχύτητα* είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό (c).

β)

Από το μετασχηματισμό Lorentz έχουμε τις: $\Delta x=\gamma\Delta x'+\gamma\beta c\Delta t'$ (1)

$\Delta t=\gamma\Delta t'+\frac{\gamma\beta}{c}\Delta x'$ (1). Η σχέση *αιτίου–αιτιατού* είναι: $\boxed{c\Delta t'\geq\Delta x'}$ (2)

Δηλαδή, αν στο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $c\Delta t'$ που μεσολαβεί, καλύπτεται ίση απόσταση ή μεγαλύτερη απόσταση από τη $\Delta x'$, τότε είναι δυνατό να υπάρχει σχέση *αιτίου–αιτιατού*.

γ)

Θα δείξουμε ότι αν στο σύστημα S ισχύει η $c\Delta t\geq\Delta x$, τότε θα ισχύει και η αντίστοιχη σχέση στο σύστημα S′. Αλλά, από την εξίσωση (1): $c\Delta t=c\gamma\Delta t'+\beta\Delta x'$, οπότε η (2) γίνεται:

$$c\left(\gamma\Delta t'+\frac{\beta\gamma}{c}\Delta x'\right)\geq\Delta x\Rightarrow\gamma\left(c\Delta t'+\beta\Delta x'\right)\geq\Delta x\Rightarrow c\Delta t'+\beta\Delta x'\geq\frac{\Delta x}{\gamma}$$

και αντικαθιστώντας το Δx από τη σχέση του αντίστροφου μετασχηματισμού Lorentz, παίρνουμε:

$$c\Delta t'+\beta\Delta x'\geq\frac{\gamma\Delta x'+\gamma\beta c\Delta t'}{\gamma}\Rightarrow c\Delta t'+\beta\Delta x'\geq\Delta x'+\beta c\Delta t'\Rightarrow$$

$c\Delta t'(1-\beta)\geq\Delta x'(1-\beta)$. Για $\beta=1$ επαληθεύεται η ισότητα ενώ για $\beta<1$, οπότε γενικά καταλήγουμε στην ανισότητα: $\boxed{c\Delta t'>\Delta x'}$, η οποία εκφράζει τη σχέση *αιτίου–αιτιατού*.

Άσκηση 7.2

Στο σύστημα αναφοράς ενός επιταχυντή (S_0) δύο σωματίδια κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, του άξονα x με ταχύτητες $\pm 0{,}9c$.

α) Ποιο είναι το μέτρο της σχετικής ταχύτητα τους (όπως αυτή παρατηρείται από σύστημα αναφοράς S′ που κινείται μαζί με ένα από τα δύο σωματίδια);

β) Να αποδείξετε ότι η κατάλληλη ταχύτητα V, ενός κινούμενου συστήματος αναφοράς S′, από το οποίο το σωματίδιο παρατηρείται με δεδομένη ταχύτητα υ'_x, υπολογίζεται μέσω της σχέσης μετασχηματισμού (1) με εναλλαγή των ταχυτήτων V και υ'_x. Βασιζόμενοι σ’ αυτό, να βρείτε δύο κατάλληλα συστήματα αναφοράς (με ταχύτητες V_1 και V_2), έτσι ώστε οι παρατηρούμενες από αυτά ταχύτητες των δύο σωματιδίων, αντίστοιχα, να είναι ίσες με $0{,}45c$.

γ) Να υπολογίσετε τον παράγοντα διαστολής του χρόνου των σωματιδίων για έναν παρατηρητή που βρίσκεται στον επιταχυντή.

<u>Δίνονται</u>: *Μετασχηματισμός ταχυτήτων Lorentz:* $\upsilon'_x = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \beta\upsilon_x / c} = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \upsilon_x V / c^2}$ *(1)*

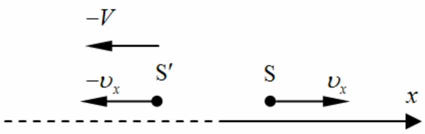
Σχετική ταχύτητα για σωματίδια που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες $\pm\upsilon_x$ *:*

$\upsilon'_x = \dfrac{2\upsilon_x}{1 + (V/c)^2} = \dfrac{2\upsilon_x}{1 + (\upsilon_x/c)^2}$ *, θέτοντας* $V = -\upsilon_x$ *και* $\beta \equiv \dfrac{V}{c}$ *στη σχέση (1).*

Επίσης $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$

ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ - 27/8/2003

α)



Η σχετική ταχύτητα των σωματιδίων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\upsilon'_x = \frac{2\upsilon_x}{1 + (\upsilon_x/c)^2} = \frac{2 \times 0{,}9c}{1 + (0{,}9c/c)^2} = 0{,}9945c \text{ και } \upsilon'_x = -0{,}9945c$$

β)

Έχουμε, $\upsilon'_x = \dfrac{\upsilon_x - V}{1 - \beta\upsilon_x / c} \Rightarrow \upsilon'_x - \dfrac{\upsilon'_x \upsilon_x V}{c^2} = \upsilon_x - V \Rightarrow V\left(1 - \dfrac{\upsilon'_x \upsilon_x}{c^2}\right) = \upsilon_x - \upsilon' \Rightarrow$

$$\boxed{V = \frac{\upsilon_x - \upsilon'_x}{1 - \dfrac{\upsilon'_x \upsilon_x}{c^2}}}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση προκύπτουν τα παρακάτω αριθμητικά αποτελέσματα:

$$V_1 = \frac{0{,}9c - 0{,}45c}{1 - \dfrac{0{,}45c \times 0{,}9c}{c^2}} = 0{,}7563c \text{ , } V_1 = \frac{-0{,}9c - 0{,}45c}{1 - \dfrac{0{,}45c(-0{,}9c)}{c^2}} = -0{,}9609c$$

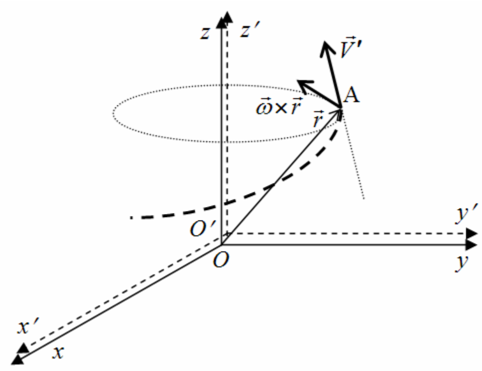
γ)

Έχουμε, $\gamma \equiv \dfrac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 0{,}9^2}} = 2{,}294 \Rightarrow \boxed{\tau' \approx 2{,}3\tau}$ (διαστολή του χρόνου).

Παραρτήματα

Α1. Συστήματα αναφοράς με ομαλή σχετική περιστροφική κίνηση

Έστω το αρχικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς S και ένα άλλο S' που περιστρέφεται ως προς το πρώτο με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ οι άξονες των δύο συστημάτων συμπίπτουν.



Το σημείο Α θεωρούμε ότι κινείται με ταχύτητα $\vec{V}'$ (σχετική ταχύτητα) στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς S'.

Επίσης, το σημείο Α φαίνεται από τον παρατηρητή του S (που βρίσκεται στο O) να εκτελεί <u>ευθύγραμμη</u> και ταυτόχρονα <u>κυκλική</u> κίνηση.

Η ταχύτητα του Α στο S είναι: $\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{r}$ (1)

Η επιτάχυνση του Α στο S είναι:
$\vec{a} = \vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{r} = \vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{V}$ (2)

Αλλά λόγω της (1): $\vec{a} = \vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ (3)

Το διάνυσμα της ταχύτητας $\vec{V}'$ θα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, όπως παρατηρείται από το S, δηλαδή ο ρυθμός της μεταβολής του θα οφείλεται τόσο στη μεταφορική επιτάχυνση $\dot{\vec{V}}'$ στο S', όσο και στην περιστροφή του, όπως παρατηρείται από το S:

$\vec{V}' = \vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{V}'$ και επομένως αντικαθιστώντας το $\vec{a}$ από την (3) βρίσκουμε την ολική επιτάχυνση του Α:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \text{ ή } \vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_c + \vec{a}_k$$

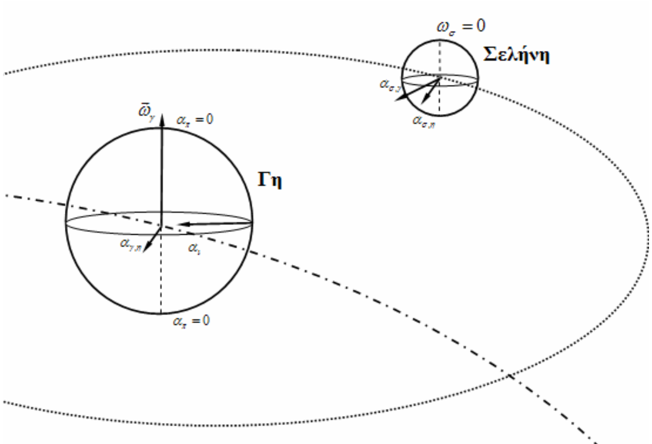
Δηλαδή $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{V}'$ και $\vec{a}_k = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

όπου $\vec{a}'$ η γραμμική επιτάχυνση, $\vec{a}_c$ η επιτάχυνση ***Coriolis*** και $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$ η δύναμη ***Coriolis*** (από το όνομα του *Gustave-Gaspard Coriolis*, 1853)

και $\vec{a}_k$ η ***Κεντρομόλος*** επιτάχυνση και $\vec{F}_k = -m\vec{a}_k$, η γνωστή ***Φυγόκεντρος*** δύναμη.

Α2. Αδρανειακές επιταχύνσεις στην επιφάνεια της Γης και της Σελήνης λόγω σύνθετης περιστροφικής κίνησης

Ένα σώμα που ηρεμεί στην επιφάνεια της Γης ή της Σελήνης, υφίσταται ως αδρανειακή επιτάχυνση μόνο την *κεντρομόλο επιτάχυνση* λόγω περιστροφής του συστήματος αναφοράς, αναφερόμενου συνήθως ως S′. Για ομαλή περιστροφική κίνηση με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$, αυτή δίνεται από τη σχέση:



$$\vec{\alpha}_n = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) \quad (1)$$

Για σταθερή $\vec{\omega}$ (άξονας περιστροφής και μέτρο σταθερά) και με αρχή του συστήματος συντεταγμένων στο $z = 0$, η σχέση (1) γίνεται:

$$\boxed{\vec{\alpha}_n = \omega^2 R \hat{i}_n = 4\pi^2 \frac{R}{T^2} \hat{i}_n} \quad (2)$$

όπου R είναι η ακτίνα και T η περίοδος περιστροφής. Με βάση τη σχέση (2), μπορούμε να υπολογίσουμε τα μέτρα των κεντρομόλων επιταχύνσεων για τη Γη και τη Σελήνη. Το κάθε αποτέλεσμα δίνεται με αναγωγή στην επιτάχυνση της βαρύτητας ($g = 9,80$ m/s^2), δηλαδή ως $\alpha = \alpha_n / g$. Επειδή έχουμε σύνθετη κίνηση των παραπάνω σωμάτων, θα πρέπει να μελετήσουμε χωριστά τις κινήσεις (περιστροφές) αυτές (βλέπε διπλανό σχήμα). Από πίνακες που υπάρχουν στα επίσημα συγγράμματα μπορεί κανείς να βρει τις τιμές R και T για την κάθε περίπτωση. Οι προκύπτουσες τιμές είναι οι ακόλουθες:

α1) Περιστροφή της Γης περί τον άξονά της (ισημερινός): $\alpha_\iota = 3,4$ ‰

α2) Περιστροφή της Γης περί τον άξονά της (Β και Ν πόλος): $\alpha_\pi = 0$

α3) Περιστροφή της Γης περί άξονα που διέρχεται από τον Ήλιο (η επιτάχυνση αναφέρεται σε οποιοδήποτε σημείο, αλλά στο σχήμα δείχνεται στο κέντρο μάζας της : $\alpha_{\gamma,\eta} = 0,66$ ‰

Συνισταμένη (Γης στον ισημερινό): $\boxed{\vec{\alpha}_{\gamma,o} = \vec{\alpha}_\iota + \vec{\alpha}_{\gamma,\eta}}$ (μέγιστο, 4,06 ‰).

β1) Περιστροφή της Σελήνης περί τον άξονά της <u>δεν υφίσταται</u> , άρα $\alpha_\sigma = 0$

β2) Περιστροφή της Σελήνης περί τη Γη: $\alpha_{\sigma,\gamma} = 0,26$ ‰

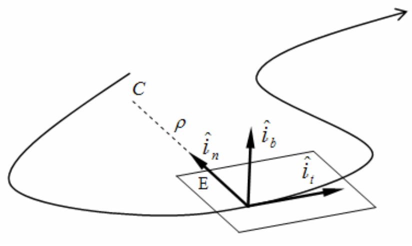
β3) Περιστροφή της Σελήνης περί άξονα που διέρχεται από τον Ήλιο:
$\alpha_{\sigma,\eta} = 0,66$ ‰ (τιμή ίση αυτήν της Γης, λόγω κοινής περιστροφής).

Συνισταμένη (Σελήνη σε οποιοδήποτε σημείο): $\boxed{\vec{\alpha}_{\sigma,o} \equiv \vec{\alpha}_{\sigma,\eta}}$ (μέγιστο, 0,92 ‰).

Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σε οποιοδήποτε σημείο της επιφάνειας της Σελήνης και κατά την ακτινική κατεύθυνση στο επίπεδο της τροχιάς της η μέγιστη αδρανειακή επιτάχυνση είναι μικρότερη από την ελάχιστη που εμφανίζεται στην επιφάνεια της Γης και σε ποσοστό 0,27 αυτής. Η Σελήνη, επομένως, μπορεί να θεωρηθεί ως καλλίτερο σύστημα αναφοράς συγκρινόμενο με τη Γη, ως προς τον αδρανειακό του χαρακτήρα.

Β1. Γεωμετρία καμπυλών στο χώρο – συνοδεύον τρίεδρο

Ορισμός των πρωτευόντων διανυσμάτων



Ορίζεται το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα σε τυχόν σημείο της καμπύλης, που καλείται ***εφαπτομένη***, $\hat{i}_t \equiv \frac{d\vec{r}}{ds}$, όπου s το διάστημα πάνω στην καμπύλη [6]. Το διάνυσμα αυτό είναι εξ ορισμού εφαπτόμενο της καμπύλης στο αναφερόμενο σημείο. Επίσης, ορίζεται το διάνυσμα, $\hat{i}_n \equiv \frac{d\hat{i}_t}{d\theta}$ που είναι κάθετο στην εφαπτομένη και καλείται, ***πρωτοκάθετη***. Αλλά, παρατηρούμε ότι:

$\frac{d\hat{i}_t}{ds} = \frac{d\theta}{ds}\frac{d\hat{i}_t}{d\theta} = k\frac{d\hat{i}_t}{d\theta} = k\hat{i}_n \Rightarrow \frac{d\hat{i}_t}{ds} = k\hat{i}_n$, όπου $k \equiv \frac{d\theta}{ds}$ η ***καμπυλότητα*** και $\rho \equiv \frac{1}{k}$ η ακτίνα καμπυλότητας εξ ορισμού. Επίσης ισχύει, $\frac{d\hat{i}_t}{ds} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\hat{i}_n$ και $k = \frac{1}{\rho} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|$.

Τέλος, ορίζεται το διάνυσμα $\hat{i}_b = \hat{i}_t \times \hat{i}_n$ και καλείται ***δικάθετος***. Το επίπεδο (Ε) που ορίζουν τα $\hat{i}_t, \hat{i}_n$ καλείται *εγγύτατο επίπεδο*, ενώ αυτό που ορίζουν τα $\hat{i}_t, \hat{i}_b$ καλείται *ευθυοποιούν επίπεδο* και ισχύουν οι σχέσεις:

$$\hat{i}_t \cdot \hat{i}_n = \hat{i}_n \cdot \hat{i}_b = \hat{i}_b \cdot \hat{i}_t = 0 \quad (1)$$

Τα τρία αυτά μοναδιαία διανύσματα καλούνται ***πρωτεύοντα διανύσματα*** της καμπύλης στο αναφερόμενο σημείο και αποτελούν, εξ ορισμού, ένα δεξιόστροφο σύστημα, γνωστό ως *συνοδεύον τρίεδρο* ή *τρίεδρο του Frenet*.

