Εισαγωγή στην Πληροφορική και τον Προγραμματισμό Η/Υ

4ο Μάθημα

Bit-Byte-word. Πρόσθεση / Αφαίρεση

Λεωνίδας Αλεξόπουλος

Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

E-mail: leo@mail.ntua.gr

Τηλ: 210 772-1666

Περίληψη Μαθήματος

Στα προηγούμενα μαθήματα:

1- Τι είναι Η/Υ

2- Κωδικοποίηση-Επεξεργασία- Αποκωδικοποίηση

3- Συστήματα Αρίθμησης: 2δικό, 8δικό, 10δικό, 16δικό

4- Μετατροπή από το ένα σύστημα στο άλλο

Σήμερα:

5- bit/byte/word

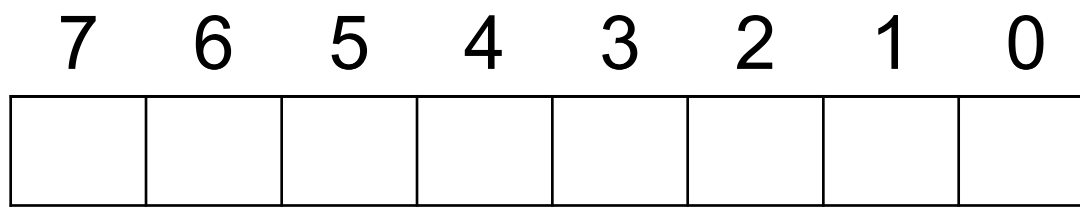
6- Η πρόσθεση στο Δυαδικό

7- Παράσταση Αρνητικών

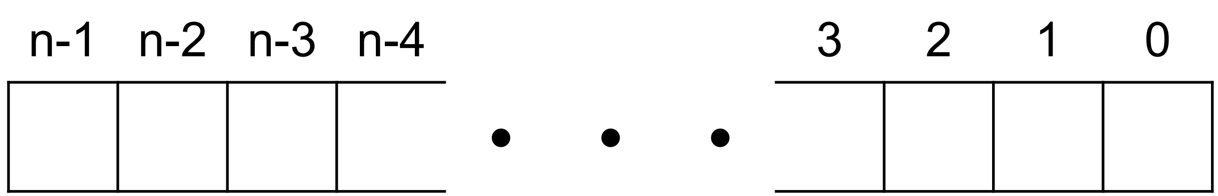
8- Η αφαίρεση στο Δυαδικό

bit – byte - word

- Κάθε ψηφίο {0,1} ενός δυαδικού αριθμού (π.χ 11011_2) είναι ένα δυαδικό ψηφίο (**BI**nary digi**T**} δηλ. **bit**
- Μία ομάδα **8 bit** αποτελεί ένα **byte(B)**



