



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**  
**ΣΧΟΛΗ ΑΓΡΟΝΟΜΩΝ ΚΑΙ ΤΟΠΟΓΡΑΦΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**  
**ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ**  
**ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΓΕΝΙΚΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ**

# **Γ Ε Ω Δ Α Ι Σ Ι Α**

**Μετρήσεις - διορθώσεις - αναγωγές**  
**Προσδιορισμός θέσης**

<b>Γ. ΓΕΩΡΓΟΠΟΥΛΟΣ</b>	<b>ΛΕΚΤΟΡΑΣ Ε.Μ.Π.</b>
<b>Β. ΓΚΙΚΑΣ</b>	<b>ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ Ε.Μ.Π.</b>
<b>Ε. ΤΕΛΕΙΩΝΗ</b>	<b>ΛΕΚΤΟΡΑΣ Ε.Μ.Π.</b>
<b>Μ. ΤΣΑΚΙΡΗ</b>	<b>ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΡΙΑ Ε.Μ.Π.</b>

**ΑΘΗΝΑ 2011**

© 2011 Απαγορεύεται η με κάθε τρόπο δημοσίευση, αναπαραγωγή ή χρησιμοποίηση του κειμένου ή τμημάτων του χωρίς την έγγραφη έγκριση των συγγραφέων.

Οι παρούσες σημειώσεις Γεωδαισίας έχουν γραφτεί για να καλύψουν το μάθημα «Γεωδαισία ΙΙ» του 3<sup>ου</sup> εξαμήνου της Σ.Α.Τ.Μ. και χωρίζονται σε έξι κεφάλαια ως εξής:

1. Βασικές έννοιες
2. Γωνίες – Μετρήσεις και υπολογισμοί
3. Μήκη – Μετρήσεις και υπολογισμοί
4. Υψομετρία
5. GPS – Δορυφορικός εντοπισμός
6. Βασικές μέθοδοι πύκνωσης δικτύων οριζοντίου ελέγχου

Σε κάθε κεφάλαιο δίνονται λυμένα παραδείγματα και ασκήσεις - ερωτήσεις για την εξάσκηση των φοιτητών. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την αντίστοιχη βιβλιογραφία.

Οι σημειώσεις συμπληρώνονται με παραρτήματα, που αναφέρονται σε εξειδικευμένα θέματα των παραπάνω κεφαλαίων.

Οι συγγραφείς

Αθήνα, Δεκέμβριος 2011

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

## 1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Ορισμοί	1
1.1.1 Γεωδαισία / τοπογραφία	1
1.1.2 Ιστορική εξέλιξη της γεωδαισίας	1
1.1.3 Μονάδες μετρήσεων	4
1.1.3α Μονάδες μήκους και επιφάνειας	4
1.1.3β Μονάδες γωνιών	4
1.1.4 Σημαντικά ψηφία και στρογγυλοποίηση	6
1.2 Στοιχεία από τη θεωρία σφαλμάτων	7
1.2.1 Βασικοί ορισμοί	7
1.2.2 Η κατανομή των σφαλμάτων	10
1.2.3 Μέτρα ακρίβειας	12
1.2.4 Ισοβαρείς παρατηρήσεις	15
1.2.5 Ανισοβαρείς παρατηρήσεις	16
1.2.6 Νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων	18
1.2.7 Παραδείγματα	20
1.3 Επιφάνειες αναφοράς και συστήματα συντ/νων – Βασικές έννοιες	24
1.3.1 Γενικά	24
1.3.2 Βασικές επιφάνειες αναφοράς	24
1.3.2α Γεωειδές	25
1.3.2β Ελλειψοειδές εκ περιστροφής	26
1.3.2γ Σφαίρα	28
1.3.3 Συστήματα συντεταγμένων	28
1.3.3α Ελλειψοειδείς συντεταγμένες	28
1.3.3β Τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες	29
1.3.3γ Επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες στην προβολή	30
1.3.4 Γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς	31
1.4 Βασικοί υπολογισμοί στο επίπεδο	33
1.4.1 Γενικά	33
1.4.2 Τοπικά συστήματα συντεταγμένων	33
1.4.3 Θεμελιώδη προβλήματα γεωδαισίας	36
1.4.3α Πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα	36
1.4.3β Δεύτερο θεμελιώδες πρόβλημα	36
1.4.3γ Τρίτο θεμελιώδες πρόβλημα	38