Επειδή τα πρωτεύοντα διανύσματα ανά δύο είναι συνεπίπεδα, κάθε ένα από αυτά μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο άλλων, δηλαδή:

$\frac{d\hat{i}_n}{ds} = \alpha\hat{i}_t + \beta\hat{i}_b$ και $\frac{d\hat{i}_n}{ds} = \gamma\hat{i}_b + \delta\hat{i}_n$. Παραγωγίζοντας τις σχέσεις (1) και αντικαθιστώντας τις εκφράσεις αυτές, έχουμε:

$$\hat{i}_t\frac{d\hat{i}_n}{ds} + \frac{d\hat{i}_t}{ds}\hat{i}_n = 0 \Rightarrow \hat{i}_t \cdot \left(\alpha\hat{i}_t + \beta\hat{i}_b\right) + k\hat{i}_n = 0 \Rightarrow \alpha = -k \equiv -\frac{1}{\rho} \quad (2)$$

$$\hat{i}_n\frac{d\hat{i}_b}{ds} + \frac{d\hat{i}_n}{ds}\hat{i}_b = 0 \Rightarrow \hat{i}_n \cdot \left(\gamma\hat{i}_t + \delta\hat{i}_n\right) + \left(\alpha\hat{i}_t + \beta\hat{i}_b\right) \cdot \hat{i}_b = 0 \Rightarrow \beta = -\delta \equiv \frac{1}{\sigma} \equiv \tau \ \textbf{(στρέψη)} \quad (3)$$

$$\hat{i}_b\frac{d\hat{i}_t}{ds} + \frac{d\hat{i}_b}{ds}\hat{i}_t = 0 \Rightarrow \hat{i}_b\left(k\hat{i}_n\right) + \left(\gamma\hat{i}_t + \delta\hat{i}_n\right) \cdot \hat{i}_t = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \quad (4)$$

Το ρ λέγεται **ακτίνα καμπυλότητας** και το σ **ακτίνα στρέψης**. Θέτοντας τις τιμές των σταθερών από τις (2), (3) και (4) στις παραπάνω εκφράσεις γραμμικού συνδυασμού, καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις που καλούνται και τύποι *Frenet-Serret*:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\hat{i}_t}{ds} &= k\hat{i}_n = \frac{1}{\rho}\hat{i}_n \\ \frac{d\hat{i}_n}{ds} &= -k\hat{i}_t + \tau\hat{i}_b = -\frac{1}{\rho}\hat{i}_t + \frac{1}{\sigma}\hat{i}_b \\ \frac{d\hat{i}_b}{ds} &= -\tau\hat{i}_n = -\frac{1}{\sigma}\hat{i}_n \end{aligned}\right\} \text{ Τύποι } \textit{\textbf{Frenet-Serret}}$$

Ερμηνεία των τύπων Frenet-Serret

Παρακάτω δίνεται μια γεωμετρική ερμηνεία των τύπων *Frenet-Serret* που αποτελεί ταυτόχρονα μια σημαντική ιδιότητα των πρωτευόντων διανυσμάτων. Υπολογίζουμε το ρυθμό μεταβολής των διανυσμάτων $\hat{i}_t, \hat{i}_n, \hat{i}_b$ σε συνδυασμό με τη διανυσματική σχέση τους:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\hat{i}_t}{dt} &= \frac{d\hat{i}_t}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}(k\hat{i}_n) = \dot{s}\left(k\underbrace{\hat{i}_n \times \hat{i}_t}_{=\hat{i}_b} + \beta\underbrace{\hat{i}_t \times \hat{i}_t}_{=0}\right) = \dot{s}\left(k\hat{i}_b + \beta\hat{i}_t\right)\times\hat{i}_t = \vec{\Omega}\times\hat{i}_t \\
\frac{d\hat{i}_n}{dt} &= \frac{d\hat{i}_n}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}(-k\hat{i}_t + \beta\hat{i}_b) = \dot{s}\left(\underbrace{-k\hat{i}_t \times \hat{i}_n}_{=-\hat{i}_b} + \beta\underbrace{\hat{i}_b \times \hat{i}_n}_{=\hat{i}_t}\right) = \dot{s}\left(k\hat{i}_b + \beta\hat{i}_t\right)\times\hat{i}_n = \vec{\Omega}\times\hat{i}_n \\
\frac{d\hat{i}_b}{ds} &= \frac{d\hat{i}_b}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}(-\beta\hat{i}_n) = \dot{s}\left(\underbrace{-\beta\hat{i}_n \times \hat{i}_b}_{=-\hat{i}_t} + k\underbrace{\hat{i}_b \times \hat{i}_b}_{=0}\right) = \dot{s}\left(k\hat{i}_b + \beta\hat{i}_t\right)\times\hat{i}_b = \vec{\Omega}\times\hat{i}_b
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Οι σχέσεις (5) σημαίνουν το εξής: *Κατά την κίνηση πάνω στην καμπύλη με ταχύτητα* $\dot{s}$*, ο ρυθμός μεταβολής κάθε πρωτεύοντος διανύσματος,* $\hat{i}_p$ *(* $p = t,n,b$ *), εκφράζεται με τον εαυτό του πολλαπλασιασμένο με το ίδιο διάνυσμα* $\vec{\Omega}$.

Δηλαδή, $\dfrac{d\hat{i}_p}{dt} = \vec{\Omega}\times\hat{i}_p$, όπου $\vec{\Omega} = \dot{s}\left(k\hat{i}_b + \beta\hat{i}_t\right)$ (6)

Άρα, το συνοδεύον τρίεδρο υφίσταται ολόσωμο την περιστροφή, με γωνιακή ταχύτητα $\vec{\Omega}$. Αυτή η γωνιακή ταχύτητα μπορεί να θεωρηθεί ως διανυσματικό άθροισμα δύο συνιστωσών, με βάση τη σχέση (6), ως εξής:

$$\vec{\Omega} = \dot{s}k\hat{i}_b + \dot{s}\beta\hat{i}_t = \vec{\omega}_b + \vec{\omega}_t \text{ , όπου } \omega_b = \dot{s}k = \frac{\dot{s}}{\rho} \text{ και } \omega_t = \dot{s}\beta = \frac{\dot{s}}{\sigma}$$

Οι γωνιακές ταχύτητες $\vec{\omega}_b, \vec{\omega}_t$ αφορούν περιστροφή περί τους συντρέχοντες στιγμιαίους άξονες $\hat{i}_b$ και $\hat{i}_t$, αντίστοιχα. Η περιστροφή ω_b επιφέρει μια *κάμψη* μέσα στο εγγύτατο επίπεδο, ενώ η περιστροφή ω_t μια *στρέψη* της καμπύλης.

Υπολογισμός των πρωτευόντων διανυσμάτων

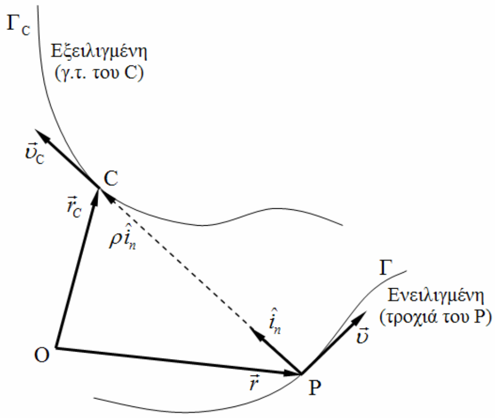
Τα πρωτεύοντα διανύσματα μπορούν να υπολογιστούν, είτε από τη φυσική παράσταση της καμπύλης της τροχιάς, $\vec{r}(s)$, είτε από το διάνυσμα θέσης ως συνάρτηση του χρόνου $\vec{r}(t)$. Στις σχέσεις που ακολουθούν, δίνεται και ο άλλος συνήθης συμβολισμός των πρωτευόντων διανυσμάτων με τους ελληνικούς χαρακτήρες, $\hat{\varepsilon}, \hat{\pi}$ και $\hat{\delta}$, αντίστοιχα.

$$\hat{i}_t \equiv \hat{\varepsilon} = \vec{r}' \text{ , } \hat{i}_n \equiv \hat{\pi} = \frac{\vec{r}''}{|\vec{r}''|} \text{ , } \hat{i}_b \equiv \hat{\delta} = \frac{\vec{r}' \times \vec{r}''}{|\vec{r}''|}$$

$$\hat{i}_t \equiv \hat{\varepsilon} = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} \text{ , } \hat{i}_n \equiv \hat{\pi} = \frac{\left(\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}\right)\times\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}||\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|} \text{ , } \hat{i}_b \equiv \hat{\delta} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}$$

όπου, $\vec{r}' \equiv \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ και $\dot{\vec{r}} \equiv \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Β2. Γεωμετρικός τόπος του κέντρου καμπυλότητας στο επίπεδο



Θεωρούμε το τυχαίο σημείο P της γραμμής Γ, το οποίο κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ (εφαπτομένη στην τροχιά Γ). Θα αποδείξουμε ότι ο γ.τ. που διαγράφει το κέντρο καμπυλότητας C για τις διάφορες θέσεις του P, είναι η γραμμή Γ_C, στην οποία η ευθεία που ορίζεται από το ευθύγραμμο τμήμα PC είναι εφαπτομένη.

Αρχικά, θα υπολογίζουμε την ταχύτητα του C ως διάνυσμα και στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι ο φορέας της είναι συγγραμμικός με τον φορέα του $\hat{i}_n$ (κάθετου στην Γ).

Έχουμε, $\vec{\upsilon}_C = \upsilon_C \hat{i}_C = \dfrac{d\vec{r}_C}{dt}$ (1) , αλλά, $\vec{r}_C = \vec{r} + \rho\hat{i}_n$ (2)

Από (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$\vec{\upsilon}_C = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} + \rho\vec{i}_n\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\rho\hat{i}_n\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} + \rho\frac{d\hat{i}_n}{dt} + \hat{i}_n\frac{d\rho}{dt} \quad (3)$$

Όμως, $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$ και $\dfrac{d\hat{i}_n}{dt} = \upsilon\left(-\dfrac{1}{\rho}\hat{i}_t\right)$ που αναφέρεται στους τύπους

Frenet-Serret, οπότε η (3) γίνεται:

$$\Rightarrow \vec{\upsilon}_C = \vec{\upsilon} + \rho\upsilon\left(-\frac{1}{\rho}\hat{i}_t\right) + \frac{d\rho}{dt}\hat{i}_n = \vec{\upsilon} - \upsilon\hat{i}_t + \frac{d\rho}{dt}\hat{i}_n = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon} + \frac{d\rho}{dt}\hat{i}_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\upsilon}_C = \frac{d\rho}{dt}\hat{i}_n \Rightarrow \boxed{\vec{\upsilon}_C // \hat{i}_n} \text{ και } \boxed{\upsilon_C = \frac{d\rho}{dt}} \quad (4)$$

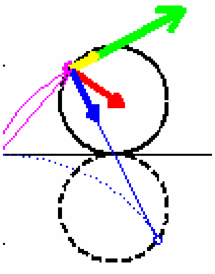
Επομένως, η ταχύτητα του C είναι συγγραμμική με το $\hat{i}_n$, δηλαδή η κάθετος στη Γ είναι εφαπτομένη στη Γ_C. Το μέτρο της ταχύτητας του C είναι αυτό που προκύπτει από την (4).

Οι γραμμές Γ και Γ_C ονομάζονται *ενειλιγμένη* και *εξειλιγμένη*, αντίστοιχα.

Γ1. Θεωρητικές προσομοιώσεις κινηματικής 2 διαστάσεων

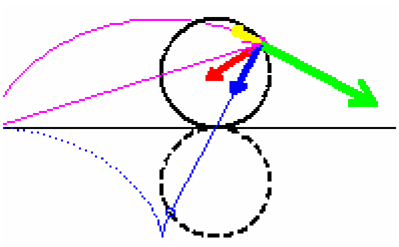
Τα παρακάτω παραδείγματα προσομοίωσης έχουν γίνει με κώδικα λογισμικού σε περιβάλλον MATLAB.

Γ1.1. Κύλιση

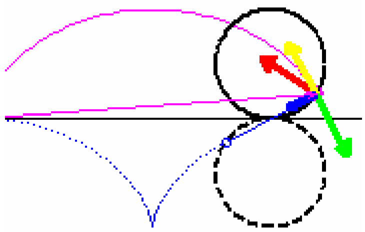


- Οι διπλανές εικόνες δείχνουν τρεις χρονικές στιγμές (διαδοχικές φάσεις κίνησης) από την προσομοίωση κύλισης ενός τροχού σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή ταχύτητα εξετάζοντας ένα συγκεκριμένο σημείο, έστω Μ.

- Ο κύκλος με τη συνεχή μαύρη γραμμή παριστάνει την περιφέρεια του τροχού που κυλίεται ενώ το κέντρο καμπυλότητας βρίσκεται στον φαινομενικά κυλιόμενο «κατοπτρικό» τροχό. Ο γ.τ. του (τροχιά) είναι επίσης μια κυκλοειδής καμπύλη (μπλε εστιγμένη) μετατοπισμένη χωρικά κατά $-\pi R$ οριζόντια και $-2R$ κατακόρυφα, σε σχέση με αυτή που διαγράφει το Μ. Οι δύο αυτές κυκλοειδείς αποτελούν την *ενειλιγμένη-εξειλιγμένη* αντίστοιχα και τέμνονται κάθετα στα εκάστοτε σημεία επαφής. Παρατηρείστε επίσης, ότι η ακτίνα καμπυλότητας διέρχεται από τρία σημεία: το αναφερόμενο σημείο του τροχού, το σημείο επαφής και το κέντρο καμπυλότητας (δηλαδή το εκάστοτε συμμετρικό του Μ ως προς το σημείο επαφής).



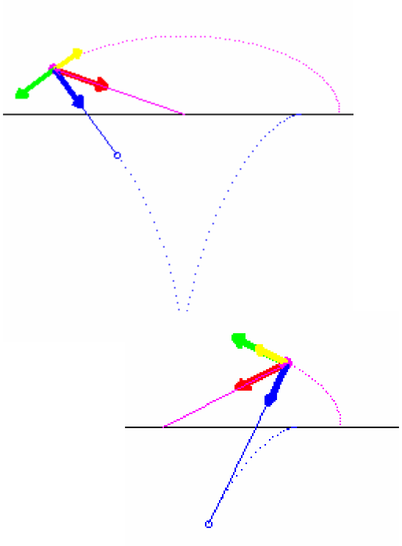
- Η μωβ γραμμή παριστάνει την τροχιά ενός σημείου της περιφέρειας και η μπλε εστιγμένη ευθεία το φορέα του κάθετου μοναδιαίου διανύσματος. Το διάνυσμα με πράσινο χρώμα παριστάνει την ταχύτητα, ενώ το κίτρινο, μπλέ και κόκκινο την επιτρόχιο, κεντρομόλο και συνισταμένη επιτάχυνση, αντίστοιχα. Το διάνυσμα θέσης φαίνεται με μωβ συνεχές βέλος.

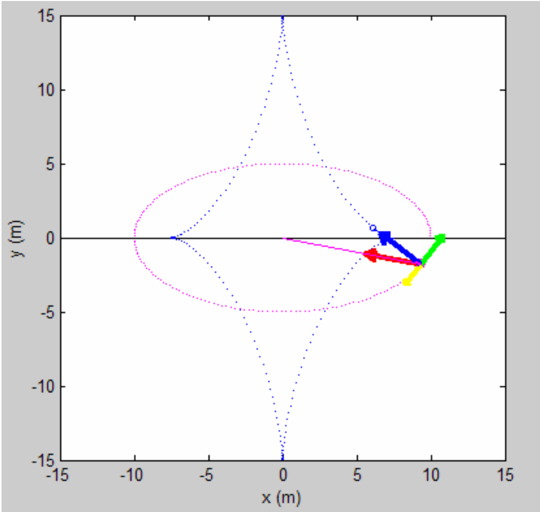


- Το εκάστοτε σημείο επαφής του τροχού βρίσκεται σε *στιγμιαία ηρεμία*, οπότε τόσο η ταχύτητα όσο και η διαμήκης επιτάχυνσή του είναι μηδέν εκείνη τη χρονική στιγμή. Η συνισταμένη επιτάχυνση (κόκκινο βέλος) είναι ένα περιστρεφόμενο διάνυσμα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω και ταυτόχρονα μετατοπίζεται παράλληλα στον εαυτό του (υφίσταται μεταφορά) με την ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού.

- Λεπτομερέστερη μελέτη της κύλισης γίνεται στην άσκηση 1.10 των σημειώσεων αυτών ενώ ο γ.τ. του κέντρου καμπυλότητας εξετάζεται στο Παράρτημα Β2.