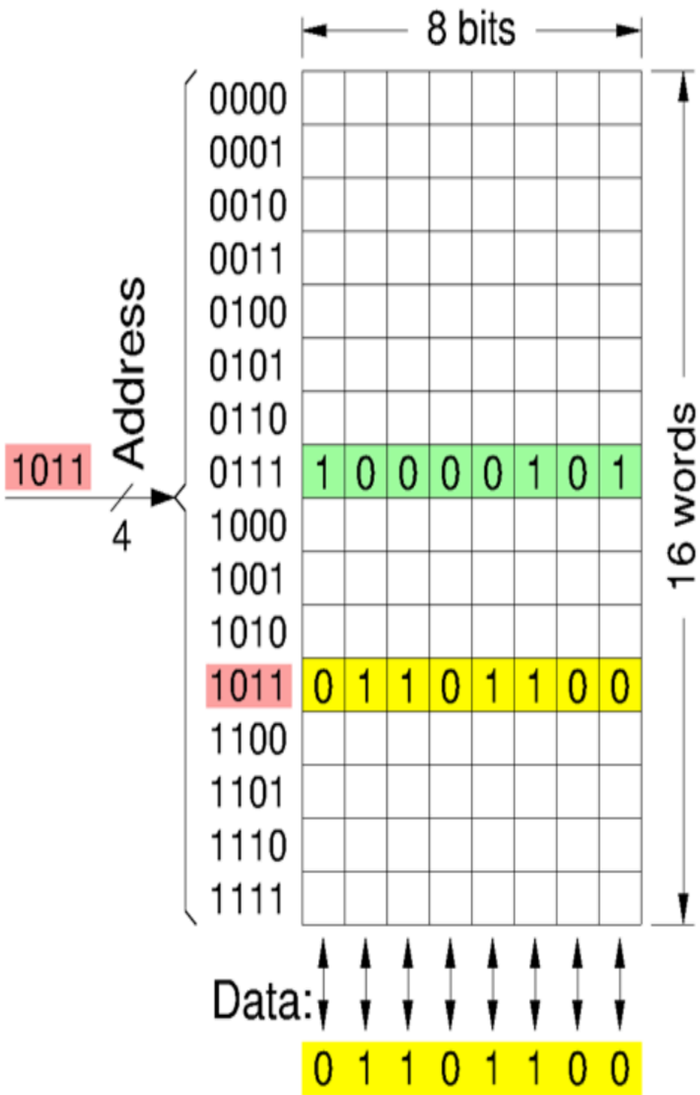
- Τα **<u>bit</u>** που μπορεί να επεξεργασθεί ένας Η/Υ σε ένα κύκλο λειτουργίας του λέγεται **ψηφιολέξη (word).** Ο αντίστοιχος αριθμός είναι το **μήκος ψηφιολέξης (wordlength)**



bit – byte - word

Χρήση Bit/byte/word στην μνήμη του Η/Υ

- Κάθε οριζόντια γραμμή (όροφος) είναι μία λέξη (word)
- Μήκος ψηφιολέξης: 8 bits = 1byte
- Στο διπλανό σχήμα υπάρχουν 16 λέξεις η μία κάτω από την άλλη από θέση 0 σε θέση 15
- Μπορώ να επεξεργασθώ μία λέξη την φορά (σε ένα κύκλο λειτουργίας)
- Θέλω να χρησιμοποιήσω τον αριθμό στην θέση 11 (→ 1011)
- Χωρητικότητα «μνήμης»: 16 bytes. Περισσότερα για μνήμη Η/Υ θα πούμε σε άλλα μαθήματα



Ref: https://www.csd.uoc.gr/~hy120/index.html

kB, MB, GB, TB …

- 10^3 Bytes → 1kB (SI & IEC, IEEE, EU, ISO, NIST)
- 10^6 Bytes → 1MB - Mega
- 10^9 Bytes → 1GB - Giga
- 10^12 Bytes → 1TB - Tera
- … Peta(15), Exa(18), Zetta(21), Yotta(24)

Αλλά παραδοσιακά χρησιμοποιούμε βάση το δύο:

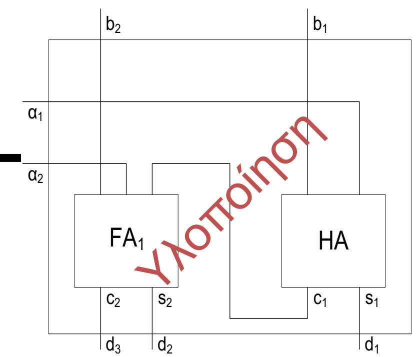
- 2^10 Bytes → 1kB = 1024 Bytes (π.χ computer RAM)
- 2^20 Bytes → 1MB = 1024 kBytes
- 2^30 Bytes → 1GB = 1024 MBytes
- 2^40 Bytes → 1TB = 1024 GBytes

IEC (International Electrotechnical Commission) & IEEE, EU, ISO, NIST προτείνουν την χρήση τη λέξης Kibi-, Mebi-, Gibi-, Tebi-, Pebi- για το δυαδικό σύστημα αλλά *χωρίς* ευρεία χρήση….