1.4.4 Μετασχηματισμοί συντεταγμένων	38
1.4.4α Μετάθεση της αρχής	39
1.4.4β Αλλαγή κλίμακας	40
1.4.4γ Στροφή των αξόνων ως προς κοινή αρχή	41
1.4.4δ Μετασχηματισμός ομοιότητας	42
1.4.4ε Προσδιορισμός παραμέτρων μετασχηματισμού	43
1.5 Ασκήσεις	46
<b>2. ΓΩΝΙΕΣ – ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ</b>	
2.1 Γενικά	49
2.2 Οριζόντιες γωνίες	49
2.2.1 Ορισμός	49
2.2.2 Αζιμούθιο	50
2.2.3 Γωνία διεύθυνσης	50
2.2.4 Γωνίες βασικών διευθύνσεων	52
2.3 Κατακόρυφες γωνίες	52
2.3.1 Ορισμοί	52
2.3.2 Κλίση ευθείας	53
2.4 Όργανα	55
2.4.1 Θεοδόλιχο	55
2.4.1α Περιγραφή οργάνου	56
2.4.1β Βασικά μέρη θεοδόλιχου	57
2.4.1γ Συνθήκες λειτουργίας του θεοδόλιχου	66
2.4.2 Άλλα όργανα μέτρησης γωνιών	68
2.4.2α Μετροταινία	68
2.4.2β Γωνιομετρική Πυξίδα	69
2.4.2γ Κλισίμετρο	70
2.4.2δ Θεοδόλιχο Πυξίδα	71
2.4.2ε Γυροσκοπικό Θεοδόλιχο	71
2.4.3 Βοηθητικά Όργανα	71
2.4.3α Τρίποδες	71
2.4.3β Βάσεις	72
2.4.3γ Στόχοι	72
2.5 Μεθοδολογία μετρήσεων	76
2.5.1 Ρυθμίσεις στάσης	76
2.5.2 Μέτρηση οριζόντιας γωνίας	78
2.5.3 Μέτρηση οριζόντιων γωνιών σταθμού	79
2.5.3α Μέθοδος των πλήρων περιστροφών	79
2.5.3β Άλλες Μέθοδοι	80
2.5.4 Μέτρηση κατακόρυφης γωνίας	81
2.6 Επεξεργασία μετρήσεων	82
2.6.1 Υπολογισμός τιμής οριζόντιας γωνίας	82
2.6.2 Υπολογισμός τιμής κατακόρυφης γωνίας	83
2.7 Αναγωγές - διορθώσεις γωνιών	85
2.7.1 Αναγωγή οριζόντιας και κατακόρυφης γωνίας κατά την κάθετη στο ελλειψοειδές	85
2.7.2 Αναγωγή οριζόντιας γωνίας λόγω χαρτογραφικής προβολής	86
2.7.3 Αναγωγή οριζόντιας γωνίας λόγω έκκεντρης στάσης	87

2.7.4	Διόρθωση κατακόρυφης γωνίας λόγω ατμοσφαιρικής διάθλασης και καμπυλότητας της γης	89
2.8	Ακρίβεια μέτρησης οριζόντιας γωνίας	89
2.8.1	Σφάλμα γεωμετρίας των αξόνων του οργάνου	89
2.8.2	Σφάλμα κέντρωσης οργάνου – στόχων	90
2.8.3	Σφάλμα οριζοντίωσης οργάνου	91
2.8.4	Σφάλμα σκόπευσης στόχων	91
2.8.5	Σφάλμα ανάγνωσης	92
2.8.6	Σφάλμα λόγω αστάθειας του τρίποδα	92
2.8.7	Σφάλμα λόγω διάθλασης	93
2.8.8	Προεκτίμηση ακριβείας μέτρησης οριζόντιας γωνίας	93
2.9	Ερωτήσεις – ασκήσεις	94

### **3. ΜΗΚΗ – ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ**

3.1	Γενικά	99
3.2	Άμεση μέτρηση μήκους – μετροταινίες	99
3.2.1	Μετροταινίες και σύρματα invar – είδη και παρελκόμενα	99
3.2.1α	Πλαστικές και λινές μετροταινίες	99
3.2.1β	Μεταλλικές μετροταινίες	100
3.2.1γ	Ταινίες και σύρματα invar	100
3.2.1δ	Παρελκόμενα όργανα	101
3.2.2	Τεχνικές μέτρησης μήκους	101
3.2.2α	Ανάλογα με τον τρόπο στήριξης	101
3.2.2β	Ανάλογα με τη μορφολογία του εδάφους	102
3.2.3	Σφάλματα μετρήσεων	103
3.2.3α	Συστηματικά σφάλματα	104
3.2.3β	Τυχαία σφάλματα	104
3.2.3γ	Χονδροειδή σφάλματα	105
3.2.4	Διορθώσεις – αναγωγές μετρήσεων	105
3.2.4α	Διορθώσεις μετρημένων μηκών	105
3.2.4β	Αναγωγές μετρημένων μηκών	107
3.2.5	Ακρίβεια μέτρησης μήκους	108
3.3	Μετρήσεις με οπτικές μεθόδους	110
3.3.1	Γενικά	110
3.3.2	Ταχυμετρία	111
3.3.3	Δίμμετρη βάση	112
3.3.4	Ακρίβεια οπτικής μέτρησης	113
3.4	Μετρήσεις με γεωμετρικές μεθόδους	116
3.4.1	Ακρίβεια γεωμετρικής μέτρησης μήκους	116
3.5	Μέτρηση μήκων με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (E.D.M.)	117
3.5.1	Βασική αρχή λειτουργίας	117
3.5.2	Διαμόρφωση	119
3.5.3	Είδη οργάνων E.D.M.	121
3.5.4	Ανακλαστήρες	121
3.5.5	Ολοκληρωμένοι Γεωδαιτικοί σταθμοί (Total Stations)	123
3.5.6	Διορθώσεις - αναγωγές μετρήσεων μηκών με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία	125
3.5.6α	Διορθώσεις του συστήματος όργανο – ανακλαστήρας	125
3.5.6β	Διορθώσεις λόγω της ατμόσφαιρας	128
3.5.6γ	Γεωμετρικές Αναγωγές	130