Γ1.2. Ελλειπτική κίνηση

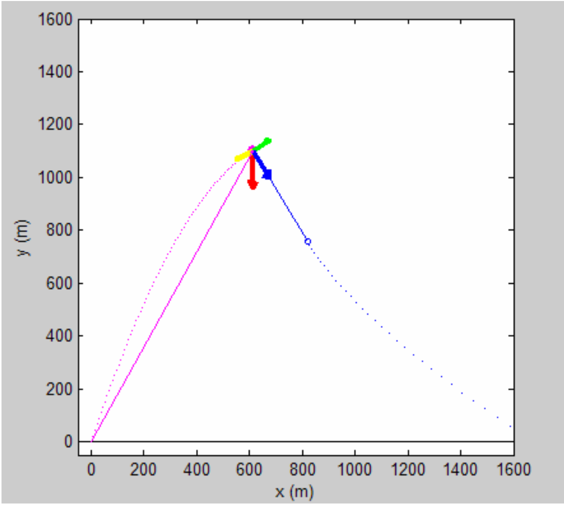


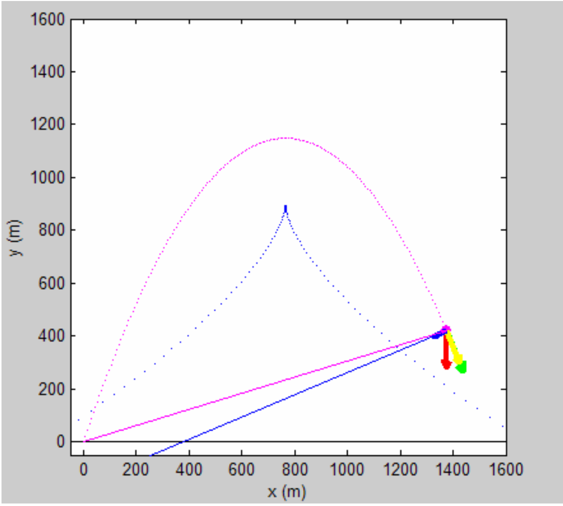


Στα σχήματα αριστερά παρουσιάζονται δύο διαφορετικές στιγμές (φάσεις) ελλειπτικής κίνησης μέσω προσομοίωσης, όπου εμφανίζονται τα διανύσματα των κινηματικών μεγεθών, ταχύτητας, επιτρόχιας και κεντρομόλου επιτάχυνσης, καθώς και η συνισταμένη επιτάχυνση, με την ίδια κωδικοποίηση χρωμάτων όπως στο Παράρτημα Γ1.1.

Στο διπλανό σχήμα (δεξιά) απεικονίζεται η πλήρης τροχιά καθώς και ο γ.τ. του κέντρου καμπυλότητας. Λεπτομερέστερη ανάλυση γίνεται στην άσκηση 1.11 των σημειώσεων αυτών.

Γ1.3. Πλάγια βολή από μηδενικό ύψος





Δ1. Επαλληλία δύο καθέτων αρμονικών κινήσεων με σχετική διαφορά φάσης

Το θέμα αυτό σχετίζεται με τη λεγόμενη *ελλειπτική πόλωση* της Κυματικής και με τα σχήματα *Lissajous* για ίσες κυκλικές συχνότητες ταλάντωσης κατά τις κατευθύνσεις x και y.

Θεωρούμε τις παρακάτω εξισώσεις αρμονικής κίνησης (ταλάντωσης κατά τους άξονες x και y) με κοινή κυκλική συχνότητα ω, πλάτη A, B και φάσεις δ_A, δ_B, αντίστοιχα:

$$\left.\begin{aligned} x(t) = A\cos\left[\omega\left(t-t_0\right)+\delta_A\right] \Rightarrow \frac{x(t)}{A} = x_A = \cos\left[\omega\left(t-t_0\right)+\delta_A\right] \\ y(t) = B\sin\left[\omega\left(t-t_0\right)+\delta_B\right] \Rightarrow \frac{y(t)}{B} = y_B = \sin\left[\omega\left(t-t_0\right)+\delta_B\right] \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Το ζητούμενο είναι, αφενός να αποδείξουμε ότι η εξίσωση της τροχιάς ενός σημείου με διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t) = x\hat{x} + y\hat{y}$ είναι έλλειψη και αφετέρου να βρούμε τη σχέση που συνδέει τα χαρακτηριστικά της έλλειψης (ημιάξονες ή εκκεντρότητα), ο προσανατολισμός των κυρίων αξόνων και η εξάρτηση τους από τα πλάτη και τη διαφορά φάσης $\delta = \delta_A - \delta_B$. Εδώ πρέπει να επισημανθεί ότι εδώ η κοινή *κυκλική συχνότητα ω* δεν ταυτίζεται με το ρυθμό μεταβολής της πολικής γωνίας θ (*γωνιακή ταχύτητα $d\theta/dt$*) ενός σημείου κατά μήκος της τροχιάς του. Το βασικό στοιχείο για την εύρεση της εξίσωσης της τροχιάς είναι η απαλοιφή του χρόνου από τις εξισώσεις (1).

Απαλοιφή του χρόνου

Επιλέγουμε ως αρχή του χρόνου το t_0 έτσι ώστε, $\omega t_0 = \delta_A + \dfrac{\delta_B - \delta_A}{2}$, οπότε:

$$\omega t - \omega t_0 + \delta_A = \omega t - \delta_A - \frac{\delta_B - \delta_A}{2} + \delta_A = \omega t - \frac{\delta_B - \delta_A}{2} \quad \text{και}$$

$$\omega t - \omega t_0 + \delta_B = \omega t - \delta_A - \frac{\delta_B - \delta_A}{2} + \delta_B = \omega t + \frac{\delta_B - \delta_A}{2}$$

Θέτουμε, $\delta = \delta_B - \delta_A$ (διαφορά φάσης) και οι σχέσεις (1) γίνονται:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x(t)}{A} = x_A = \cos\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right) \\ \frac{y(t)}{B} = y_B = \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Αναλύοντας τα δεξιά μέλη με βάση τη γνωστή τριγωνομετρική ιδιότητα του αθροίσματος γωνιών, παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned} x_A = \cos\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \\ y_B = \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_A = \cos\left(\omega t - \frac{\delta}{2}\right) = \cos\omega t\cos\frac{\delta}{2} + \sin\omega t\sin\frac{\delta}{2} \\ y_B = \sin\left(\omega t + \frac{\delta}{2}\right) = \sin\omega t\cos\frac{\delta}{2} + \cos\omega t\sin\frac{\delta}{2} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Έστω, $\alpha = \cos\frac{\delta}{2}$, $b = \sin\frac{\delta}{2}$. Τότε οι (2) θα γίνουν:

$$\left.\begin{array}{l} x_A = \alpha\cos\omega t + b\sin\omega t \\ y_B = \alpha\sin\omega t + b\cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_A + y_B = (\alpha+b)\cos\omega t + (\alpha+b)\sin\omega t \\ y_B - x_A = (\alpha-b)\sin\omega t - (\alpha-b)\cos\omega t \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_A + y_B}{(\alpha+b)} = \cos\omega t + \sin\omega t \\ \dfrac{y_B - x_A}{(\alpha-b)} = \sin\omega t - \cos\omega t \end{array}\right\} \quad (3)$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και τα δύο μέλη των εξισώσεων (3) και έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(x_A + y_B)^2}{(\alpha+b)^2} = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t + 2\sin\omega t\cos\omega t \\ \dfrac{(y_B - x_A)^2}{(\alpha-b)^2} = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t - 2\sin\omega t\cos\omega t \end{array}\right\}$$

και αθροίζοντας κατά μέλη καταλήγουμε στην:

$$\frac{(x_A + y_B)^2}{(\alpha+b)^2} + \frac{(y_B - x_A)^2}{(\alpha-b)^2} = 2 \Rightarrow \frac{\left[(x_A + y_B)/\sqrt{2}\right]^2}{2(\alpha+b)^2} + \frac{\left[(y_B - x_A)/\sqrt{2}\right]^2}{2(\alpha-b)^2} = 1 \quad (4)$$

Δηλαδή έχουμε εξίσωση έλλειψης με νέες μεταβλητές που μπορούν να γραφτούν ως εξής:

$$\left.\begin{array}{l} x' = \dfrac{x_A + y_B}{\sqrt{2}} = \dfrac{x_A}{\sqrt{2}} + \dfrac{y_B}{\sqrt{2}} = x_A\cos\dfrac{\pi}{4} + y_B\sin\dfrac{\pi}{4} \\ y' = \dfrac{y_B - x_A}{\sqrt{2}} = \dfrac{y_B}{\sqrt{2}} - \dfrac{x_A}{\sqrt{2}} = -x_A\sin\dfrac{\pi}{4} + y_B\cos\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_B \end{pmatrix} \quad (5)$$

Αν εκφράσουμε την παραπάνω εξίσωση συναρτήσει των x, y παίρνουμε:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4)/A & \sin(\pi/4)/B \\ -\sin(\pi/4)/A & \cos(\pi/4)/B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (6)$$

Θα αναλύσουμε τη γενικότερη περίπτωση που περιγράφεται από την εξίσωση (6). Η εξειδίκευση για ειδικές περιπτώσεις (π.χ. $k=1$, $\delta=0$) στη συνέχεια, είναι πολύ ευκολότερη έχοντας τις τελικές γενικές αναλυτικές εκφράσεις.

Γενικές διαπιστώσεις

Στην εξίσωση (6) θέτουμε, $k = B / A$ και $x_s = x / A$, $y_s = y / kA$ και προκύπτει η ακόλουθη:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \quad (7)$$

Η παραπάνω μορφή μας οδηγεί στις ακόλουθες διαπιστώσεις:

I) Στο μετασχηματισμένο σύστημα x', y' η κίνηση είναι έλλειψη με αρχή το (0,0), όπως προέκυψε από την εξίσωση (4).

II) Το σύστημα x', y' έχει προέλθει από στροφή του x_s, y_s κατά $\pi/4$ (45^o) και αυτός ο προσανατολισμός, όπως βλέπουμε, είναι αναλλοίωτος (δεν εξαρτάται από τη διαφορά φάσης δ), τα δε χαρακτηριστικά της έλλειψης παραμένουν και αυτά αναλλοίωτα, κάτω από την στροφή αυτή.

III) Η μετάβαση στο αρχικό σύστημα x, y οδηγεί σε τροποποιημένη ελλειπτική τροχιά με διαφορετικό προσανατολισμό αξόνων.

Προσδιορισμός της τροχιάς

Θα βρούμε αρχικά τις εκφράσεις των ημιαξόνων της έλλειψης στο σύστημα x', y' . Από την (4) έχουμε:

$\dfrac{x'^2}{(\alpha+b)^2} + \dfrac{y'^2}{(\alpha-b)^2} = 1$, με ημιάξονες, $\alpha' = \alpha + b$ και $b' = \alpha - b$. Λόγω των σχέσεων ορισμού, $\dfrac{b'}{\alpha'} = \dfrac{\alpha-b}{\alpha+b} = \dfrac{\cos(\delta/2) - \sin(\delta/2)}{\cos(\delta/2) + \sin(\delta/2)} = \dfrac{1-\tan(\delta/2)}{1+\tan(\delta/2)} \Rightarrow$

$$\tan(\delta/2) = \frac{\alpha' - b'}{\alpha' + b'} \Rightarrow \boxed{\delta = 2\arctan\left(\frac{\alpha' - b'}{\alpha' + b'}\right)} \quad (8)$$

Επίσης, η διαφορά φάσης μπορεί να συσχετιστεί με την εκκεντρότητα της έλλειψης ως εξής:

$$\frac{b'}{\alpha'} = \sqrt{1-\varepsilon^2} \Rightarrow \boxed{\delta = 2\arctan\left(\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)}$$

Επομένως, η εξίσωση της έλλειψης στο σύστημα x', y' μπορεί να εκφραστεί αποκλειστικά ως συνάρτηση της διαφοράς φάσης δ :

$$\boxed{\frac{x'^2}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\delta}{2}\right)} + \frac{y'^2}{2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\delta}{2}\right)} = 1}$$

Η έλλειψη στο σύστημα x_s, y_s θα έχει τους ίδιους ημιάξονες (διαπίστωση ΙΙ) και απομένει να βρούμε πως αυτοί αλλάζουν μέσω της αλλαγής κλίμακας, δηλαδή από το x_s, y_s στο αρχικό x, y. Θα βρούμε την εξίσωση της έλλειψης στο αρχικό σύστημα x, y: Στην (4) αντικαθιστούμε τα x', y' συναρτήσει των x, y μέσω των σχέσεων ορισμού των x_A, x_B και παίρνουμε:

$$\frac{\left(x/A + y/kA\right)^2}{2\left(\alpha+b\right)^2} + \frac{\left(y/kA - x/A\right)^2}{2\left(\alpha-b\right)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\left(x + y/k\right)^2}{2A^2\left(\alpha+b\right)^2} + \frac{\left(y/k - x\right)^2}{2A^2\left(\alpha-b\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2/k^2 + 2xy/k}{2A^2\left(\alpha+b\right)^2} + \frac{x^2 + y^2/k^2 - 2xy/k}{2A^2\left(\alpha-b\right)^2} = 1 \Rightarrow$$

$$x^2\left(\frac{1}{2A^2\left(\alpha+b\right)^2} + \frac{1}{2A^2\left(\alpha-b\right)^2}\right) + y^2\left(\frac{1}{2k^2A^2\left(\alpha+b\right)^2} + \frac{1}{2k^2A^2\left(\alpha-b\right)^2}\right) +$$

$$xy\left(\frac{1}{kA^2\left(\alpha+b\right)^2} - \frac{1}{kA^2\left(\alpha-b\right)^2}\right) = 1 \Rightarrow$$

$$x^2\frac{\alpha^2+b^2}{A^2\left(\alpha^2-b^2\right)^2} + y^2\frac{\alpha^2+b^2}{k^2A^2\left(\alpha^2-b^2\right)^2} - \frac{4\alpha b}{kA^2\left(\alpha^2-b^2\right)^2}xy = 1 \quad (9)$$

Αλλά, $\alpha^2 + b^2 = 1$, $2\alpha b = \sin\delta$ και $\alpha^2 - b^2 = \cos\delta$, οπότε η (9) γίνεται:

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{k^2A^2} - \frac{2\sin\delta}{kA^2}xy = \cos^2\delta}$$ (10) ή με αντικατάσταση του k:

$$\boxed{\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2\sin\delta}{AB}xy = \cos^2\delta} \quad (11)$$

Προσδιορισμός των στοιχείων της έλλειψης

Για να βρούμε την τις κλίσεις και τις τιμές των ημιαξόνων τις έλλειψης, εργαζόμαστε ως εξής: Δεδομένης της εξίσωσης (11) στο αρχικό σύστημα, αναζητούμε την κατάλληλη γωνία στροφής φ (δεξιόστροφα-αρνητική) ενός υποθετικού συστήματος x'', y'' που ο άξονας x'' συμπίπτει με το φορέα του ημιάξονα α της έλλειψης. Στο x'', y'' η εξίσωση της έλλειψης θα έχει τη συνήθη μορφή της. Αν $c = \cos\varphi$ και $s = \sin\varphi$, οι νέες συντεταγμένες θα είναι:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = cx'' - sy'' \\ y = sx'' + cy'' \end{matrix}\right\} \quad (12)$$

Θεωρούμε τη γενική μορφή της εξίσωσης κωνικής τομής με βάση το αποτέλεσμα της εξίσωσης (11):

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - gxy = f \quad (13)$$, όπου $g = \dfrac{2\sin\delta}{AB}$ και $f = \cos^2\delta$.