Πρόσθεση Δυαδικών Ακεραίων

- 0+0=0   0+1=1   1+0=1   1+1=10
- 4 <u>βασικά</u> παραδείγματα

```
              1       111          11     ←κρατούμενο
 101     1001     1011        1011
  10+     101+     101+         11+
─────────────────────────────────────
 111     1110    10000        1110
```



- Έστω Η/Υ με ψηφιολέξη=1byte

```
                          1100 0100       (196)
                          1001 1000  +    (152)
                         ───────────
overflow digit→          10101 1100       >255
```

Αφαίρεση Δυαδικών Ακεραίων

- 0-0=0 1-0=1 1-1=0 10-01=01 $\leftarrow$ με δανεισμό από ανώτερη τάξη
- **Πχ**

$$\begin{array}{r} 1\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,0\,- \\ \hline 1\,1\,1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ **η αφαίρεση απαιτεί «λογική»!**

- **Βασική Ιδέα**: 13-6=13+(-6) δηλ. η αφαίρεση μπορεί γίνει μέσω πρόσθεσης
- **Άρα**: ζητούμε μοντέλο παράστασης αριθμών που να:
  - κάνει δυνατή τη παράσταση αρνητικών αριθμών, και
  - είναι τέτοιο ώστε η αφαίρεση να γίνεται άμεσα χωρίς επιπρόσθετη λογική

Παράσταση Αρνητικών

- → *Πρόσημο-μέτρο (sign and magnitude code)*
- → *Συμπλήρωμα ως προς 2 (2-complement code)*
- → *Πόλωση - Πλεονασμός κατά K*
- → *IEEE*

Παράσταση Αρνητικών: πρόσημο-μέτρο (sign and magnitude code)

- **Σύμβαση**: το **MSD** δηλώνει το πρόσημο (π.χ. **0** : θετικό, **1** : αρνητικό).
  Παραδ.: $+13_{10} = 01101_2$, $-13_{10} = 11101_2$.
- **Παρατηρήστε**: $5_{10} = 00101_2$ τότε $5\text{-}13=5+(-13)$

$$
\begin{array}{lr}
(-13) & 1\ 1\ 1\ 0\ 1 \\
(+5) & 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ \ + \\
\hline
-8_{10} \neq & 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0_2
\end{array}
$$

- **Λάθος !** Αυτή παράσταση, δεν καλύπτει την απαίτηση: «*η αφαίρεση να μπορεί γίνει μέσω πρόσθεσης*»

Παράσταση Αρνητικών: Συμπλήρωμα ως προς 2 (2-complement code)

- **<u>Σύμβαση</u>**: Για μήκος λέξης n-bit, το MSD εκφράζει το -2^{n-1}. Έτσι εκφράζονται οι αριθμοί από $(2^{n-1}-1)$ έως -2^{n-1} π.χ. Αν n=6 τότε εκφράζονται οι αριθμοί από –32 έως 31.

-32 16 8 4 2 1 Ποια «τάξη» παριστάνει κάθε στήλη

0 1 1 1 1 1 = 16+8+4+2+1=31. Πως θα αναπαραστήσουμε το «2»?

? ? ? ? ? ?

0 0 0 0 1 0 = 2 . Πως είναι το μηδέν σε C2?

? ? ? ? ? ?

0 0 0 0 0 0 = 0 . Είναι το 111111 ο μέγιστος?

1 1 1 1 1 1 = -32+16+8+4+2+1=-1 . Ποιος είναι ο MIN & MAX για n=6?

1 0 0 0 0 0 = -32 Το -32 είναι το MIN

0 1 1 1 1 1 =+31 Το +31 είναι το MAX. Είναι αντίστροφοι (NOT)

Ας δούμε τώρα δύο άλλους αντίστροφους:

0 0 1 1 1 0 = 8+4+2=14. Σε ποιον αριθμό το 10δικό αντιστοιχεί ο αντίστροφος του 14?

1 1 0 0 0 1 = -32+16+1 = -15

1 1 1 1 1 1 = -32+16+8+4+2+1=-1

οπότε πως μπορούμε να αναπαραστήσουμε ένα αρνητικό αριθμό a (πχ -14) στο C2?