3.6	Αρμονική ακρίβεια μετρήσεων	135
3.7	Ερωτήσεις και ασκήσεις	147
<b>4. ΥΨΟΜΕΤΡΙΑ</b>		
4.1	Γενικά	149
4.2	Ορισμοί	149
4.3	Μέση στάθμη της θάλασσας (Μ.Σ.Θ.)	151
4.4	Ίδρυση υψομετρικού συστήματος αναφοράς	152
4.4.1	Ελληνικό υψομετρικό σύστημα αναφοράς	154
4.5	Μέθοδοι προσδιορισμού ορθομετρικών υψομετρικών διαφορών	155
4.6	Μέθοδοι προσδιορισμού γεωμετρικών υψομέτρων	156
4.7	Γεωμετρική χωροστάθμηση	156
4.7.1	Αρχή της μεθόδου - Υπολογισμοί	156
4.7.2	Χωροσταθμικές οδεύσεις	159
4.8	Όργανα γεωμετρικής χωροστάθμησης - Χωροβάτες	166
4.8.1	Οπτικομηχανικοί χωροβάτες	166
4.8.2	Ψηφιακοί χωροβάτες	167
4.8.3	Χωροβάτες Laser	168
4.8.4	Παρελκόμενα γεωμετρικής χωροστάθμησης	168
4.8.4α	Χωροσταθμικοί πήχεις ή σταδίες	168
4.8.4β	Χωροσταθμικές βάσεις ή χελώνες	169
4.8.5	Συνθήκες ορθής λειτουργίας χωροβατών - Έλεγχοι - Αποκατάσταση	170
4.9	Σφάλματα στις γεωμετρικές χωροσταθμίσεις	172
4.9.1	Συστηματικά σφάλματα που οφείλονται στο χωροβάτη	173
4.9.2	Συστηματικά σφάλματα που οφείλονται στις σταδίες	173
4.9.3	Συστηματικά σφάλματα που οφείλονται στη διάθλαση και την καμπυλότητα της γης	173
4.10	Ακρίβεια της γεωμετρικής χωροστάθμησης	174
4.11	Ειδικές περιπτώσεις γεωμετρικής χωροστάθμησης	177
4.11.1	Αμοιβαία Χωροστάθμηση	177
4.11.2	Χωροσταθμίσεις για τον προσδιορισμό υψομέτρων οροφών	179
4.12	Τριγωνομετρική υψομετρία	179
4.12.1	Αρχή της μεθόδου	179
4.13	Σφάλματα στην τριγωνομετρική υψομετρία	181
4.13.1	Επίδραση της καμπυλότητας της γης	181
4.13.2	Επίδραση της διάθλασης	182
4.13.3	Προσδιορισμός του συντελεστή γεωδαιτικής διάθλασης $k$	185
4.13.3α	Μέθοδος των αμοιβαίων, ταυτόχρονων σκοπεύσεων κατακόρυφων γωνιών	187
4.13.3β	Μέθοδος των απλών σκοπεύσεων	188
4.14	Εκτίμηση της ακρίβειας προσδιορισμού της υψομετρικής διαφοράς με τη μέθοδο της τριγωνομετρικής υψομετρίας	189
4.14.1	Προσδιορισμός των υψών Οργάνου (Υ.Ο.) και Στόχου (Υ.Σ.) με ακρίβεια καλύτερη του $\pm 1\text{mm}$	191
4.15	Υδραυλική χωροστάθμηση	192
4.16	Βαρομετρική υψομετρία	193
4.17	Εφαρμογές	193
4.17.1	Προσδιορισμός υψομέτρου απρόσιτου σημείου	193
4.17.2	Λήψη στοιχείων για τη σύνταξη διαγραμμάτων μηκοτομής -	195

διατομών	
4.17.3 Χωροστάθμιση επιφάνειας	201
4.18 Ερωτήσεις – Ασκήσεις	202

## **5. ΔΟΥΥΦΟΡΙΚΟΣ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ – ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ**

5.1 Γενικά	205
5.2 Αρχή λειτουργίας GPS	205
5.3 Μετρήσεις GPS	210
5.3.1 Πηγές σφαλμάτων στις μετρήσεις GPS	211
5.4 Τεχνικές μέτρησης	211
5.4.1 Απόλυτος εντοπισμός	211
5.4.2 Σχετικός εντοπισμός	212
5.4.3 Αλγόριθμοι επεξεργασίας	215
5.5 Απόλυτος εντοπισμός θέσης	216
5.5.1 Ψευδοαπόσταση	216
5.5.2 Επίλυση απόλυτου εντοπισμού	219
5.5.3 Οι παράγοντες DOP	220
5.6 Ερωτήσεις	223

## **6. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΥΚΝΩΣΗΣ ΔΙΚΤΥΩΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ**