Με αντικατάσταση των x'', y'' από τις (12) η (13) γίνεται:

$$\frac{c^2x''^2+s^2y''^2-2csx''y''}{A^2}+\frac{s^2x''^2+c^2y''^2+2csx''y''}{B^2}-$$

$$-g\left[\left(c^2-s^2\right)x''y''+cs\left(x''^2-y''^2\right)\right]=f\Rightarrow$$

$$x''^2\left[\frac{B^2\cos^2\varphi+A^2\sin^2\varphi}{A^2B^2}-\frac{1}{2}g\sin 2\varphi\right]+y''^2\left[\frac{B^2\sin^2\varphi+A^2\cos^2\varphi}{A^2B^2}+\frac{1}{2}g\sin 2\varphi\right]-$$

$$-\left[g(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-\sin 2\varphi/A^2+\sin 2\varphi/B^2\right]x''y''=f$$

Η συνθήκη που αναζητούμε είναι ο μηδενισμός του τρίτου όρου, δηλαδή:

$$-(g\cos 2\varphi-\sin 2\varphi/A^2+\sin 2\varphi/B^2)=0\Rightarrow\tan 2\varphi=\frac{g}{1/A^2-1/B^2}=\frac{gA^2B^2}{B^2-A^2}$$

Αλλά, $g=\dfrac{2\sin\delta}{AB}$, οπότε έχουμε:

$$\boxed{\tan 2\varphi=\frac{2AB\sin\delta}{B^2-A^2}}\ \text{ή}\ \boxed{\varphi'=-\varphi=\frac{1}{2}\arctan\frac{2AB\sin\delta}{A^2-B^2}=\frac{1}{2}\arctan\frac{2k\sin\delta}{1-k^2}}\quad(14)$$

Συνεπώς, στο αρχικό σύστημα x,y η εξίσωση θα είναι έλλειψη με κλίση $\tan\varphi'$ ως προς τον x, ή αλλιώς υπό γωνία φ'. Οι ημιάξονες είναι:

$$\boxed{a''=\cos\delta\left[\frac{B^2\cos^2\varphi+A^2\sin^2\varphi-AB\sin\delta\sin 2\varphi}{A^2B^2}\right]^{-1/2}}\quad(15)$$

$$\boxed{b''=\cos\delta\left[\frac{B^2\sin^2\varphi+A^2\cos^2\varphi+AB\sin\delta\sin 2\varphi}{A^2B^2}\right]^{-1/2}}\quad(16)$$

<u>Εναλλακτική μέθοδος εύρεσης των στοιχείων της έλλειψης</u>

Μια πολύ σύντομη και κομψή μέθοδος εύρεσης του προσανατολισμού των κυρίων αξόνων της έλλειψης στη γενική περίπτωση διαφορετικών πλατών και διαφοράς φάσης, είναι η εξής: Αναζητούμε τον προσανατολισμό του ενός ημιάξονα (έστω του α) με κριτήριο τη μέγιστη καμπυλότητα (ή ελάχιστη ακτίνα καμπυλότητας). Στη θέση αυτή της τροχιάς, λόγω συμμετρίας, το διάνυσμα θέσης είναι κάθετο στην ταχύτητα. Επομένως, το κριτήριο που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η καθετότητα αυτών των διανυσμάτων, δηλαδή, εσωτερικό γινόμενο ίσο με μηδέν:

$\vec{r}\cdot\vec{\upsilon}=\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}=0$ Αντικαθιστούμε τις συνιστώσες των διανυσμάτων από τις εξισώσεις (1) και παίρνουμε:

$$A\cos(\omega t-\delta/2)\left[-A\omega\sin(\omega t-\delta/2)\right]+B\sin(\omega t+\delta/2)B\omega\cos(\omega t+\delta/2)=0\Rightarrow$$

$$-\cos(\omega t-\delta/2)\sin(\omega t-\delta/2)+k^2\sin(\omega t+\delta/2)\cos(\omega t+\delta/2)=0\Rightarrow$$

$$-\sin(2\omega t-\delta)+k^2\sin(2\omega t+\delta)=0$$

Για $k=1$ η εξίσωση γίνεται: $\sin(2\omega t-\delta)=\sin(2\omega t+\delta)$, η οποία ισχύει αν και μόνον αν, $2\omega t=\pi/2$, διότι τότε: $\sin(\pi/2-\delta)=\cos(\delta)$ και $\sin(\pi/2+\delta)=\cos(-\delta)=\cos(\delta)$. Επομένως, στην περίπτωση αυτή η κλίση της έλλειψης θα είναι $\beta=\left.\frac{y}{x}\right|_{2\omega t=\pi/2}=1$,δηλαδή $\varphi'=\arctan\frac{y}{x}=\pi/4$ (45°).

Αν $k\neq 1$ τότε η αντίστοιχη εξίσωση γίνεται:

$$-\sin 2\omega t\cos\delta+\cos 2\omega t\sin\delta+k^2\left(\sin 2\omega t\cos\delta+\cos 2\omega t\sin\delta\right)=0\Rightarrow$$

$$-\tan 2\omega t\cos\delta+\sin\delta+k^2\left(\tan 2\omega t\cos\delta+\sin\delta\right)=0\Rightarrow$$

$$(k^2-1)\tan 2\omega t+(k^2+1)\tan\delta=0\Rightarrow\boxed{\tan 2\omega t=\frac{\left(1+k^2\right)\tan\delta}{\left(1-k^2\right)}}\quad(17)$$

$$\boxed{\beta=\frac{1}{2}\arctan\frac{\left(1+k^2\right)\tan\delta}{\left(1-k^2\right)}}\quad(18)\ \text{και}\ \boxed{\varphi'=\arctan\frac{k\sin(\beta+\delta/2)}{\cos(\beta-\delta/2)}}\quad(19)$$

Οι ημιάξονας α υπολογίζεται από το μέτρο του διανύσματος θέσης στο συγκεκριμένο σημείο:

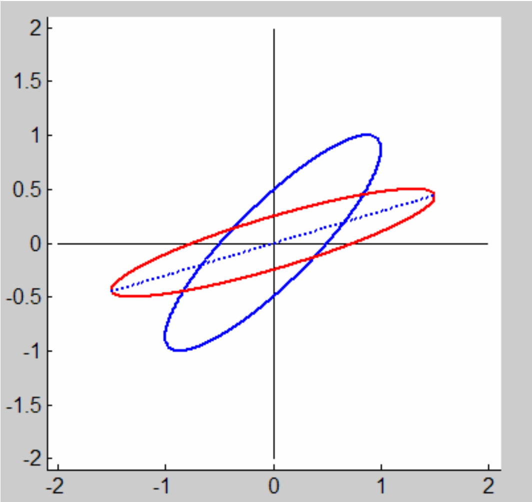
$$\boxed{\alpha=\left|\vec{r}_{\beta,\alpha}\right|=A\sqrt{\cos^2(\beta-\delta/2)+k^2\sin^2(\beta+\delta/2)}}\quad(20)$$

Ο ημιάξονας b βρίσκεται με το μετασχηματισμό $\beta\to\beta+\pi/2$ και εφαρμογή της (20):

$$\boxed{b=\left|\vec{r}_{\beta,b}\right|=A\sqrt{\cos^2(\beta+\pi/2-\delta/2)+k^2\sin^2(\beta+\pi/2+\delta/2)}}\quad(21)$$

Οι σχέσεις (14)-(19), (15)-(20) και (16)-(21) είναι μεταξύ τους ισοδύναμες, όπως έχει επιβεβαιωθεί με αριθμητικές εφαρμογές (δείτε το παράδειγμα που ακολουθεί).

Παράδειγμα



Παρακάτω αναφέρεται ένα παράδειγμα ελλειπτικής τροχιάς η οποία προκύπτει από τη σύνθεση δύο κινήσεων που περιγράφονται μέσω των ακόλουθων παραμετρικών εξισώσεων:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_A) = 1{,}5\cos(t + 0{,}349)$$
$$y = B\sin(\omega t + \varphi_B) = 0{,}5\cos(t + 1{,}396)$$

Δηλαδή θεωρήσαμε, $A = 1{,}5$, $B = 0{,}5$ (αδιάστατα, ή με αυθαίρετες μονάδες), $\omega = 1$, $\varphi_A = 0{,}349$ rad ($= 20^o$) και $\varphi_B = 1{,}396$ rad ($= 80^o$).

Έχουμε, $\delta = 80^o - 20^o = 60^o$ και $k = \dfrac{B}{A} = \dfrac{1}{3}$

Επομένως, η τροχιά θα είναι έλλειψη με τα χαρακτηριστικά, όπως προέκυψαν από πρόγραμμα υπολογισμού σε περιβάλλον MATLAB:

Στο σύστημα x_s, y_s οι ημιάξονες είναι:

$$\alpha' = \alpha + b = \cos\frac{\delta}{2} + \sin\frac{\delta}{2} = 1{,}366$$
$$b' = \alpha - b = \cos\frac{\delta}{2} - \sin\frac{\delta}{2} = 0{,}366$$

Στο σχήμα βλέπουμε το αρχικό ορθογώνιο σύστημα x, y και την έλλειψη (μπλέ γραμμή) για πλάτη ανηγμένα στη μονάδα (δηλαδή περιγραφή στο σύστημα x_s, y_s) με κλίση του ημιάξονα α υπό γωνία 45°.

Η πραγματική τροχιά (με τα θεωρούμενα διαφορετικά πλάτη) είναι η εμφανιζόμενη έλλειψη με την κόκκινη συνεχή γραμμή. Ο ημιάξονας α της έλλειψης αυτής απεικονίζεται με εστιγμένη μπλε γραμμή και έχει κλίση υπό γωνία φ'. Η γωνία αυτή υπολογίζεται με βάση τη σχέση (14), όπως παρακάτω, αλλά στο πρόγραμμα προσομοίωσης γίνεται απεικόνιση της έλλειψης μόνο με τις αρχικές παραμετρικές εξισώσεις κίνησης με σκοπό να επιβεβαιωθεί η ορθότητα των αναλυτικών αποτελεσμάτων.

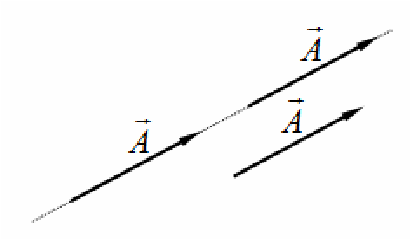
$$\varphi' = \frac{1}{2}\arctan\frac{2k\sin\delta}{1-k^2} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2(1/3)\sin 60^o}{1-(1/3)^2} = 16{,}5^o$$

Οι άξονες της προκύπτουσας έλλειψης έχουν υπολογιστεί από τις σχέσεις (15) και (16) και είναι: $\alpha'' = 1{,}563$ και $b'' = 0{,}240$. Η μεταβλητή φάση των ταλαντώσεων για τη θέση μέγιστης καμπυλότητας, είναι, $\beta = 32{,}6^o$.

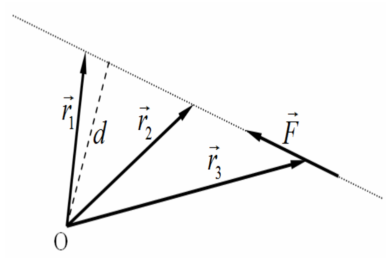
Ε1. Κατηγοριοποίηση διανυσμάτων

Ένα διάνυσμα προσδιορίζεται από το μέτρο και την κατεύθυνσή του (μέτρο και μοναδιαίο διάνυσμα) που αποτελούν τις τρεις ανεξάρτητες παραμέτρους του διανύσματος. Το μοναδιαίο διάνυσμα προσδιορίζει το φορέα (διεύθυνση) του διανύσματος. Στα μαθηματικά οι πράξεις μεταξύ διανυσμάτων δεν απαιτούν καμιά πρόσθετη πληροφορία για τα διανύσματα, πέραν από αυτήν που εμπεριέχουν εκφραζόμενα μέσω των συνιστωσών τους. Όμως, στις φυσικές και γεωμετρικές εφαρμογές χρειαζόμαστε περισσότερες πληροφορίες για ένα διάνυσμα, πέρα από τις παραπάνω, που μας αναγκάζει να κάνουμε την κατηγοριοποίηση των διανυσμάτων όπως παρακάτω:

α) **Ελεύθερα διανύσματα**
Τα ελεύθερα διανύσματα θεωρούμε ότι βρίσκονται οπουδήποτε στο χώρο και μπορούν να μετακινηθούν παράλληλα προς τον εαυτό τους ή κατά μήκος του φορέα τους (διεύθυνσή τους). Κατά τις μετακινήσεις αυτές, είναι προφανές ότι, τόσο το μέτρο όσο και η κατεύθυνσή τους (μοναδιαίο διάνυσμα) παραμένουν αναλλοίωτα (σχήμα).

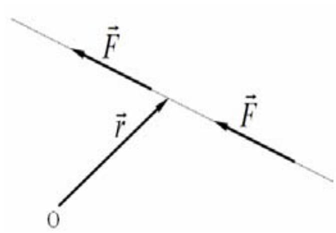


β) **Εφαρμοστά διανύσματα**
Αν ένα διάνυσμα προσδιορίζει θέση στο χώρο (διάνυσμα θέσης) πρέπει να έχει μια αυθαίρετη αρχή (την αρχή του συστήματος συντεταγμένων Ο), αλλιώς δεν ορίζεται η τροχιά ενός γεωμετρικού σημείου ή σωματιδίου. Ειδικότερα όμως σε πράξεις διανυσμάτων όπου συμμετέχει το διάνυσμα θέσης, η αρχή του πρέπει να αναφέρεται ως «σημείο αναφοράς» και τότε ανήκει στα εφαρμοστά διανύσματα. Για παράδειγμα στον υπολογισμό της ροπής μιας δύναμης $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$, λέμε, «ροπή της δύναμης ως προς σημείο», δηλαδή ως προς την αρχή του $\vec{r}$. Το ίδιο συμβαίνει και στον υπολογισμό της στροφορμής $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{\upsilon}$. Για το λόγο αυτό τόσο η ροπή δύναμης όσο και η στροφορμή σωματιδίου, εξαρτώνται από το σημείο αναφοράς. Δηλαδή σε διαφορετικές επιλογές σημείων αναφοράς έχουμε διαφορετικό αποτέλεσμα. Αποδεικνύεται ότι, μόνο στην περίπτωση ζεύγους δυνάμεων η ροπή δεν εξαρτάται από το σημείο αναφοράς. Αυτό όμως βασίζεται ακριβώς στην απαίτηση τα διανύσματα θέσης για την κάθε δύναμη πρέπει να είναι εφαρμοστά διανύσματα.
Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι, για τις διάφορες κατευθύνσεις του $\vec{r}\ \left(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3\right)$ με την ίδια αρχή Ο, η ροπή παραμένει αμετάβλητη, $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = Fd.\hat{z}$, διότι η κάθετη συνιστώσα του $\vec{r}$ ως προς το φορέα της δύναμης είναι δεδομένη και άρα σταθερή (μέτρου d). Επομένως, <u>τη ροπή την καθορίζει η θέση του σημείου αναφοράς σε σχέση με το φορέα της δύναμης</u>.



γ) **Ολισθαίνοντα διανύσματα**

Τα ολισθαίνοντα διανύσματα είναι εκείνα που όταν συμμετέχουν σε πράξη της οποίας το αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τη θέση τους κατά μήκος φορέα (διεύθυνση) τους. Για παράδειγμα, η δύναμη στον υπολογισμό της ροπής ή η ορμή (ή ταχύτητα) στον υπολογισμό της στροφορμής, είναι ολισθαίνοντα διανύσματα διότι μπορούν να μετακινηθούν κατά μήκος του φορέα τους χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε ότι, για τις διάφορες θέσεις της $\vec{F}$ κατά μήκος του φορέα της, η ροπή και πάλι δεν αλλάζει, $N = \vec{r} \times \vec{F} = Fd.\hat{z}$. Επομένως, <u>τη ροπή την καθορίζει ο φορέας της δύναμης σε σχέση με τη θέση του σημείου αναφοράς</u>.



Με όρους Φυσικής, τα παραπάνω οδηγούν στις ακόλουθες διαπιστώσεις:
Για τη μελέτη της δυναμικής των συστημάτων σωματιδίων ή στερεών σωμάτων, το διάνυσμα θέσης $\vec{r}$ πρέπει να έχει συγκεκριμένη αρχή και ο φορέας της δύναμης $\vec{F}$ να είναι επίσης συγκεκριμένος.

Ε2. Μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων δυναμικής

Η εφαρμογή του $2^{ου}$ νόμου του Newton για την επίλυση προβλημάτων δυναμικής, οδηγεί, εν γένει, σε διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς το διάστημα. Σε πολλές περιπτώσεις διευκολύνει η χρήση της ταχύτητας και της επιτάχυνσης, έτσι ώστε να καταστρώσουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης που ολοκληρώνεται σχετικά εύκολα.

$$\left.\begin{aligned} m\vec{\alpha}(t) &= \vec{F}(t) \\ \frac{d\vec{\upsilon}(t)}{dt} &= \vec{\alpha}(t) \\ \frac{d\vec{r}(t)}{dt} &= \vec{\upsilon}(t) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Παρακάτω, θα αναλυθεί η μεθοδολογία αυτή για τις ακόλουθες τρεις βασικές περιπτώσεις κατά τη μία συνιστώσα, έστω x :

α) Η δύναμη ως συνάρτηση του χρόνου $F = F(t)$ με $F = F(t_0)$ για $t = t_0$

Στην περίπτωση αυτή το σύστημα εξισώσεων (1) δίνει:

$$\alpha(t) = \frac{F(t)}{m}, \ \upsilon(t) = \int_{t_0}^{t} \alpha(t')dt = \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} F(t')dt \ \text{ και } \ x(t) = \int_{t_0}^{t} \upsilon(t')dt \ \text{ με αρχικές συνθήκες,}$$

Αντιστρόφως, αν γνωρίζουμε το $x(t)$: $\upsilon(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, $\alpha(t) = \dfrac{d\upsilon(t)}{dt}$ και $F(t) = m\alpha(t)$

β) Η δύναμη ως συνάρτηση του διαστήματος $F = F(x)$ με $F = F(x_0)$ για $t = t_0$

Στην περίπτωση αυτή, το διάστημα πρέπει να θεωρηθεί ως πεπλεγμένη συνάρτηση της ταχύτητας και του χρόνου, $x = x(\upsilon(t))$. Μέσω της τρίτης εξίσωσης των (1) έχουμε:

$$\upsilon \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{dx}{d\upsilon}\alpha(x) \Rightarrow \upsilon d\upsilon = \alpha(x)dx \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \upsilon' d\upsilon' = \int_{x_0}^{x} \alpha(x')dx' \Rightarrow$$

$$\upsilon^2(x) - \upsilon_0^2(x) = 2\int_{x_0}^{x} \alpha(x')dx' \text{. Επίσης, } \frac{dx}{dt} \equiv \upsilon \Rightarrow \frac{dx}{d\upsilon} = dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\upsilon(x')} = t - t_0 \Rightarrow$$

$\upsilon(t) = \dfrac{dt^{-1}(x)}{dt}$, όπου $t^{-1}(x)$ η αντίστροφη συνάρτηση της $t(x)$.