Παράσταση Αρνητικών: Συμπλήρωμα ως προς 2 (2-complement code)

- Για ένα ακέραιο ***α***, για να βρούμε το συμπλήρωμα του ως προς 2, ***c_2(α)*** : Κάνουμε αντιστροφή των bits της δυαδικής παράστασης του ***α***, και προσθέτουμε σε αυτό 1 π.χ. ***α*** =43 και n=7

-64	**32**	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**	
0	1	0	1	0	1	1	= 43
1	0	1	0	1	0	0	
				+		1	
1	0	1	0	1	0	1	= $c_2(43)$ = -43

Η Αφαίρεση με την Παράσταση Συμπληρώματος ως προς 2

Παραδείγματα*:* Αφαίρεση σε 6-μπιτο Η/Υ

$5-18 = 5+(-18)$

		-32	16	8	4	2	1	
		0	1	0	0	1	0	= 18
		1	0	1	1	0	1	
	+						1	
		1	0	1	1	1	0	= **c_2(18)**
	+	0	0	0	1	0	1	= 5
-32+16+2+1 =		1	1	0	0	1	1	=-13
	0	0	1	1	0	0		

$29 + (-7)$

		-32	16	8	4	2	1	
		0	0	0	1	1	1	=7
		1	1	1	0	0	0	
	+						1	
		1	1	1	0	0	1	= **c_2(7)**
	+	0	1	1	1	0	1	= 29
		0	1	0	1	1	0	= 22
	1	1	1	0	0	1		

(κρατούμενα κατά την πρόσθεση)

Οι παραπάνω πράξεις είναι σωστές γιατί το κρατούμενο που προστίθεται στο MSD είναι το ίδιο με το κρατούμενο που ‘εξέρχεται’ από το MSD. Το αντίθετο, σημαίνει ότι, για το συγκεκριμένο Η/Υ με εύρος λέξης n bit, υπερβαίνουμε το εύρος αριθμών που μπορούμε να χειρισθούμε και έχουμε είτε **Overflow (*υπερχείλιση*)*,*** είτε **Underflow («*υποχείλιση*»)*.***

Η Αφαίρεση με την Παράσταση Συμπληρώματος ως προς 2:

Υπερχείλιση & Υποχείλιση

Overflow: αποτέλεσμα >(2^{n-1}-1)

π.χ. n=6, 22 + 22 = 44

	-32	16	8	4	2	1	
	0	1	0	1	1	0	= 22
+	0	1	0	1	1	0	= 22
	1	0	1	1	0	0	=-20≠44
	0	1	0	1	1	0	

Underflow: αποτέλεσμα <–2^{n-1}

π.χ. n=6, -8-31=(-8)+(-31)=-39

	-32	16	8	4	2	1	
	1	1	1	0	0	0	= -8
+	1	0	0	0	0	1	= -31
	0	1	1	0	0	1	=25≠-39
	1	0	0	0	0	0	

Διαπίστωση : με τη παράσταση συμπληρώματος ως προς 2

– γίνεται δυνατή η παράσταση αρνητικών αριθμών,

– η αφαίρεση γίνεται άμεσα, μέσω πρόσθεσης, και χωρίς επιπρόσθετη λογική, και

– παρέχει άμεσο μηχανισμό πιστοποίησης των αποτελεσμάτων μέσω των κρατουμένων «**εισόδου εις**» και «**εξόδου από**» το MSD.

6bit

Έλεγχος αποτελέσματος πρόσθεσης / αφαίρεσης μέσω κρατουμένων με την Παράσταση Συμπληρώματος ως προς 2