6.1 Γενικά	225
6.2 Τριγωνομετρικό δίκτυο – βασικές έννοιες και ορισμοί	226
6.3 Μέθοδοι πυκνώσης γεωδαιτικών δικτύων οριζοντίου ελέγχου	227
6.4 Εμπροσθοτομία	228
6.4.1 Γενικά	228
6.4.2 Απλή εμπροσθοτομία	229
6.4.2α Μεθοδολογία επίλυσης με γωνιομετρήσεις	229
6.4.2β Μεθοδολογία επίλυσης με πλευρομετρήσεις	230
6.4.3 Ακρίβεια εμπροσθοτομίας	231
6.4.3α Εκτίμηση ακρίβειας εμπροσθοτομίας	231
6.4.3β Διπλή εμπροσθοτομίας	232
6.4.4 Άλλες μορφές εμπροσθοτομίας	233
6.4.4α Περίπτωση απρόσιτου τριγωνομετρικού σημείου (πλαγιοτομία)	233
6.4.4β Περίπτωση μη αμοιβαία ορατών τριγωνομετρικών σημείων	234
6.4.4γ Τρισδιάστατη εμπροσθοτομία	235
6.4.5 Ευρύτερο πεδίο εφαρμογών εμπροσθοτομίας	235
6.5 Οπισθοτομία	237
6.5.1 Γενικά – ορισμός του προβλήματος	238
6.5.2 Μεθοδολογία επίλυσης οπισθοτομίας	239
6.5.3 Ακρίβεια Οπισθοτομίας	240
6.5.3α Εκτίμηση ακρίβειας οπισθοτομίας	241
6.5.3β Διπλή και πολλαπλή οπισθοτομία	241
6.5.4 Άλλες μορφές οπισθοτομίας	242
6.5.4α Πλευρική οπισθοτομία	242
6.5.4β Τρισδιάστατη πλευρική οπισθοτομία	242
6.5.5 Ευρύτερο πεδίο εφαρμογών οπισθοτομίας	243
6.6 Μέθοδος Hansen	244
6.7 Καταβίβασις τριγωνομετρικού σημείου	245



6.7.1 Καταβιβασμός προσιτού σημείου	245
6.7.2 Καταβιβασμός απρόσιτου σημείου	246
6.8 Ερωτήσεις – ασκήσεις	251

## **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι**

I.1 Έλεγχος συνθηκών λειτουργίας θεοδόλιχου	253
I.1.1 Πρωτεύων άξονας κατακόρυφος	253
I.1.1α Έλεγχος	253
I.1.1β Αποκατάσταση	253
I.1.1γ Σφάλμα	253
I.1.2 Δευτερεύων άξονας κάθετος στον πρωτεύοντα	254
I.1.2α Έλεγχος	254
I.1.2β Αποκατάσταση – Εξάλειψη	255
I.1.2γ Σφάλμα	255
I.1.3 Σκοπευτικός άξονας κάθετος στον δευτερεύοντα	256
I.1.3α Έλεγχος	256
I.1.3β Αποκατάσταση – Εξάλειψη	256
I.1.3γ Σφάλμα	257

## **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ**

II.1 Ατμοσφαιρικής διάθλασης	257
------------------------------	-----

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

260

# 1. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

## 1.1 ΟΡΙΣΜΟΙ

### 1.1.1 Γεωδαισία / Τοπογραφία

Με τον όρο *Γεωδαισία* χαρακτηρίζεται η επιστήμη που έχει ως κύριο αντικείμενο τον προσδιορισμό του σχήματος και μεγέθους της φυσικής γήινης επιφάνειας, το πεδίο βαρύτητας της γης και τις μεταβολές τους στο χρόνο. Συχνά, χρησιμοποιείται ο όρος *τοπογραφία* για να δηλώσει την αποτύπωση τμημάτων της φυσικής γήινης επιφάνειας (φυσικής ή τεχνητής) με προσδιορισμένες απαιτήσεις ακρίβειας και την απόδοση τους σε χάρτες ή τοπογραφικά διαγράμματα. Απαιτείται επομένως, μια συνδυασμένη γνώση των οργάνων μέτρησης, των διαδικασιών και μεθοδολογιών μέτρησης και των μαθηματικών και στατιστικών μεθόδων για τον υπολογισμό των απαιτούμενων μεγεθών.

Η γεωδαισία είναι μια από τις αρχαιότερες επιστήμες και εξακολουθεί μέχρι σήμερα να είναι απαραίτητη αφού η εφαρμογή της είναι εμφανής σε πολλές ανθρώπινες δραστηριότητες, π.χ. στην χαρτογράφηση της επιφάνειας της γης αλλά και άλλων πλανητών, στην παραγωγή χαρτών για χρήση στην ξηρά, στην θάλασσα και στον αέρα, στον προσδιορισμό των ορίων ιδιοκτησίας για ιδιωτικές και δημόσιες χρήσεις, στην δημιουργία χωρικών και γεωμετρικών πληροφοριών που συνεισφέρουν στην διαχείριση του περιβάλλοντός μας, κ.λ.π. Επίσης, έχει σημαντικό ρόλο σε πολλές ειδικότητες των μηχανικών, όπως για παράδειγμα, στον σχεδιασμό, στην υλοποίηση και στην συντήρηση τεχνικών έργων (όπως δρόμοι, κτίρια, γέφυρες, φράγματα, αποχετευτικά έργα, ορυχεία), στην βιομηχανία (όπως έλεγχος ορθής κατασκευής κατά την βιομηχανική παραγωγή, ορθής λειτουργίας βιομηχανικών εγκαταστάσεων κ.λ.π.) και σε πολλές άλλες συναφείς επιστήμες όπως γεωγραφία, γεωλογία, γεωφυσική, μετεωρολογία, αρχαιολογία, κλπ.