γ) Η δύναμη ως συνάρτηση της ταχύτητας $F = F(\upsilon)$ με $F = F(\upsilon_0)$ για $t = t_0$

Θεωρούμε τώρα την ταχύτητα ως πεπλεγμένη συνάρτηση του διαστήματος και του χρόνου, $\upsilon = \upsilon(x(t))$, οπότε από τις (1) έχουμε:

$$\alpha(\upsilon) \equiv \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\upsilon \Rightarrow \frac{\upsilon d\upsilon}{\alpha(\upsilon)} = dx \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{\upsilon' d\upsilon'}{\alpha(\upsilon')} = x(\upsilon) - x_0 \Rightarrow x(\upsilon) - x_0 = \frac{1}{m}\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{\upsilon' d\upsilon'}{F(\upsilon')}$$

και επίσης, $\dfrac{d\upsilon}{dt} = \alpha(\upsilon) \Rightarrow \dfrac{d\upsilon}{\alpha(\upsilon)} = dt \Rightarrow \dfrac{1}{m}\displaystyle\int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \dfrac{d\upsilon'}{F(\upsilon')} = t - t_0 \Rightarrow x(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} t^{-1}(\upsilon)dt'$.

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \alpha(\upsilon) \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\alpha(\upsilon)} = dt \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} \frac{d\upsilon'}{\alpha(\upsilon')} = t - t_0 \Rightarrow x(t) = \int_{t_0}^{t} t^{-1}(\upsilon) .$$

Ε3. Αδρανειακά και μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς

Όπως είναι γνωστό ο $1^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα ουσιαστικά ορίζει τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς (καθορίζει τον πειραματικό τρόπο χαρακτηρισμού του συστήματος). Επομένως, μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω μεθοδολογία για να δούμε σε ποια συστήματα αναφοράς ο $2^{ος}$ Νόμος του Νεύτωνα έχει την καθολικότητα που ορίζει η «Αρχή της Σχετικότητας» και πως τροποποιείται στην περίπτωση των μη αδρανειακών συστημάτων αναφοράς με την εισαγωγή των αδρανειακών (ή υποθετικών) δυνάμεων

1. Θεωρούμε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς S καθώς και ένα δεύτερο S' το οποίο απομακρύνεται σε σχέση με το S με ταχύτητα $V(t)$ κατά τη διεύθυνση του άξονα x και οι άξονες τους συμπίπτουν για $t = 0$, δηλαδή εν γένει δεν είναι αδρανειακό, εκτός εάν $V(t) = V =$ σταθ.

2. Βρίσκουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού των συντεταγμένων (με $OO' = R(t)$) (Μετασχηματισμός συντεταγμένων του Γαλιλαίου):

$$x' = x - R(t)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

3. Βρίσκουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού των ταχυτήτων μέσω παραγώγισης (Μετασχηματισμός ταχυτήτων του Γαλιλαίου):

$$\upsilon'_x = \upsilon_x - \dot{R}(t)$$
$$\upsilon'_y = \upsilon_y$$
$$\upsilon'_z = \upsilon_z$$

4. Βρίσκουμε τις σχέσεις μετασχηματισμού των επιταχύνσεων μέσω νέας παραγώγισης:

$$\alpha'_x = a_x - \ddot{R}(t)$$
$$\alpha'_y = \alpha_y$$
$$\alpha'_z = \alpha_z$$

5. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

α) $V(t) = V =$ σταθ., οπότε το S' είναι αδρανειακό και $\ddot{R}(t) = \frac{dV}{dt} = 0$. Οπότε,

$\alpha'_x = a_x$ και γενικά $\vec{\alpha}' = \vec{a}$ σε τυχαία κατεύθυνση απομάκρυνσης.

Συνεπώς, ο $2^{ος}$ Νόμος του Νεύτωνα θα είναι $m\vec{a} = m\vec{\alpha}' = \vec{F}$ δηλαδή θα έχει την ίδια ακριβώς μορφή και στο S' όπως στο S , αλλά και σε κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, δηλαδή: $\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$, όπου $\vec{F}$ η συνισταμένη των πραγματικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα μάζας m .

β) $V(t)$ μη σταθερό, οπότε το S' είναι μη αδρανειακό και $\ddot{R}(t) \neq 0$, έστω $\ddot{R}(t) = a_0$. Οπότε,

$\alpha'_x = a_x - a_0$ και γενικά $\vec{\alpha}' = \vec{a} - \vec{\alpha}_0$ ή $\vec{a} = \vec{\alpha}' + \vec{\alpha}_0$ σε τυχαία κατεύθυνση απομάκρυνσης των δύο συστημάτων αναφοράς.

Ο 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα στο σύστημα S' μπορεί τώρα να γραφτεί με χρήση της παραπάνω σχέσης μεταξύ των επιταχύνσεων ως εξής: $m\vec{a} = m(\vec{\alpha}' + \vec{\alpha}_0) = \vec{F} \Rightarrow m\vec{\alpha}' = \vec{F} - m\vec{\alpha}_0 = \vec{F} + \vec{F}_0$, όπου $\vec{F}$ η συνισταμένη των πραγματικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα μάζας m και $\vec{F}_0 = -m\vec{\alpha}_0$ η αδρανειακή δύναμη (αποκλειστικά μεταφορικής κίνησης). Επομένως, ο 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα για μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς δεν έχει την ίδια (γνωστή) μορφή πλέον αλλά την ακόλουθη: $\boxed{m\vec{\alpha}' = \vec{F} + \vec{F}_0}$. Προκύπτει λοιπόν το συμπέρασμα ότι στη συνισταμένη των πραγματικών δυνάμεων θα πρέπει να προσθέσουμε (διανυσματικά βεβαίως) και την αδρανειακή δύναμη $\vec{F}_0 = -m\vec{\alpha}_0$. Η επιτάχυνση $\vec{\alpha}'$ αναφέρεται στο σύστημα S' (μη αδρανειακό) και προφανώς συνδέεται με τα κινηματικά μεγέθη του ίδιου συστήματος με το γνωστό τρόπο.

Η μετατροπή των κινηματικών μεγεθών από το S στο S' και αντίστροφα γίνεται μέσω των παραπάνω μετασχηματισμών.

Αν το σύστημα S' είναι αμιγώς περιστρεφόμενο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$ τότε αποδεικνύεται ότι (βλέπε το Παράρτημα Α1):

$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega}\times\vec{V}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ ή $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_c + \vec{a}_k$

Δηλαδή $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{V}'$ και $\vec{a}_k = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

(Σημειώνεται ότι το διάνυσμα $\vec{\omega}$ ορίζεται ως εξής: $\vec{\omega} = \omega\hat{z}$, όπου $\hat{z}$ το μοναδιαίο διάνυσμα επί του άξονα περιστροφής με κατεύθυνση σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού).

Σε αυτήν την περίπτωση ο 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_c - m\vec{a}_k = \vec{F} + \vec{F}_c + \vec{F}_n}$$

όπου $\vec{a}'$ η γραμμική επιτάχυνση, $\vec{a}_c$ η επιτάχυνση ***Coriolis*** και $\vec{a}_k$ η ***Κεντρομόλος*** επιτάχυνση. Επίσης, $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$ είναι η δύναμη ***Coriolis*** (από το όνομα του *Gustave-Gaspard Coriolis*, 1853) και $\vec{F}_k = -m\vec{a}_n$, η ***Φυγόκεντρος*** δύναμη.

Αν το μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς S' εκτελεί συνδυασμένη μεταφορική και περιστροφική κίνηση τότε ο 2^{ος} Νόμος του Νεύτωνα γράφεται:

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_0 - m\vec{a}_c - m\vec{a}_n = \vec{F} + \vec{F}_0 + \vec{F}_c + \vec{F}_k}$$

όπου $\vec{\alpha}_0$ η επιτάχυνση του S' στη διεύθυνση (φορέα) της μεταφορικής κίνησης. Η περίπτωση αυτή είναι η γενικότερη που μπορεί κανείς να συναντήσει στη μελέτη φαινομένων.

Ε4. Στροβιλισμός διανύσματος – Δυναμικά πεδία

Το περίφημο θεώρημα του Stokes, $\oint_{\Gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{A} \vec{\Omega}\cdot d\vec{a}$, αποτελεί γενίκευση του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού και βρίσκει εφαρμογή τόσο στα μαθηματικά όσο και στη Φυσική, όπως για παράδειγμα, στη μελέτη των δυναμικών πεδίων. Το αριστερό μέλος της εξίσωσης αφορά στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (κυκλοφορία) μιας διανυσματικής συνάρτησης $\vec{F}$ κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής Γ ενώ το δεξί μέλος αφορά στο επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανύσματος του στροβιλισμού της δύναμης, $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, όπου $\Omega_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}$, $\Omega_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}$ και $\Omega_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$.

Ο θεμελιώδης ορισμός της κάθε συνιστώσας είναι ο ακόλουθος: $\Omega_x = \lim\limits_{|A|\to 0} \frac{\oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}}{|A|}$ (και παρόμοια για τις συνιστώσες y και z), όπου γ μια κλειστή διαδρομή με εμβαδόν A. Ο στροβιλισμός υπολογίζεται και μέσω του τελεστή $\vec{\nabla}$ ως εξής: $\vec{\Omega} = \vec{\nabla}\times\vec{F}$.

Με όρους Μαθηματικών, το θεώρημα μας δηλώνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της δύναμης $\vec{F}$ κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής *Γ*, εναλλακτικά, από το επιφανειακό ολοκλήρωμα του διανύσματος του στροβιλισμού $\vec{\Omega}$ της δύναμης στην επιφάνεια *A* που έχει ως σύνορο την καμπύλη Γ. Το απειροστό εμβαδόν $d\vec{a}$ ορίζεται ως εξής: $d\vec{a} = da\ \hat{n}$, δηλαδή έχει μέτρο το απειροστό εμβαδόν da (επί της επιφάνειας *A*) και κατεύθυνση το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\hat{n}$ σε αυτήν στο εξεταζόμενο σημείο.

Με όρους Φυσικής, το θεώρημα συσχετίζει το έργο μιας δύναμης ανά μονάδα επιφάνειας κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής Γ με τον ολικό στροβιλισμό της δύναμης στην επιφάνεια *A* που έχει ως σύνορο τη Γ. Στη μελέτη των δυναμικών πεδίων αξιοποιούμε το θεώρημα του Stokes μόνο ως προς την ειδική περίπτωση του μηδενισμού, είτε του αριστερού είτε του δεξιού μέλους της εξίσωσης. Δηλαδή, αν ο στροβιλισμός $\vec{\Omega}$ της δύναμης είναι μηδέν, τότε αναγκαστικά και το έργο κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής θα είναι ίσο με μηδέν. Ισχύει όμως και το αντίστροφο: αν το έργο κατά μήκος οποιασδήποτε κλειστής διαδρομής είναι μηδέν, τότε θα είναι μηδέν και ο στροβιλισμός της δύναμης σε όλη την επιφάνεια, διότι το εσωτερικό γινόμενο $\hat{\Omega}\cdot\hat{n}$ είναι θετικά ορισμένο. Επομένως, <u>ο μηδενισμός του στροβιλισμού της δύναμης αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι το δυναμικό πεδίο διατηρητικό</u>.

Ισχύει ακόμη το εξής: αν η δύναμη είναι βαθμίδα (ή κλίση) κάποιας βαθμωτής συνάρτησης, δηλαδή $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, τότε ο στροβιλισμός της είναι μηδέν και επομένως το πεδίο είναι διατηρητικό. Αυτό συμβαίνει διότι ο στροβιλισμός της κλίσης είναι πάντοτε μηδέν ($\vec{\nabla}\times(-\vec{\nabla}U) = 0$). Στην περίπτωση αυτή η βαθμωτή συνάρτηση U θα παριστάνει τη δυναμική ενέργεια.

Ζ1. Αρχές της Θεωρίας της Ειδικής Σχετικότητας

Η εννοιολογική ερμηνεία-συνιστώσα μιας θεωρίας προσδίδει βαρύνουσα σημασία στις μαθηματικές εξισώσεις της. Στη *μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία* και τις εφαρμογές της από τον *A. Einstein*, το κύριο ερώτημα αναφέρεται στη σημασία της *καμπυλότητας* καθώς και στην *υπόσταση* των διαστάσεων του χώρου και του χρόνου. Το σημαντικότερο σημείο είναι το ότι, η υπόσταση των διαστάσεων, που έχει να κάνει με τη διάκριση μεταξύ «**εξωγενούς**» και «**εγγενούς**» καμπυλότητας[6], είναι ένα ζήτημα εντελώς διαχωρισμένο από τα Μαθηματικά. Όμως, μια επιστημονική θεωρία μπορεί να ερμηνεύει πολύ καλά τα πειραματικά αποτελέσματα χωρίς την ανάγκη να εξεταστεί το πώς είναι τα πράγματα οντολογικά στα παρατηρούμενα φαινόμενα. Οι Θεωρίες της Ειδικής και Γενικής Σχετικότητας ερμηνεύουν τα φυσικά φαινόμενα με πληρότητα και ακρίβεια, αλλά το οικοδόμημά τους εδράζεται στις παραπάνω έννοιες γεωμετρικής υφής (διαστάσεις, καμπυλότητα), με προεξέχουσα αυτήν της μη-Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Συνεπώς, η βαθύτερη διερεύνηση των εννοιών αυτών, μπορεί να οδηγήσει επαγωγικά σε σκέψεις πάνω στα θεμελιώδη ζητήματα που αναφέρονται στην πραγματική υπόσταση του φυσικού χώρου ή υπό άλλη οπτική γωνία, στο «τοπίο» του κενού. Με δεδομένο ότι οι ανθρώπινες δυνατότητες αντίληψης του χώρου περιορίζονται στις τρεις διαστάσεις (που υποδηλώνουν οι τρεις βαθμοί ελευθερίας), η υπόθεση ύπαρξης τέταρτης ή περισσοτέρων διαστάσεων και καμπυλότητας οποιασδήποτε μορφής, ορίζει ένα από τα πιο βαθυστόχαστα προβλήματα της Φυσικής με φιλοσοφικές προεκτάσεις. Στο πρόβλημα αυτό μπορούν προς το παρόν να υπάρξουν μόνον υποθέσεις και εκδοχές οι οποίες είναι χρήσιμο να θιγούν διότι καθιστούν σαφέστερο το γενικό πλαίσιο της αναζήτησης.

Μέσα από μια φιλοσοφική προσέγγιση και χροιά, οι δυνατές εκδοχές για το παραπάνω πρόβλημα, μπορούν να συμπτυχθούν και να προσανατολιστούν προς μια από τις τρεις ακόλουθες πεποιθήσεις : α) *Υπάρχουν μη αληθινές μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες*, και όχι άλλες διαστάσεις πέραν των τριών, παρά μόνον Ψευδο-Γεωμετρίες που αναφέρονται σε καμπύλες του Ευκλείδειου χώρου. β) *Δεν υπάρχουν πραγματικές μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες*, αλλά αντιμετωπίζουμε λειτουργικά τη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία στον Ευκλείδειο χώρο, όπου η εξωγενής καμπυλότητα είναι μη αντιληπτή (π.χ. λόγω κρυφών ή συμπαγοποιημένων επιπλέον διαστάσεων) πέρα από τις οικείες τρεις διαστάσεις. γ) *Υπάρχουν πραγματικές μη-Ευκλείδειες Γεωμετρίες* των οποίων οι εγγενείς ιδιότητες οντολογικά δεν προϋποθέτουν επιπλέον διαστάσεις, ασχέτως αν υπάρχουν πράγματι μόνο τρεις ή περισσότερες χωρικές διαστάσεις. Από τα παραπάνω είναι φανερό, ότι οι δρόμοι αναζήτησης της Φυσικής παραμένουν ανοικτοί, αλλά ίσως δύσβατοι και δαιδαλώδεις. Οι θεωρίες της Ειδικής και Γενικής Σχετικότητας είναι αυτές που έχουν συνδέσει με τον πιο ισχυρό τρόπο τη Φυσική με τα Μαθηματικά [20].

[6] Μελετήθηκε από τον Gauss και τον Riemann.

Ο χωρόχρονος υιοθετήθηκε στη Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας (ΘΕΣ) με την προϋπόθεση ότι αναφέρεται στον κενό χώρο, απουσία ύλης-ενέργειας και έχει μηδενική εγγενή καμπυλότητα, δηλαδή είναι *ομαλός* (flat). Αυτός είναι και ο λόγος που η θεωρία αυτή ονομάζεται «**Ειδική**». Η θεωρία αυτή δεν μπορεί να επεκταθεί σε μια θεωρία Βαρύτητας, έδωσε όμως πολλά από τα στοιχεία της για την ανάπτυξη μιας σχετικιστικής θεωρίας Βαρύτητας, δηλαδή τη Θεωρία της Γενικής Σχετικότητας (ΘΓΣ). Η ύπαρξη επιτάχυνσης στα πλαίσια της ΘΕΣ, αφενός μεν μεταβάλλει την κανονική μετρική σε άλλη γενικότερη (που συνεπάγεται μη μηδενική εγγενή καμπυλότητα του χωρόχρονου) και αφετέρου οι κοσμικές γραμμές των ελεύθερων κινήσεων από *ευθείες* απουσία ύλης-ενέργειας στο χωρόχρονο μετατρέπονται σε *γεωδεσιακές* της κατάλληλης μετρικής τοπικού χαρακτήρα.