Ίδια κρατούμενα

π.χ. 16 + 2 = 18

	-32	16	8	4	2	1	
	0	1	0	0	0	0	= 16
+	0	0	0	0	1	0	= 2
	0	1	0	0	1	0	= **18**

0 0

Ίδια κρατούμενα

π.χ. -8+9= 1

	-32	16	8	4	2	1	
	1	1	1	0	0	0	= -8
+	0	0	1	0	0	1	= 9
	0	0	0	0	0	1	= 1

1 1

Overflow

π.χ. 22 + 22 = 44

	-32	16	8	4	2	1	
	0	1	0	1	1	0	= 22
+	0	1	0	1	1	0	= 22
	1	0	1	1	0	0	=-20≠44

0 1

Underflow

π.χ. -8-31=(-8)+(-31)=-39

	-32	16	8	4	2	1	
	1	1	1	0	0	0	= -8
+	1	0	0	0	0	1	= -31
	0	1	1	0	0	1	=25≠-39

1 0

Παράδειγμα: Θέμα Εξετάσεων

- Να εκτελεστεί η πρόσθεση (αφού πρώτα μετατραπούν σε δυαδικούς) μεταξύ των αριθμών **-47**$_{10}$ και **-63**$_{10}$ σε δύο υπολογιστές A & B που χρησιμοποιούν την παράσταση συμπληρώματος ως προς 2. Ο A έχει μήκος λέξης 7 bit ενώ ο B 8 bit. Τι παρατηρείτε ?

1. Μετατροπή των **47**$_{10}$ και **63**$_{10}$ σε δυαδικ

	-64	32	16	8	4	2	1	
	?	?	?	?	?	?	?	$=c_2(47)$
+	?	?	?	?	?	?	?	$=c_2(63)$
?	?	?	?	?	?	?	?	
	?	?						

2. Υπολογιστής A: 7 bit

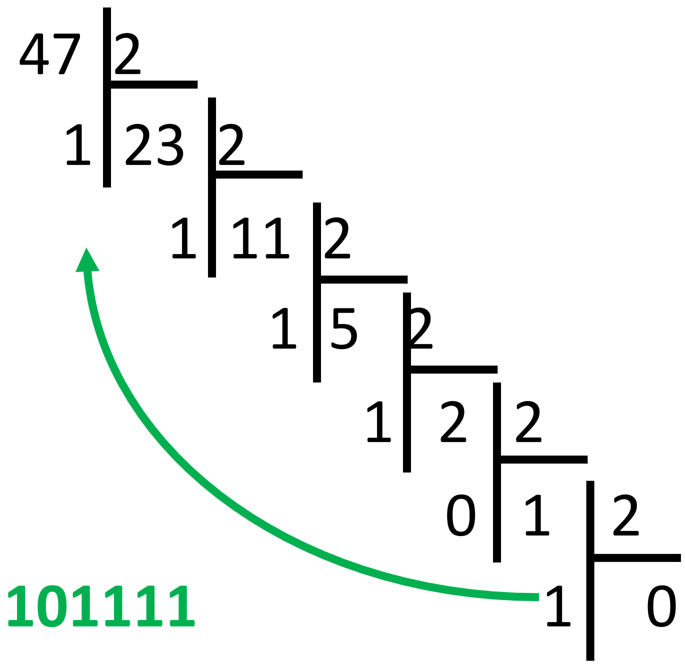
 2A. Βρείτε το **c2(47)** και c2(**63)**

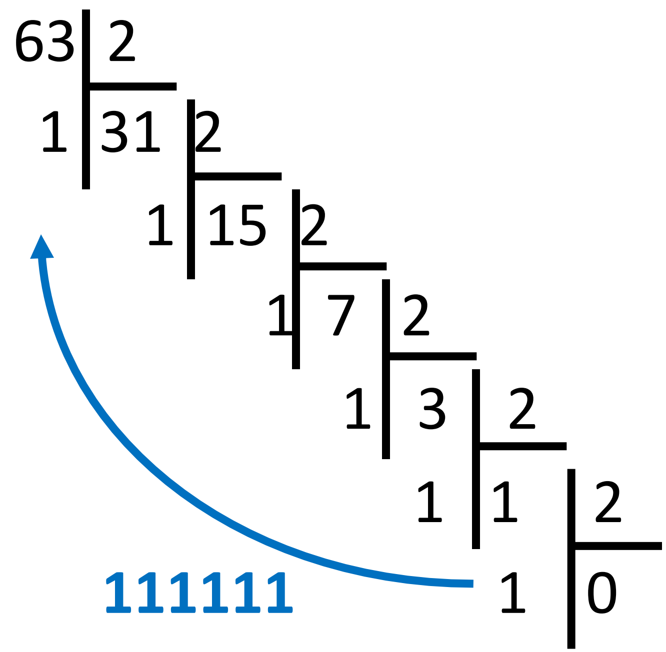
 2B. Κάντε την πρόσθεση και ελέγξτε: Είναι το εισερχόμενο κρατούμενο στο MSD διαφορετικό από το εξερχόμενο?