Η Γεωδαισία στο πρακτικό της μέρος έχει να κάνει με μετρήσεις γωνιών/διευθύνσεων, μηκών και υψομετρικών διαφορών αλλά και άλλων δυναμικών μεγεθών (ένταση του πεδίου βαρύτητας, συνθήκες περιβάλλοντος κ.λ.π.) που με τις κατάλληλες μεθόδους επεξεργασίας μπορούν να αποδώσουν με προσδιορισμένη ακρίβεια, το ανάγλυφο της περιοχής (ή του αντικειμένου) που θέλουμε να αποτυπωθεί. Στα επόμενα κεφάλαια θα αναλυθούν οι τεχνικές μέτρησης κάθε μεγέθους καθώς και τα όργανα που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση.

### 1.1.2 Ιστορική εξέλιξη της γεωδαισίας

Η λέξη *Γεωδαισία* είναι ελληνική. Προέρχεται από τις λέξεις *Γη* και *Δαίω* και σημαίνει «μοιράζω τη γη». Μαζί με την Αστρονομία και τη Γεωγραφία είναι γνωστές από την αρχαιότητα.

Την εποχή της ακμής των λαών της Μεσοποταμίας και της Αιγύπτου, κατά την τρίτη π.Χ. χιλιετία, διαπιστώνεται από αρχαιολογικά ευρήματα ότι οι λαοί αυτοί είχαν γνώσεις αστρονομίας και γεωμετρίας και είχαν αναπτύξει τεχνικές μετρήσεων, υπολογισμού εμβαδών απλών σχημάτων και απεικόνισης τμημάτων του εδάφους. Ο *πάπυρος Rhind* αποτελεί ένα από τα αρχαιότερα γραπτά μνημεία που περιγράφει εφαρμογές της γεωμετρίας για τη λύση απλών γεωδαιτικών προβλημάτων, ενώ είναι γνωστό ότι οι Αιγύπτιοι είχαν κτηματολόγιο και είχαν αναπτύξει τεχνικές που τους επέτρεπαν την επανατοποθέτηση των

(κατεστραμμένων) ορίων των ιδιοκτησιών μετά από τις πλημμύρες του Νείλου. Τις γνώσεις αυτές τις κατείχε το ιερατείο το οποίο και τις εφάρμοζε.

Οι ρίζες της γεωδαισίας ανάγονται στην αρχαία Ελλάδα. Αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι ασχολήθηκαν με το σχήμα της γης, τις κινήσεις της, τη σχέση της με άλλους πλανήτες και την απεικόνιση της γήινης επιφάνειας σε χάρτες. Εξέλιξαν τη γεωμετρία, την οποία πήραν από τους Αιγυπτίους και τους λαούς της Μεσοποταμίας (Σουμέριους, Ασσύριους, Βαβυλώνιους) προκειμένου να αναπτύξουν μεθόδους υπολογισμών και να κατασκευάσουν όργανα για να μετρήσουν διάφορα μεγέθη.

Σπουδαίοι γεωμέτρεις της αρχαίας Ελλάδας (6<sup>ος</sup> έως και 4<sup>ος</sup> π.Χ. αιώνας) υπήρξαν ο *Θαλής* (έθεσε τις βάσεις της Γεωμετρίας) και ο *Αναξίμανδρος* από τη Μίλητο (χάραξε χάρτη του μέχρι τότε γνωστού κόσμου με τη γη σαν κύλινδρο), ο *Πυθαγόρας* από τη Σάμο (ανέπτυξε τα μαθηματικά), ο *Πλάτωνας* από την Αθήνα (Κοσμογονία), ο *Αριστοτέλης* από τα Στάγειρα (δίνει πρώτος τον ορισμό της γεωδαισίας την οποία διαχωρίζει από τη γεωμετρία, αλλά θεωρεί τη γη σαν σφαίρα, ακίνητη στο κέντρο του σύμπαντος γύρω από την οποία περιστρέφονται ο ήλιος και οι πλανήτες). Την ίδια εποχή ο *Ευπαλίνος* από τη Σάμο κατασκευάζει στο νησί σήραγγα μήκους περίπου 1250m για τη μεταφορά νερού (*Ευπαλίνειο όρυγμα*). Το έργο αυτό θεωρείται επίτευγμα για την εποχή.