Στο χώρο Minkowski, η τέταρτη διάσταση (του χρόνου) δεν είναι απόλυτα ξεκάθαρο κατά πόσο θα πρέπει να αντιμετωπιστεί ως μια διαφοροποιημένη διάσταση (μη ισότιμη) από τις αντίστοιχες χωρικές. Σε κάποιες αναλύσεις αποτελεί διάσταση κατά τον φανταστικό άξονα ict, για να εκφραστεί η νέα μετρική μέσω του τετραγώνου της φανταστικής μονάδας $i^2 = -1$, που όμως δεν έχει κάποιο φυσικό νόημα. Όμως, μια θεώρηση ισότιμης διάστασης μέσω της σταθεράς της ταχύτητας του φωτός στο κενό c, δηλαδή ως $\ell \equiv ct$ με διαστάσεις μήκους, είναι συμβατή με την υπόθεση ότι μια μη-Ευκλείδεια Γεωμετρία μπορεί πράγματι να υφίσταται, ασχέτως αν δεν είναι εφικτή η σύλληψή της από τις ανθρώπινες αισθήσεις, που είναι «εγκλωβισμένες» στην αντίληψη μόνο τριών διαστάσεων του Ευκλείδειου χώρου. Στη θεώρηση αυτή θα στηριχθεί η περιγραφή που ακολουθεί και της οποίας κύριο χαρακτηριστικό είναι η διαφοροποιημένη μετρική του χώρου Minkowski.

Ο μεγάλος μαθηματικός H. Poincaré από το 1899 και αργότερα, το 1900 και 1904, εξέφρασε τη γνώμη ότι το «μηδενικό αποτέλεσμα» του πειράματος *Michelson-Morley* (ότι η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι σταθερή και ίση με c μη εξαρτώμενη από τον εκάστοτε παρατηρητή) αποτελούσε την εκδήλωση της ισχύος μιας γενικής αρχής που διατυπώνεται ως εξής: *Είναι αδύνατο να προσδιοριστεί πειραματικά η απόλυτη κίνηση ή αλλιώς, δεν υπάρχει απόλυτο σύστημα ηρεμίας, και κατά συνέπεια, οι νόμοι της Φυσικής πρέπει να είναι ίδιοι για παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους*. Την αρχή αυτή την ονόμασε «**Αρχή της Σχετικότητας**».

Ο Poincaré κατέληξε στο συμπέρασμα, ότι θα έπρεπε να αναπτυχθεί ένας νέος τύπος δυναμικής θεωρίας, κύριο χαρακτηριστικό της οποίας εκτός των άλλων, θα ήταν το αξίωμα ότι η μέγιστη ταχύτητα που θα μπορούσε να επιτευχθεί είναι αδύνατο να υπερβαίνει αυτήν της ταχύτητας του φωτός στο κενό. Το 1905 ο A. Einstein δημοσίευσε την εργασία του «Περί ηλεκτροδυναμικής των κινουμένων σωμάτων», στη οποία ανέπτυξε ουσιαστικά τη θεωρία της «Ειδικής Σχετικότητας», με βάση τα παρακάτω δύο αξιώματα:

I. Της αρχής της Σχετικότητας.
II. Της σταθερότητας και ισοτροπίας της ταχύτητας του φωτός.

Στην πρώτη σελίδα του άρθρου του έγραψε τα εξής: «*Είναι γνωστό ότι η ηλεκτροδυναμική του Maxwell – όπως οι περισσότεροι την αντιλαμβάνονται σήμερα – όταν εφαρμόζεται σε κινούμενα σώματα οδηγεί σε ασυμμετρίες που δε φαίνεται να πηγάζουν από τα ίδια τα φαινόμενα…*». Αυτή η βασική επισήμανση διαδήλωνε την πεποίθησή του για την ισχύ της Αρχής της Σχετικότητας και στα ηλεκτρομαγνητικά φαινόμενα όπως συνέβαινε και για τα μηχανικά φαινόμενα. Επίσης, παρήγαγε τον τρόπο μετασχηματισμού των φυσικών ποσοτήτων στα πλαίσια αυτής της θεωρίας.

Το πειραματικό αποτέλεσμα της σταθερότητας της ταχύτητας του φωτός για οποιονδήποτε αδρανειακό παρατηρητή (που θεωρήθηκε ως αξίωμα), αποτελεί μια εγγενή ιδιότητα του ίδιου του χώρου. Επειδή το μόνο σωματίδιο που κινείται με ταχύτητα c είναι το φωτόνιο, μπορεί να δημιουργήσει την εσφαλμένη εντύπωση ότι η ΘΕΣ είναι μια θεωρία που πραγματεύεται τις ιδιότητες του φωτός. Όμως, η ΘΕΣ είναι η Δυναμική Θεωρία της Μηχανικής που αφορά σε όλα τα σωματίδια, αλλά και στο φωτόνιο. Η ταχύτητα του φωτός, είναι **πεπερασμένη** αλλά και **σταθερή**, υπό την έννοια που αναφέρθηκε παραπάνω. Η υπόθεση της **ομοιογένειας** και η **ισοτροπίας** του χώρου σε συνδυασμό με την Αρχή της Σχετικότητας, αποδεικνύεται ότι οδηγεί σε μετασχηματισμούς της μορφής Lorentz όπου μια σταθερά (εν γένει $v \neq c$, αλλά πεπερασμένη) αποτελεί τη μέγιστη δυνατή παρατηρήσιμη ταχύτητα (έσχατη ταχύτητα). Η τιμή της σταθεράς $v = \infty$ οδηγεί στους μετασχηματισμούς του Galileo. Αλλά η αριθμητική τιμή της v δεν μπορεί να προκύψει από τις παραπάνω θεωρήσεις συμμετρίας, παρά μόνον από πειραματική μέτρηση που δεν είναι άλλη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό, δηλαδή $v = c$.

Η συγκεκριμένη τιμή του c ($\cong 3\times10^8$ m/s) είναι χαρακτηριστικό του ίδιου του κενού χώρου και πράγματι σχετίζεται με τη μαγνητική διαπερατότητα και διηλεκτρική σταθερά του κενού ($c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$). Το φωτόνιο όταν δημιουργείται, κινείται με την ταχύτητα του φωτός και γι' αυτό το λόγο δεν υπάρχει σύστημα ηρεμίας του φωτονίου. Λόγω της μηδενικής μάζας ηρεμίας του φωτονίου, η ΘΕΣ δεν θα μπορούσε να δώσει ποσοτικά την ορμή και την ενέργειά του παρά μόνο τη σχέση μεταξύ τους, $E = pc$. Εξάλλου, δε θα μπορούσε να διακριθεί ένα φωτόνιο χαμηλής ενέργειας από ένα υψηλής αφού έχουν την ίδια ταχύτητα και τα δύο! Όμως, με τη συνδρομή της Κβαντομηχανικής το φωτόνιο έχει **ενέργεια-κβάντο** ($E = \hbar v$) και άρα μέσω της ΘΕΣ έχει και **ορμή** ($p = E/c = \hbar k$), όπου $\hbar$ η σταθερά του Planck και k ο κυματάριθμος. Επιπλέον, το φωτόνιο αποτελεί μια οντότητα που συνίσταται από περιοδική αμοιβαία ταλάντωση των συνιστωσών του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που ακολουθεί μια ειδική κοσμική γραμμή-τη «**φωτοειδή**». Κατά συνέπεια, το φωτόνιο μπορεί να θεωρηθεί ως ο εκφραστής της γεωμετρίας αλλά και ο συνδετικός κρίκος μεταξύ των θεωριών Μηχανικής, Ηλεκτρομαγνητισμού και Κβαντομηχανικής [11,21].

Θεμελιώδεις έννοιες

Η θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας είναι μια πολύ όμορφη θεωρία και έχει επαληθευθεί πειραματικά με τον πιο εντυπωσιακό τρόπο. Στην περιγραφή των βασικών αρχών, των νέων μεγεθών και των συνεπειών της, είναι αναγκαίο να γίνουν πολύ σαφείς οι ακόλουθες έννοιες [11,12]:

- «**Νευτώνειος Αδρανειακός Παρατηρητής**» (ΝΑΠ ή ΑΠ): Ο παρατηρητής (ή σύστημα αναφοράς) για τον οποίο ισχύει ο $1^{ος}$ νόμος του Newton, γεγονός που μπορεί να επιβεβαιώσει, και δυνάμει, εκτελεί μετρήσεις με βάση ποσότητες της Νευτώνειας Μηχανικής (π.χ. μέτρηση διαστημάτων με πρότυπο μέτρο και χρόνου με απόλυτο-παγκόσμιο ρολόι).

- «**Σχετικιστικός Αδρανειακός Παρατηρητής**» (ΣΑΠ): Ο παρατηρητής (ή σύστημα αναφοράς) για τον οποίο ισχύει ο $1^{ος}$ νόμος του Newton, γεγονός που μπορεί να επιβεβαιώσει, και δυνάμει, εκτελεί μετρήσεις με βάση ποσότητες της ΘΕΔ-σχετικιστικές ποσότητες (μέτρηση διαστημάτων μέσω φωτεινής δέσμης-φωτομετρίας[7] και χρόνου με το ιδιορολόι του).

- «**Διατηρούμενο**» μέγεθος: Το μέγεθος το οποίο παραμένει αμετάβλητο πριν και μετά από κάποιο φαινόμενο. Τα διατηρούμενα μεγέθη της Φυσικής προκύπτουν από την αντίστοιχη **Συμμετρία της Φυσικής** (χωρικής μετατόπισης-ομοιογένεια→διατήρηση ορμής, περιστροφής-ισοτροπία →διατήρηση στροφορμής, χρονικής μετατόπισης-ομοιογένειας του χρόνου→διατήρηση ενέργειας, χωρικής ανάκλασης→διατήρηση ισοτιμίας). Για παράδειγμα η μάζα ηρεμίας **δε διατηρείται**, αλλά **είναι αναλλοίωτη** (αξιωματικά), ενώ η ενέργεια **διατηρείται** αλλά **δεν είναι αναλλοίωτη**.

- «**Αναλλοίωτο**» μέγεθος: Η ποσότητα η οποία παραμένει αμετάβλητη για κάθε αδρανειακό παρατηρητή ή αλλιώς κάτω από τους αντίστοιχους μετασχηματισμούς. Τα αναλλοίωτα μεγέθη της Νευτώνειας Μηχανικής και της Ειδικής Σχετικότητας διαφέρουν, αφού διαφέρουν ριζικά και οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί.

- «**Αρχή του Συναλλοίωτου**»: Η ιδιότητα που έχει μια σχέση φυσικών ποσοτήτων να μην αλλάζει μορφή κάτω από συγκεκριμένο μετασχηματισμό από ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς σε ένα άλλο.

- «**Μετρική**» του χώρου η_{ij}: Το βαθμωτό (εσωτερικό) γινόμενο είναι μια εμπνευσμένη ιδέα στους υπολογισμούς **συνήθων διανυσμάτων** (τριδιανυσμάτων) και **τετραδιανυσμάτων** (four-vectors). Η μετρική του χώρου καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται το βαθμωτό γινόμενο των διανυσμάτων του χώρου και επομένως και το μέτρο τους ή **διάστημα**. Στον τριδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, το διάστημα είναι αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς συντεταγμένων της ομάδας Galileo. Η μετρική του Ευκλείδη εκφράζει το Πυθαγόρειο θεώρημα με

---

[7] Κατά ένα γενικότερο ορισμό, ο ΑΠ είναι ο παρατηρητής που βρίσκεται σε ελεύθερη πτώση και είναι μη περιστρεφόμενος.

χρήση απειροστής μεταβολής του συνήθους **διανύσματος θέσης**, $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ και είναι:

$\vec{r}^2 \equiv ds^2 = (dx, dy, dz)\eta_E (dx, dy, dz)^T = dx^2 + dy^2 + dz^2$ (το τετράγωνο του μέτρου), όπου το η_E παριστάνει την μετρική του χώρου (Ευκλείδεια) που είναι ο διαγώνιος πίνακας, $n_E = diag(1,1,1)$. Στο χωρόχρονο αντίστοιχα, η μετρική είναι διαφορετική και επιτρέπει τον υπολογισμό του λεγόμενου **τετραγωνισμένου χωροχρονικού μέτρου** του **τετραδιανύσματος** $d\vec{\mathbf{s}} = (d\ell, dx, dy, dz)$:

$d\mathbf{s}^2 = (d\ell, dx, dy, dz)\eta_L (d\ell, dx, dy, dz)^T = -d\ell^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ με $\eta_L = diag(-1,1,1,1)$, το οποίο είναι **αναλλοίωτο** κάτω από τους μετασχηματισμούς της κλειστής υποομάδας Lorentz της ομάδας Poincaré.

Πρέπει να τονιστεί το γεγονός, ότι οι φυσικές ποσότητες που μπορούν να μετρηθούν πειραματικά σε ένα σύστημα αναφοράς (κατά κανόνα το σύστημα εργαστηρίου) είναι Νευτώνειες ποσότητες! Για παράδειγμα, πραγματοποιούνται μετρήσεις συνήθων ταχυτήτων, ορμών και δυνάμεων. Οι ποσότητες που αναφέρονται σε τετραδιανύσματα (τετραταχύτητα, τετραορμή κ.λ.π.) χρησιμοποιούνται στο φορμαλισμό και αξιοποιούνται τα αναλλοίωτα, αλλά σε τελική ανάλυση οι μετρήσιμες ποσότητες είναι οι ποσότητες της ΘΕΔ που ονομάζονται **σχετικιστικές ποσότητες** και εκφράζονται συναρτήσει Νευτώνειων ποσοτήτων. Η ολική ενέργεια, επίσης, εκφράζεται και αυτή συναρτήσει συνήθων ορμών και μαζών (ηρεμίας).

Το αναλλοίωτο του διαστήματος

Ο χωρόχρονος της ΘΕΣ είναι τετραδιάστατος ομαλός (flat) Minkowski, (μη-Ευκλείδειος) ή αλλιώς χώρος υπερβολικής Γεωμετρίας. Το βαθμωτό γινόμενο των τετρα-διανυσμάτων του χωρόχρονου ορίζεται με βάση την αντίστοιχη μετρική (του Lorentz) n_L και με τον ίδιο τρόπο ορίζεται και το τετραγωνισμένο χωροχρονικό μέτρο:

$$\vec{s} \cdot \vec{s} = \vec{s}^2 = \left(d\ell, dx, dy, dz\right) diag\left(-1,1,1,1\right)\left(d\ell, dx, dy, dz\right)^T = -d\ell^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

το οποίο είναι αναλλοίωτο, δηλαδή για τα συστήματα S και S' θα είναι:

$$d\boldsymbol{s}^2 = -d\ell^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = -d\ell'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = \text{αναλλοίωτο}$$

ή αλλιώς:

$$d\vec{\boldsymbol{s}}^2 = -d\ell^2 + d\vec{r}^2 = -d\ell'^2 + d\vec{r}'^2 = \text{αναλλοίωτο}$$

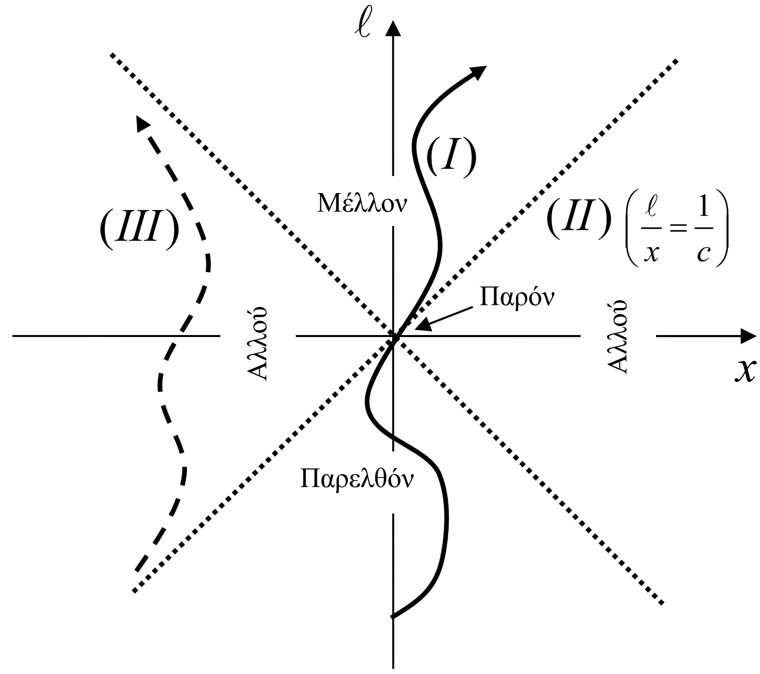
όπου, $\eta_L = diag\left(-1,1,1,1\right)$ η μετρική του Lorentz.