3. Υπολογιστής B: 8 bit – Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία

Παράδειγμα: Θέμα Εξετάσεων

- Να εκτελεστεί η πρόσθεση (αφού πρώτα μετατραπούν σε δυαδικούς) μεταξύ των αριθμών **-47_{10}** και **-63_{10}** σε δύο υπολογιστές Α & Β που χρησιμοποιούν την παράσταση συμπληρώματος ως προς 2. Ο Α έχει μήκος λέξης 7 bit ενώ ο Β 8 bit. Τι παρατηρείτε ?
- Μετατροπή σε δυαδικό





Παράδειγμα: συνεχ.

- $47_{10}=101111_2$ $\qquad\qquad$ $63_{10}=111111_2$
- Πως παρίστανται τα -47_{10}, -63_{10} ?
- Με συμπλήρωμα ως προς 2 αλλά με πόσα bit ?
- **Υπολογιστής Α**: 7 bit

6 5 4 3 2 1 0 : bit

-64	32	16	8	4	2	1	
0	1	0	1	1	1	1	$=47_{10}$
1	0	1	0	0	0	0	$=c_1(47)$
+						1	
1	0	1	0	0	0	1	$=c_2(47)$

-64	32	16	8	4	2	1	
0	1	1	1	1	1	1	$=63_{10}$
1	0	0	0	0	0	0	$=c_1(63)$
+						1	
1	0	0	0	0	0	1	$=c_2(63)$

Παράδειγμα: συνεχ.

-64 32 16 8 4 2 1

1 0 1 0 0 0 1 $=c_2(47)$

+ 1 0 0 0 0 0 1 $=c_2(63)$

1 0 0 1 0 0 1 0 **Σωστό** ή **Λάθος** **???**

1 0 **ΛΑΘΟΣ**: γιατί το εισερχόμενο κρατούμενο στο MSD

είναι διαφορετικό από το εξερχόμενο

- **Υπολογιστής Β**: 8 bit

-128 64 32 16 8 4 2 1

0 0 1 0 1 1 1 1 $=\mathbf{47_{10}}$

1 1 0 1 0 0 0 0 $=c_1(47)$

+ 1

1 1 0 1 0 0 0 1 $=c_2(47)$

-128 64 32 16 8 4 2 1

0 0 1 1 1 1 1 1$=\mathbf{63_{10}}$

1 1 0 0 0 0 0 0$=c_1(63)$

+ 1

1 1 0 0 0 0 0 1 $=c_2(63)$

Παράδειγμα: συνεχ.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
 & \underline{-128} & \underline{64} & \underline{32} & \underline{16} & \underline{8} & \underline{4} & \underline{2} & \underline{1} \\
 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 = c_2(47) \\
+ & \underline{1} & \underline{1} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} = c_2(63) \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}
$$

Σωστό ή Λάθος

1 1 **ΣΩΣΤΟ**: γιατί το εισερχόμενο κρατούμενο στο MSD είναι ίδιο με το εξερχόμενο

- **Επομένως**:
  - Επειδή -67+(-43)=-110 είναι λογικό να είναι
    - **λανθασμένη** η πράξη στον 7-μπιτο Η/Υ ο οποίος μπορεί να παραστήσει κατ' ελάχιστον τον αριθμό -64
    - **σωστή** η πράξη στον 8-μπιτο Η/Υ ο οποίος μπορεί να παραστήσει κατ' ελάχιστον τον αριθμό -128
  - Οι Η/Υ μέσω ελέγχου του κρατουμένου στο MSD έχουν τη δυνατότητα ελέγχου της ορθότητας των αποτελεσμάτων τους.

Τελος