Κατά τους Αλεξανδρινούς χρόνους ο *Ευκλείδης* καταγράφει σε 13 βιβλία όλη τη μέχρι τότε γνώση της γεωμετρίας. Ο *Αρίσταρχος* από τη Σάμο διατυπώνει τη θεωρία του ηλιοκεντρικού συστήματος, και υποστηρίζει τις δύο κινήσεις της γης (περί τον άξονά της και γύρω από τον ήλιο). Ο *Αρχιμήδης* από τις Συρακούσες, ένας από τους σπουδαιότερους αρχαίους Έλληνες μηχανικούς, εκτιμά το μήκος τόξου 1 μοίρας της γήινης σφαίρας. Ο *Ερατοσθένης* από την Κυρήνη (υπήρξε βιβλιοθηκάριος της περίφημης αλεξανδρινής βιβλιοθήκης) θεωρείται ο πατέρας της γεωδαισίας. Αποδεικνύει το σφαιρικό σχήμα της γης και είναι ο πρώτος που προσδιορίζει την ακτίνα και την περίμετρο της γης, την οποία παραδεχόταν σφαιρική, με αστρονομικές και γεωδαιτικές μετρήσεις και υπολογισμούς. Συντάσσει επίσης χάρτη του κόσμου με κνάβο. Ο *Ήρωνας* από την Αλεξάνδρεια γράφει το πρώτο γεωδαιτικό σύγγραμμα («Περί μετρικών Α, Β και Γ» και «Περί διόπτρας») στο οποίο αναφέρονται μέθοδοι μέτρησης γωνιών και αποστάσεων και τεχνικές χαράξεων τεχνικών έργων. Ο *Ίππαρχος* από τη Νίκαια της Βιθυνίας, που θεωρείται πατέρας της Αστρονομίας, εισάγει τη χρήση αστρονομικών συντεταγμένων για τον προσδιορισμό θέσης. Κατά την αρχαιότητα εφευρέθηκαν και εξελίχθηκαν τα πρώτα γεωδαιτικά όργανα: ο *γνώμονας*, η *διόπτρα* και ο *αστρολάβος*.

Οι Ρωμαίοι αξιοποιούν τις γνώσεις των Ελλήνων αλλά δεν τις αναπτύσσουν παραπέρα. Εισάγουν το *κτηματολόγιο* (Cadastrum) για τον υπολογισμό φόρων της γαιοκτησίας και χρησιμοποιούν ειδικευμένους μηχανικούς – γεωμέτρεις που ονομάζονται *Αγρομέτρεις* (Agrimensores) που λειτουργούν ως συμβολαιογράφοι, εφοριακοί και δικαστές σε συνοριακές διαφορές.

Κατά τα Μεσαιωνικά χρόνια στον κόσμο κυριαρχεί ο σκοταδισμός και η οπισθοδρόμηση, ενώ επικρατούν θεοκρατικές αντιλήψεις. Μόνον οι Άραβες, που μεταφράζουν στη γλώσσα τους τα έργα του Ευκλείδη, του Ήωνα και του Πτολεμαίου, αναπτύσσουν τη γεωμετρία και τα μαθηματικά (η λέξη άλγεβρα είναι αραβική), ασχολούνται με τη μαθηματική γεωδαισία και εξελίσσουν τα όργανα μέτρησης. Οι Άραβες μεταδίδουν, μέσω των κατακτήσεων τους στην Ευρώπη, γνώσεις γεωδαισίας, αστρονομίας και χαρτογραφίας.

Με την Αναγέννηση μια νέα εποχή αρχίζει για τη γεωδαισία όπως και για τις υπόλοιπες φυσικές επιστήμες. Ήδη από την αρχή της πρώτης μ.Χ. χιλιετίας, έργα των αρχαίων ελλήνων φιλοσόφων που διασώθηκαν, αρχίζουν να μεταφράζονται στα λατινικά, ενώ η ανακάλυψη της τυπογραφίας συμβάλλει σημαντικά στη διάδοσή τους. Τον 16<sup>ο</sup> αιώνα ο *Κοπέρνικος* επαναδιατυπώνει και τεκμηριώνει με παρατηρήσεις τη θεωρία του Αρίσταρχου, ο *Kepler* εκφράζει τους τρεις νόμους για τις τροχιές των πλανητών ενώ ο *Γαλιλαίος* κατασκευάζει το αστρονομικό τηλεσκόπιο, χρονόμετρα και εκκρεμή. Την ίδια εποχή ο *Fernel* με αστρογεωδαιτικές παρατηρήσεις μετρά το μήκος τόξου του μεσημβρινού από το Παρίσι μέχρι την Αμιένη. Χρησιμοποιώντας τις μετρήσεις αυτές ο *Lalande* υπολογίζει το μέγεθος της γήινης σφαίρας.