I. $\boldsymbol{s}^2 < 0$: **Χρονικά** τετραδιανύσματα (χρονοειδή)-μελλοντικά ή παρελθοντικά. Αφορούν υλικά σωματίδια ($m \neq 0$) με $\upsilon < c$, αλλιώς **βραδυόνια**.

II. $\boldsymbol{s}^2 = 0$: **Μηδενικά** τετραδιανύσματα (φωτοειδή)
Αφορούν άμαζα σωματίδια ($m = 0$) με $\upsilon = c$, αλλιώς **λουξόνια** (φωτόνιο).

III. $\boldsymbol{s}^2 > 0$: **Χωρικά** τετραδιανύσματα (χωροειδή)
Αφορούν σωματίδια με $\upsilon > c$, αλλιώς **ταχυόνια** (υποθετικά και μη παρατηρηθέντα ως σήμερα).

Στο απλουστευμένο διάγραμμα $\ell - x$ του μετασχηματισμού προώθησης (διάγραμμα Minkowski), τα σύνορα των κοσμικών γραμμών των παραπάνω τριών περιπτώσεων σχηματίζουν προβολή κώνου που ονομάζεται *κώνος φωτός*, ενώ οι ευθείες του συνόρου *ορίζοντας γεγονότων* (Σχήμα Ζ1.1).



Σχήμα Ζ1.1. Χωροχρονικό διάγραμμα δισδιάστατης τομής (ℓ, x) του 4-διάστατου χωρόχρονου με κοσμικές γραμμές για τις τρεις περιπτώσεις: (Ι) Χρονοειδή, (ΙΙ) Φωτοειδή (ορίζοντας γεγονότων) και (ΙΙΙ) Χωροειδή. Η αρχή των αξόνων μπορεί να είναι αυθαίρετη (π.χ. $x = x_0, \ell = \ell_0$). Η κοσμική γραμμή (Ι) περιγράφει την κίνηση σωματιδίου από την αρχική θέση $(\ell_0, 0)$.

Μετασχηματισμός Lorentz

Όπως αναφέρθηκε σε παραπάνω ενότητα, ο μετασχηματισμός που αφήνει αναλλοίωτη το διάστημα (το τετραγωνισμένο χωροχρονικό μέτρο) είναι ο μετασχηματισμός Lorentz (LT). Στη γενική περίπτωση όπου το σύστημα S' κινείται ως προς το αρχικό S με αυθαίρετη αλλά σταθερή ταχύτητα $\vec{V}$ ο ML λέγεται *ορθόχρονος* και είναι:

$$\ell' = \gamma\left(\ell - \vec{\beta}\cdot\vec{r}\right)$$

$$\vec{r}' = \vec{r} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2}\left(\vec{\beta}\cdot\vec{r}\right)\vec{\beta} - \gamma\ell\vec{\beta}$$

όπου, $\vec{\beta} = \vec{V}/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\vec{\beta}^2}$, ενώ η ταχύτητα του φωτός c, ορίζεται αξιωματικά με τιμή $c = 2{,}997924580000 \times 10^8$ m/s. Συνήθως το σύστημα S' επιλέγεται να κινείται ως προς το αρχικό S με σταθερή ταχύτητα V κατά την κατεύθυνση του άξονα x. Αυτός ο μετασχηματισμός αποτελεί ειδική περίπτωση του ορθόχρονου, λέγεται *μετασχηματισμός προώθησης* Lorentz (Lorentz Boost, LB) και είναι ο ακόλουθος:

$$\ell' = \gamma(\ell - \beta x)$$
$$x' = \gamma(x - \beta\ell)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

όπου, $\beta = V/c$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Σε μορφή πινάκων γράφεται:

$$\begin{pmatrix} \ell' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell \\ x \end{pmatrix} \text{ ή}$$

$$\ell' = \ell \, \mathrm{osh}\,\psi + x\sinh\psi$$
$$x' = x\sinh\psi + \ell\cosh\psi$$

και ο αντίστροφος, θέτοντας $\beta \to -\beta$

$$\begin{pmatrix} \ell \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' \\ x' \end{pmatrix} \text{ ή}$$

$$\ell = \ell' c\,\mathrm{osh}\,\psi - x'\sinh\psi$$
$$x = -\ell'\sinh\psi + x'\cosh\psi$$

όπου ψ είναι μια πραγματική παράμετρος, η λεγόμενη *γρηγοράδα* (rapidity) [8] του μετασχηματισμού με $\cosh\psi \equiv \gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Το αναλλοίωτο χωροχρονικό μέτρο (απόσταση σημείων) μπορεί να πάρει τιμές αρνητικές, θετικές ή να ισούται με μηδέν. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις καθορίζουν το γεωμετρικό τόπο των σημείων που συνιστούν *κοσμικές γραμμές* (world lines):

Αρχή της ελάχιστης δράσης

Η *Αρχή της Ελάχιστης Δράσης* είναι μια θεμελιώδης Αρχή της φυσικής και μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση του μετασχηματισμού Lorentz. Έστω δύο γεγονότα στο χωρόχρονο που βρίσκονται στην κοσμική γραμμή ενός σχετικιστικού σωματιδίου. Αν η κίνηση του σωματιδίου είναι αδρανειακή τότε η κοσμική του γραμμή, με βάση την παραπάνω Αρχή θα είναι ευθεία και ορίζεται με την απαίτηση το μήκος μεταξύ των δύο «γεγονότων» να είναι ακρότατο, δηλαδή:

$$\int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} \sqrt{|ds^2|} \to \text{ακρότατο ως προς τη μετρική Lorentz,} \, \eta_L = diag(-1,1,1,1)$$

---

[8] Υπερβολικό ημίτονο και συνημίτονο. Μια βασική ταυτότητα είναι η ακόλουθη: $\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$.

Η απαίτηση αυτή είναι ισοδύναμη με την απαίτηση η μεταβολή του ολοκληρώματος **δράσης** να είναι να μηδενίζεται (αυτό συνιστά και την Αρχή της Ελάχιστης Δράσης):

$$\delta\left\{\int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2}\sqrt{\left|ds^2\right|}\right\}=0$$

Για μια επιταχυνόμενη κίνηση, το χωροχρονικό μήκος παραμένει αμετάβλητο $ds^2 = ds'^2$, αλλά οι συνιστώσες αλλάζουν, οπότε η μετρική δεν μπορεί να παραμείνει η ίδια αλλά η απαίτηση θα είναι και πάλι:

$$\delta\left\{\int_{\Gamma_1}^{\Gamma_2}\sqrt{\left|ds'^2\right|}\right\}=0$$

ως προς τη νέα διαφορετική μετρική η_{ij}. Η προκύπτουσα γραμμή θα είναι μια *γεωδεσιακή*, δηλαδή καμπύλη ακρότατου μήκους μεταξύ των Γ_1 και Γ_2. Στην περίπτωση που η επιτάχυνση οφείλεται στο πεδίο Βαρύτητας, η γεωδεσιακή θα αντιστοιχή στη λεγόμενη *ελεύθερη πτώση*. Συνεπώς, «*οι κινήσεις που οφείλονται μόνο στο πεδίο βαρύτητας γίνονται κατά μήκος των γεωδεσιακών της μετρικής που αναφέρεται στο πεδίο αυτό (ελεύθερη πτώση)*».

Χρονοειδείς αποστάσεις-ιδιοχρόνος

Ένα σημαντικό μέγεθος είναι ο λεγόμενος ιδιοχρόνος (proper time). Για τον ορισμό του θα πρέπει να γίνει σαφές ότι, το ρολόι είναι μια συσκευή για τη μέτρηση **χρονοειδών μετατοπίσεων**, ενώ ο κανόνας (χάρακας) είναι μια συσκευή για τη μέτρηση **χωροειδών μετατοπίσεων**. Συνεπώς, το χρονοειδές διάστημα θα είναι, βάσει του αναλλοίωτου (I) με $d\vec{r}^2 = 0$:

$\boldsymbol{ds}^2 = -d\ell^2 \Rightarrow d\ell^2 = -\boldsymbol{ds}^2$ ή $d\tau^2 = -\boldsymbol{ds}^2/c^2 =$ αναλλοίωτο. Το διαφορικό $d\tau$ ορίζεται ως ο ιδιοχρόνος του σωματιδίου κατά την κίνησή του κατά μήκος της παραπάνω κοσμικής γραμμής σε μονάδες χρόνου. Οι τιμές του ιδιοχρόνου είναι οι ενδείξεις του ιδεατού ρολογιού που συνοδεύει το σωματίδιο και ουσιαστικά, «μετρά» διαστήματα $\sqrt{-\boldsymbol{ds}^2/c^2}$ πάνω στην κοσμική του γραμμή.

Ο ιδιοχρόνος αναδεικνύεται σε ποσότητα μεγάλης χρησιμότητας διότι είναι όπως είδαμε είναι **αναλλοίωτος**. Η σχέση του ιδιοχρόνου και του συνήθους χρόνου (του χρόνου στο σύστημα ηρεμίας του σωματιδίου) προκύπτει με βάση το συντελεστή διαστολής του χρόνου:

$$dt = \gamma_\upsilon d\tau \text{ ή } d\tau = dt/\gamma_\upsilon$$

όπου $\gamma_\upsilon = 1/\sqrt{1-(\upsilon/c)^2}$.

Τετραταχύτητα (ιδιοταχύτητα)

Η *τετραταχύτητα* (ή *ιδιοταχύτητα*) ορίζεται ως ο ρυθμός μεταβολής του τετραδιανύσματος θέσης ως προς τον αναλλοίωτο ιδιοχρόνο ως εξής:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \equiv \frac{d\vec{\boldsymbol{s}}}{d\tau} = \left(u_\ell, u_x, u_y, u_z\right) = \left(\frac{d\ell}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) = \left(\frac{d\ell}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}\right)$$

Με βάση τον ορισμό της αυτό, διαπιστώνουμε ότι θα είναι πάντοτε εφαπτομένη στην κοσμική γραμμή σε κάθε σημείο της. Το χωρικό τμήμα της τετραταχύτητας εκφράζει τη συνήθη ταχύτητα ως προς τον αναλλοίωτο ιδοχρόνο, $\vec{\upsilon}_\tau$, η οποία υπολογίζεται ως εξής:

$$\vec{\upsilon}_\tau = \frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \gamma_\upsilon \vec{\upsilon}$$

όπου $\vec{\upsilon}$ η *συνήθης ταχύτητα* (τριταχύτητα).

Η χρονική συνιστώσα της τετραταχύτητας είναι:

$$u_\ell = \frac{d\ell}{d\tau} = c\frac{dt}{d\tau} = c\gamma_\upsilon$$

Επομένως, η τετραταχύτητα μπορεί να γραφτεί με έναν πιο συμπαγή τρόπο με χρήση του συντελεστή γ_υ:

$$\vec{\boldsymbol{u}} = \left(c\gamma_\upsilon, \gamma_\upsilon \vec{\upsilon}\right) = \gamma_\upsilon\left(c, \vec{\upsilon}\right) \text{ ή } \vec{\boldsymbol{u}} = \gamma_\upsilon c\left(1, \vec{\beta}\right)$$

Αν υπολογίσουμε το βαθμωτό γινόμενο της τετραταχύτητας επί τον εαυτό της (δηλαδή το μέτρο με τη μετρική Lorentz) θα πάρουμε:

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} = \vec{\boldsymbol{u}}^2 = -c^2\gamma_\upsilon^2 + \gamma_\upsilon^2\vec{\upsilon}^2 = c^2\gamma_\upsilon^2(\upsilon^2/c^2 - 1) = -c^2\gamma_\upsilon^2/\gamma_\upsilon^2 = -c^2 < 0$$

και επομένως, η τετραταχύτητα είναι πάντοτε ένα **χρονοειδές** τετραδιάνυσμα σταθερού βαθμωτού γινομένου με τον εαυτό του ίσου με $-c^2$. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε το χρονικό διάστημα που υπολογίστηκε παραπάνω, $d\boldsymbol{s}^2/d\tau^2 = -c^2$.

Μετασχηματισμός ταχυτήτων

Η τετραταχύτητα μετασχηματίζεται από ένα σύστημα S σε ένα άλλο S' κατά Lorentz όπως και οι συντεταγμένες, διότι απλώς αυτές παραγωγίζονται ως προς τον αναλλοίωτο ιδιοχρόνο (ρυθμός μεταβολής ανά $d\tau$), δηλαδή:

$$u'_\ell = \gamma\left(u_\ell - \beta u_x\right)$$

$$u'_x = \gamma\left(u_x - \beta u_\ell\right)$$

$$u'_y = \gamma u_y$$

$$u'_z = \gamma u_z$$

Ο μετασχηματισμός των συνήθων ταχυτήτων κατά Lorentz είναι πιο περίπλοκος, διότι πρέπει να μετασχηματίσει κανείς και τους δύο όρους του κλάσματος ορισμού της ταχύτητας, σε αντίθεση με την τετραταχύτητα χρησιμοποιεί τον αναλλοίωτο ιδιοχρόνο. Ο μετασχηματισμός των τριών συνιστωσών είναι ο ακόλουθος:

$$\upsilon'_x \equiv \frac{dx'}{dt'} = \frac{\upsilon_x - V}{1 - V\upsilon_x / c^2}$$

$$\upsilon'_y \equiv \frac{dy'}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\upsilon_y}{1 - V\upsilon_x / c^2}\right)$$

$$\upsilon'_z \equiv \frac{dz'}{dt'} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\upsilon_z}{1 - V\upsilon_x / c^2}\right)$$

Ζ2. Συνέπειες της Ειδικής Σχετικότητας

Η θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας ευλόγως οδηγεί σε συνέπειες που διαφοροποιούν τις πεποιθήσεις που βασίζονται στη Νευτώνεια Μηχανική. Οι συνέπειες αυτές μπορούν να διακριθούν σε αυτές που προκύπτουν άμεσα από τον ίδιο το φορμαλισμό της θεωρίας (άμεσα φαινόμενα) και σε αυτές που αναδεικνύονται κατά τη σχετικιστική ανάλυση φαινομένων, είτε γνωστών που τροποποιούνται, είτε νέων που πηγάζουν αποκλειστικά από τη θεωρία αυτή (έμμεσα ή νέα φαινόμενα). Παρακάτω αναφέρονται τα άμεσα φαινόμενα [4,6].

Συστολή του μήκους

Μέτρηση ενός μήκους dx' στο σύστημα S' ορίζεται υπό την προϋπόθεση ότι: $dt' = 0$

Με βάση το ML έχουμε, $x' = \gamma\left(x - \beta\ell\right) \Rightarrow dx' = \gamma dx - \gamma\beta d\ell$ (1)

Επίσης, $\ell' = \gamma\left(\ell - \beta x\right) \Rightarrow \underbrace{d\ell'}_{=0} = \gamma d\ell - \gamma\beta dx = 0 \Rightarrow d\ell = \beta dx$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow dx' = \gamma dx - \gamma\beta\left(\beta dx\right) = \gamma(1-\beta^2)dx = dx/\gamma \Rightarrow \boxed{dx' = dx/\gamma}$

Διαστολή του χρόνου

Μέτρηση χρονικού διαστήματος dt' στο σύστημα S' ορίζεται υπό την προϋπόθεση ότι: $dx = 0$

Με βάση τον LT έχουμε,

$\ell' = \gamma\left(\ell - \beta x\right) \Rightarrow d\ell' = \gamma d\ell - \gamma\beta \underbrace{dx}_{=0} = \gamma d\ell \Rightarrow \boxed{d\ell' = \gamma d\ell}$ ή $\boxed{dt' = \gamma dt}$

Η σχετικότητα του ταυτόχρονου

Ας θεωρήσουμε στο σύστημα S δύο ταυτόχρονα γεγονότα (δηλαδή $\ell_1 = \ell_2 = \ell \Rightarrow d\ell = 0$ ή $dt = 0$) στις χωρικές θέσεις x και $x + dx$ (απέχουν dx): $\Gamma_1(\ell, x, y, z)$ και $\Gamma_2(\ell, x + dx, y, z)$.