Τον 17<sup>ο</sup> αιώνα ο Ολλανδός *Snelius* επινοεί τη μέθοδο του τριγωνισμού, αξιοποιώντας τους λογάριθμους και τους λογαριθμικούς πίνακες (Napier), και τη συμπλήρωση της Τριγωνομετρίας. Σημαντικό ρόλο στην εφαρμογή του τριγωνισμού παίζει η κατασκευή του *θεοδόλιχου*, σαν εξέλιξη της διόπτρας του Ηρώνα, που βελτιώνεται αργότερα με την προσθήκη τηλεσκοπίου το οποίο αργότερα με την προσθήκη σταυρονήματος γίνεται σκοπευτικό. Με την εφαρμογή του τριγωνισμού είναι πλέον δυνατόν να προσδιορισθούν με ακρίβεια οι διαστάσεις της σφαιρικής γης, και να υπολογισθούν μήκη τόξων μεταξύ σημείων που απέχουν μερικές δεκάδες χιλιόμετρα. Τον ίδιο αιώνα ο *Νεύτωνας* διατυπώνει το νόμο της παγκόσμιας έλξης με αποτέλεσμα τη μετάβαση από το μοντέλο της σφαιρικής γης στο μοντέλο του γήινου ελλειψοειδούς που είναι πεπλατυσμένο στους πόλους.

Το 1792 η γαλλική κυβέρνηση αποφασίζει να εισάγει το *μέτρο* σαν ενιαία μονάδα μέτρησης γραμμικού μεγέθους. Η γαλλική Ακαδημία ορίζει ότι το *ένα μέτρο* ισούται με το  $1 \cdot 10^{-7}$  του *τεταρτημορίου του κεντρικού Γαλλικού μεσημβρινού*. Το μήκος του μεσημβρινού μετρήθηκε μέσω τριγωνισμού από τους *Delambre*, *Mechain*, *Borda* και *Laplace*. Τον επόμενο αιώνα ο *Gauss* εισάγει το κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων για τη συνόρθωση παρατηρήσεων τριγωνισμού, ενώ την ίδια εποχή ο *Legendre*, ανεξάρτητα από τον *Gauss* αναπτύσσει το ίδιο κριτήριο και το χρησιμοποιεί για τη συνόρθωση μηκών τόξων. Ο *Helmert* λαμβάνει υπόψη του τις αποκλίσεις της κατακορύφου για τον υπολογισμό των ακριβών διαστάσεων του γήινου ελλειψοειδούς. Διαστάσεις γήινου ελλειψοειδούς υπολογίζουν την ίδια εποχή και οι *Everest* και *Clark*.

Την ίδια εποχή εισάγεται από τον *Gauss* η έννοια της ισοδυναμικής επιφάνειας του γήινου πεδίου βαρύτητας που προσεγγίζει καλύτερα τη μέση στάθμη της θάλασσας, ενώ αργότερα ο *Listing* ονομάζει την επιφάνεια αυτή *γεωειδές*. Τέλος στα τέλη του 19<sup>ου</sup> αιώνα ο *Helmert* συγγράφει τη «*Μαθηματική και Φυσική θεωρία της Γεωδαισίας*» στην οποία συμπεριλαμβάνει όλη τη μέχρι τώρα γνώση.

Ο 18<sup>ος</sup> και 19<sup>ος</sup> αιώνας χαρακτηρίζεται από σημαντικές εξελίξεις και βελτιώσεις στον τομέα των οργάνων. Με την τεχνολογική επανάσταση που συντελείται, κυρίως μετά το τέλος του Β Παγκόσμιου πολέμου, η γεωδαισία αναπτύσσεται ραγδαία σε όλους τους τομείς. Η εκτόξευση τεχνητών δορυφόρων, πρώτα από τους Σοβιετικούς (Sputnik I & II) και αργότερα από τους Αμερικανούς (Explorer I) εγκαινιάζει μια νέα εποχή, την εποχή της *διαστημικής και δορυφορικής γεωδαισίας*. Η χρήση δορυφόρων για τον προσδιορισμό θέσης σε συνδυασμό με μη δορυφορικά συστήματα δίνει τη δυνατότητα ίδρυσης παγκόσμιων συστημάτων αναφοράς υψηλής ακρίβειας. Σήμερα το *δορυφορικό σύστημα GPS* χρησιμοποιείται ευρύτατα για την ίδρυση ή επαναμέτρηση των εθνικών

τριγωνομετρικών δικτύων, για τη μελέτη του γήινου πεδίου βαρύτητας, την παρακολούθηση της κίνησης των τεκτονικών πλακών, τον ακριβή προσδιορισμό των παραμέτρων περιστροφής της γης.

Στα επόμενα κεφάλαια θα αναλυθούν οι τεχνικές μέτρησης των βασικών μεγεθών, τα όργανα που χρησιμοποιούνται σε κάθε περίπτωση και έμφαση θα δοθεί στην ανάλυση και τον ποιοτικό έλεγχο των παρατηρήσεων.

### 1.1.3 Μονάδες μετρήσεων

Οι γεωδαιτικές διαδικασίες μέτρησης αναφέρονται τόσο σε γραμμικά όσο και σε γωνιακά μεγέθη. Οι βασικές μονάδες στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων (SI) δίνονται στον Πίνακα 1.1 για τα γραμμικά μεγέθη, στον Πίνακα 1.2 για τις επιφάνειες, στον Πίνακα 1.3 για τον όγκο και στον Πίνακα 1.4 για τα γωνιακά μεγέθη.