Έχουμε, $\ell' = \gamma\left(\ell - \beta x\right) \Rightarrow d\ell' = \gamma \underbrace{d\ell}_{=0} - \gamma\beta dx = -\gamma\beta dx \Rightarrow \boxed{d\ell' = -\gamma\beta dx < 0}$ ή

$$\boxed{dt' = -\frac{\gamma\beta}{c}dx < 0}$$

Αντιστρόφως, αν τα ταυτόχρονα γεγονότα θεωρούνται στο σύστημα S' (δηλαδή $\ell_1' = \ell_2' = \ell' \Rightarrow d\ell' = 0$ ή $dt' = 0$) στις χωρικές θέσεις x' και $x' + dx'$ (απέχουν dx'): $\Gamma_1(\ell', x', y', z')$ και $\Gamma_2(\ell', x' + dx', y', z')$, τότε:

$x = \gamma\left(x' + \beta\ell'\right) \Rightarrow dx = \gamma dx' + \gamma\beta \underbrace{d\ell'}_{=0} = \gamma dx'$ (3)

$\ell = \gamma\left(\ell' + \beta x'\right) \Rightarrow d\ell = \gamma \underbrace{d\ell'}_{=0} + \gamma\beta dx' = \gamma\beta dx' \Rightarrow \boxed{d\ell = \gamma\beta dx'}$ (4)

Ακόμη, από (3),(4) $\Rightarrow d\ell = \gamma\beta dx' = \gamma\beta \dfrac{dx}{\gamma} = \beta dx \Rightarrow \boxed{d\ell = \beta dx > 0}$ ή

$\boxed{dt = \dfrac{\beta}{c} dx > 0}$ (5)

Συμπεραίνουμε ότι οι καταγραφές των παρατηρητών S' και S με τα ιδιορολόγια τους σε ό,τι αφορά στη χρονική διαφορά των Γ_1 και Γ_2, θα διαφέρουν από πλευράς χρονικής ακολουθίας: στο S' προηγείται το Γ_2 και ακολουθεί το Γ_1, αν και στο S είναι ταυτόχρονα!.

Στην αντίστροφη περίπτωση: στο S το προηγείται το Γ_1 και ακολουθεί το Γ_2, αν και στο S' είναι ταυτόχρονα!. Συνεπώς, διαπιστώνεται η **σχετικότητα του ταυτόχρονου**, δηλαδή η εξάρτηση της μέτρησης από το σύστημα παρατήρησης.

Οι απόλυτες τιμές των μετρήσεων κατά τις δύο περιπτώσεις είναι ίσες ($\gamma\beta dx$), όπως αναμενόταν με βάση τη συμμετρία του μετασχηματισμού Lorentz σε σχέση με την απόλυτη τιμή των μετρήσεων (η συμμετρία ισχύει μόνον αν οι δύο ΑΠ ακολουθούν την ίδια κοσμική γραμμή). Επίσης, όπως βλέπουμε από την Εξ. 5, η μετάβαση από το S στο S' σε ό,τι αφορά στη μέτρηση του χρόνου, υπεισέρχεται ο συντελεστής γ.

Η αρχή της αιτιότητας

Ένα γεγονός Γ_1 μπορεί (δυνάμει) να προκαλέσει ένα άλλο Γ_2 σε ένα σύστημα αναφοράς, έστω S. Στην περίπτωση αυτή, το Γ_1 πρέπει να προηγείται χρονικά του Γ_2 με βάση την **αρχή της αιτιότητας** (causality) Στα πλαίσια της ΘΕΣ **δεν υπάρχει παρατηρητής που να διαπιστώνει την παραβίαση αυτής της αρχής**! Λόγω του «πεπερασμένου» της μετάδοσης της πληροφορίας (διέγερσης) που είναι η έσχατη ταχύτητα του φωτός c, η συνθήκη για την ύπαρξη της σχέσης «**αιτίου-αιτιατού**» η ακόλουθη: $d\ell \geq dx$ ή $dt \geq dx/c$, η οποία εκφράζει τον εξής συλλογισμό:

«Θεωρώντας ότι το χωρικό διάστημα των γεγονότων είναι δεδομένο (dx), τότε η χρονική διαφορά που θα μεσολαβήσει μεταξύ των Γ_1 και Γ_2 (και θα καταγραφεί με κάποιο τρόπο), θα είναι πάντοτε μεγαλύτερη από την τιμή dx/c, δηλαδή από το χρονικό διάστημα που θα χρειαζόταν το φως (υποθετικά) για να φθάσει από τη μια θέση στην άλλη».

Υπονοείται ότι ο τρόπος μετάδοσης ή ο τρόπος διέγερσης δεν είναι αναγκαστικά φωτεινό σήμα. Αν είναι φωτεινό σήμα, τότε ισχύει η ισότητα. Η σχέση αιτίου-αιτιατού ικανοποιείται στο εσωτερικό του κώνου φωτός, ενώ ο ορίζοντας γεγονότων αντιστοιχεί στη μετάδοση αποκλειστικά φωτεινών σημάτων (φωτονίων ή λουξονίων γενικότερα). Η σχέση αιτίου-αιτιατού είναι **συναλλοίωτη** κάτω από μετασχηματισμούς Lorentz, δηλαδή:

$$\boxed{dt \geq dx/c \Leftrightarrow dt' \geq dx'/c}$$

Η παραπάνω ιδιότητα αποδεικνύεται με χρήση του μετασχηματισμού Lorentz ως εξής:

Έστω ότι η σχέση αιτίου-αιτιατού ισχύει στο σύστημα S, δηλαδή $dt \geq dx/c$. Αλλά έχουμε επίσης,

$$dt = \gamma dt' + \frac{\beta}{c} dx'$$

οπότε η ζητούμενη ανισότητα γράφεται:

$$\gamma dt' + \frac{\beta}{c} dx' \geq \frac{dx}{c} \Rightarrow dt' \geq \frac{dx - \beta dx'}{\gamma c}$$

και αντικαθιστώντας το dx από τη σχέση μετασχηματισμού, προκύπτει:

$$dt' \geq \frac{\gamma dx' + \gamma\beta c dt' - \beta dx'}{\gamma c} \Rightarrow (1-\beta) dt' \geq (1-\beta) \frac{dx'}{c}$$

Για $\beta = 1$(δηλαδή μετάδοση φωτεινού σήματος με $\upsilon = c$) επαληθεύεται η ισότητα με τιμή μηδέν, δηλαδή για κάθε dt' και dx'. Για $\beta > 1$ ισχύει η ζητούμενη ανισότητα $dt' \geq dx'/c$. Επομένως και στο σύστημα S' θα ισχύει η σχέση «αιτίου-αιτιατού» και κατά συνέπεια σε οποιοδήποτε άλλο σχετικιστικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Ισοδυναμία μάζας-ενέργειας

Από τη σχέση της ολικής (σχετικιστικής) ενέργειας ενός σωματιδίου, $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$, αν θέσουμε με $\vec{p} = 0$ (δηλαδή αν αυτό βρίσκεται στο σύστημα ηρεμίας του), τότε προκύπτει $E = mc^2$. Κατά συνέπεια εξάγεται το συμπέρασμα ότι: *Ένα σωματίδιο έχει ενέργεια, ακόμη κι αν βρίσκεται στο σύστημα ηρεμίας του.* Η ενέργεια αυτή αποτελεί την ενέργεια ηρεμίας του σωματιδίου, $E \equiv E_o = mc^2$, όπου m η μάζα ηρεμίας του. Η σχέση αυτή αποτελεί την περίφημη εξίσωση του Einstein και είναι θεμελιώδους σημασίας διότι εκφράζει την ισοδυναμία μάζας και ενέργειας. Η σταθερά του τετραγώνου της ταχύτητας του φωτός στο κενό, c^2, παίζει μόνο ποσοτικό ρόλο στα πλαίσια αυτής της διπλής υπόστασης μάζας-ενέργειας.

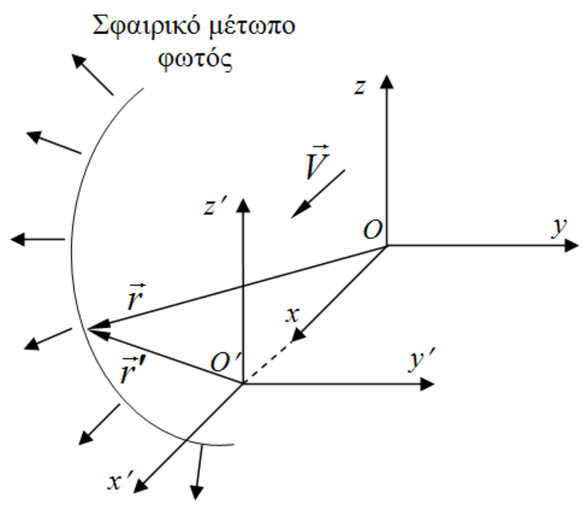
Ζ3. Μετάδοση σφαιρικού κύματος φωτός

Η απόσταση απομάκρυνσης r, ενός σφαιρικού κύματος (σχήμα) συντελείται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό c και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$r = ct \Rightarrow c^2t^2 = x^2 + y^2 + x^2$ (1)

Αλλά το σφαιρικό μέτωπο του φωτός απομακρύνεται με την ίδια ταχύτητα c όταν παρατηρείται από το S′ και επομένως $r' = ct'$ ή $r = ct \Rightarrow c'^2t'^2 = x'^2 + y'^2 + x'^2$ (2)

Η (2) ισχύει σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς που κινούνται όπως το S′.



Z4. Σχετική ταχύτητα κατά Lorentz

Ο Μετασχηματισμός Lorentz της ταχύτητας v_x είναι :

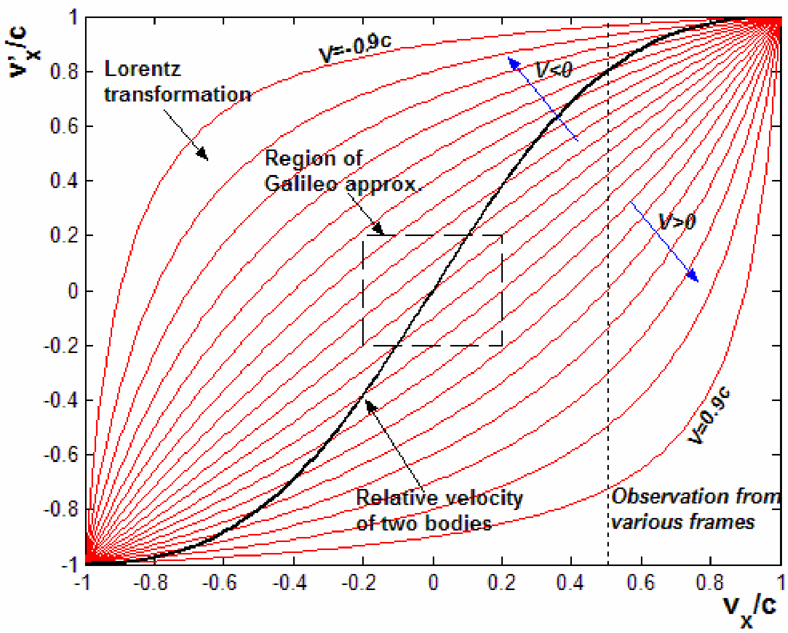
$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - v_x V / c^2}} \quad (1)$$

Η σχετική ταχύτητα, ή αλλιώς, πρόσθεση ταχυτήτων, δύο σωματιδίων που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις $\pm v_x$ υπολογίζεται ως εξής:

Θεωρούμε ότι αυτό με ταχύτητα v_x ηρεμεί σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς S. Έτσι, πρέπει να θέσουμε $V = -v_x$ για την ταχύτητα του S′ ως προς το S και παίρνουμε:

$$\boxed{v'_x = \frac{2v_x}{1 + (V / c)^2}} \quad (2)$$

Στο εικονιζόμενο διάγραμμα (νομόγραμμα), μπορεί κανείς να βρεί τη μετασχηματισμένη ανηγμένη ταχύτητα v'_x / c (κατακόρυφος άξονας) αν γνωρίζει την v_x / c (οριζόντιος άξονας) από το σμήνος των καμπυλών που αντιστοιχούν σε διάφορες ταχύτητες V του «κινούμενου» αδρανειακού συστήματος αναφοράς S΄. Επίσης, μπορεί να βρει τη σχετική ταχύτητα των δύο σωματιδίων από την παχιά κεντρική καμπύλη του διαγράμματος.



Για «μη σχετικιστικές ταχύτητες», δηλαδή, $v_x V << c^2$ και $V << c$ αντίστοιχα, προκύπτει η προσέγγιση του μετασχηματισμού του Γαλιλαίου στις δύο παραπάνω περιπτώσεις:

$$\boxed{v'_x = v_x - V} \qquad \boxed{v'_x = 2v_x}$$

Συμβολισμός μεγεθών στο Παράρτημα Ζ

Συντεταγμένες στα συστήματα αναφοράς S και S' :
ℓ, x, y, z και ℓ', x', y', z' ($\ell \equiv ct, \ell' \equiv ct'$)
Μετρικές των χώρων Ευκλείδη και Lorentz : η_E , η_L
Χρόνος σωματιδίου μετρούμενος στο σύστημα ηρεμίας του : t
Ιδιοχρόνος (proper time) σωματιδίου μετρούμενος επί της κοσμικής γραμμής : τ
Τετραδιανύσματα (four-vectors) του χώρου Minkowski : $\vec{\boldsymbol{s}}$, $\vec{\boldsymbol{p}}$
Τετραδιανύσματα από παραγώγιση ως προς τον ιδιοχρόνο (ιδιο-τετραδιανύσματα ή proper four-vectors): $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\vec{\boldsymbol{\alpha}}$, $\vec{\boldsymbol{f}}$
Συνήθη διανύσματα (τριδιανύσματα ή three-vectors) : $\vec{r}$, $\vec{\upsilon}$, $\vec{p}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{F}$
Συνήθη διανύσματα σχετικιστικά (relativistic) : $\vec{p}_{rel}$, $\vec{F}_{rel}$
Συνήθη διανύσματα από παραγώγιση ως προς τον ιδιοχρόνο (ιδιο-τριδιανύσματα proper three-vectors) : $\vec{\upsilon}_\tau$, $\vec{F}_\tau$
Ανηγμένη ταχύτητα σωματιδίου : $\vec{\beta}$ ή $\beta \equiv \left|\vec{\beta}\right|$
Συντελεστής Lorentz (Lorentz boost) για συστήματα αναφοράς σε σχετική ταχύτητα $\vec{V}$: γ
Συντελεστής Lorentz για σωματίδιο με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$ ως προς το σύστημα ηρεμίας του : γ_υ
Υπερβολική γωνία στροφής (γρηγοράδα ή rapidity) : ψ

Βιβλιογραφία

1. Barret O' Neil, «Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία», ελληνική μετάφραση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης (2002).
2. Κ. Μ. Μυλωνάς, «Μηχανική Ι-Κινηματική και Δυναμική του Υλικού Σημείου», Ε.Μ.Π. (1978).
3. Ι. Α. Πολυράκης, Διαφορική Γεωμετρία (1998).
4. C. Kittel et al., «Μηχανική», 2η Ελληνική Μετάφραση, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π. (1998).
5. J. L. Martin, «Γενική Σχετικότητα», ελληνική μετάφραση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης (2005).
6. J. B. Hartle, «Gravity, an Introduction to Einstein's General Relativity», Addison Wesley (2003).
7. H. D. Young, «Πανεπιστημιακή Φυσική», Τόμος Α΄, Μηχανική-Θερμοδυναμική, Ελληνική Μετάφραση, Εκδόσεις Παπαζήση (1994).
8. Ohanian, «Φυσική», 2η Ελληνική Μετάφραση, Τόμος Α΄, Μηχανική-Θερμοδυναμική, Εκδόσεις Συμμετρία (1991).
9. M. Alonso, E. J. Fin, «Θεμελιώδης Πανεπιστημιακή Φυσική», Τόμος Ι, Μηχανική-Θερμοδυναμική, 2η έκδοση, Ελληνική Μετάφραση (1981).
10. Goldstein, «Classical MECHANICS», 3rd edition, Addison Wesley (2002).
11. D. J. Griffits, «Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική», τόμος ΙΙ, Ελληνική μετάφραση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης (2001).
12. Μ. Τσαμπαρλής, «Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας», μέρος Ι (2004).
13. Μ. Τσαμπαρλής, «Θεωρία της Ειδικής Σχετικότητας», μέρος ΙΙ (2002).
14. Μ. Δρης, «Φυσική Ι, Μηχανική», Σημειώσεις (1988).
15. Λ. Απέκης, Κ. Χριστοδουλίδης, «Φυσική Ι», Τομέας Φυσικής ΣΕΜΦΕ (2002).
16. Θ. Αλεξόπουλος, Γ. Τσιπολίτης, «Προβλήματα Μηχανικής» (2003).
17. Κ. Χριστοδουλίδης, «Μαθηματικό Συμπλήρωμα για Εισαγωγικά Μαθήματα Φυσικής».
18. Σ. Μαλτέζος, «Λογισμικό Θεωρητικής Προσομοίωσης Κινηματικής», Αποτελέσματα και Εικόνες από Εκπαιδευτικές Προβολές (2003, 2004).
19. Matlab, *http://mathworld.wolfram.com/*, Ιστοσελίδα (2004).
20. D. Hume, «The Ontology and Cosmology of Non-Euclidian Geometry», section IV, part I, p20, Shelby-Bigge, Oxford University Press (1972).
21. Y.T. Fung, «Space and Time in Physics», United College, Chinese University of Hong Kong.