#### 1.1.3α Μονάδες μήκους και επιφάνειας

Μονάδα Μήκους : μέτρο (m)	
1 δεκάμετρο = $10^1$ m = 1 dam	1 δεκατόμετρο = $10^{-1}$ = 1 dm
1 εκατόμετρο = $10^2$ m = 1 hm	1 εκατοστό = $10^{-2}$ = 1 cm
1 χιλιόμετρο = $10^3$ m = 1 km	1 χιλιοστό = $10^{-3}$ = 1 mm
1 megάμετρο = $10^6$ m = 1 Mm	1 μικρόμετρο = $10^{-6}$ = 1 $\mu$ m
1 γιγάμετρο = $10^9$ m = 1 Gm	1 νανόμετρο = $10^{-9}$ = 1 nm
1 τεράμετρο = $10^{12}$ m = 1 Tm	1 πικόμετρο = $10^{-12}$ = 1 pm

Πίνακας 1.1 Μονάδες γραμμικών μεγεθών

Άλλες μονάδες μήκους, εκτός του συστήματος SI, που χρησιμοποιούνται συχνά είναι:

- 1 ίντσα (inch) = 0.025 m
- 1 πόδι (foot) = 12 ίντσες = 0.3048 m
- 1 γιάρδα (yard) = 3 πόδια = 0.9144 m
- 1 μίλι (mile) = 1609.3440 m
- 1 ναυτικό μίλι (nautical mile) = 1851.9953 m

Επιφάνεια : τετραγωνικό μέτρο (m <sup>2</sup> )	
1 στρέμμα = $10^3$ m <sup>2</sup>	1 τετρ. δέκατο του μέτρου = $10^{-2}$ m <sup>2</sup> = 1 dm <sup>2</sup>
1 εκτάριο = $10^4$ m <sup>2</sup> = 1 ha	1 τετρ. εκατοστό = $10^{-4}$ m <sup>2</sup> = 1 cm <sup>2</sup>
1 τετραγωνικό χιλιόμετρο = $10^6$ m <sup>2</sup> = 1 km <sup>2</sup>	1 τετρ. χιλιοστό = $10^{-6}$ m <sup>2</sup> = 1 mm <sup>2</sup>

Πίνακας 1.2 Μονάδες επιφάνειας

Όγκος : κυβικό μέτρο (m <sup>3</sup> )	
1 m <sup>3</sup> = $10^6$ cm <sup>3</sup> = $10^9$ mm <sup>3</sup>	1 λίτρο (litre) = $10^{-3}$ m <sup>3</sup>
1 cm <sup>3</sup> = $10^{-6}$ m <sup>3</sup>	1 m <sup>3</sup> = $10^3$ λίτρα
1 mm <sup>3</sup> = $10^{-9}$ m <sup>3</sup>	

Πίνακας 1.3 Μονάδες όγκου

#### 1.1.3β Μονάδες γωνιών

Τα γωνιακά μεγέθη μετρώνται σε μοίρες (εξηκονταδική ή δεκαδική μορφή) και σε ακτίνια.

Το ακτίνιο (radian ή rad) ισούται με την επίκεντρη γωνία που βλέπει σε τόξο μήκους ίσου με την ακτίνα του κύκλου. Ισχύει ότι:

1 περιφέρεια κύκλου =  $2\pi$  rad = 4 ορθές γωνίες

Η εξηκονταδική και δεκαδική μορφή των μονάδων γωνίας δίνεται στον Πίνακα 1.4:

Εξηκονταδική μορφή ( $^{\circ}$ ή deg)	Εκατονταδική μορφή (grad)
1 περιφέρεια κύκλου = $360^{\circ}$ (μοίρες ή degrees)	1 περιφέρεια κύκλου = 400g (βαθμοί ή gradients ή gon)
$1^{\circ} = 60'$ (λεπτά τόξου)	$1g = 100$ cgon (centigon ή c)
$1' = 60''$ (δευτερόλεπτα τόξου)	$1$ cgon = 100 ccgon (milligon)

Πίνακας 1.4 Μονάδες γωνιών

Η σχέση που συνδέει τα γωνιακά μεγέθη είναι:

$$1 \text{ περιφέρεια κύκλου} = 2\pi \text{ rad} = 360^{\circ} = 400g$$

$$\frac{\alpha}{\text{rad}} = \frac{\theta}{180^{\circ}} = \frac{\gamma}{200^g} \quad (1.1)$$

όπου η γωνία  $\theta$  είναι σε δεκαδική μορφή.

Έτσι, προκύπτουν τα παρακάτω:

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$1' = \frac{\pi}{180 \times 60} \text{ rad}$$

$$1'' = \frac{\pi}{180 \times 60^2} \text{ rad}$$

$$1^g = \frac{\pi}{200} \text{ rad}$$

$$1^c = \frac{\pi}{200 \times 10^2} \text{ rad}$$

$$1^{cc} = \frac{\pi}{200 \times 10^4} \text{ rad}$$

Για την μετατροπή μιας γωνίας, σε μοίρες, από εξηκονταδική ( $\mu^{\circ}$   $\pi'$   $\delta''$ ) σε δεκαδική μορφή ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

Έστω η γωνία  $\theta = 38^{\circ} 15' 18''$ , τότε

$$\mu^{\circ} = 38^{\circ}$$

$$\pi' = \frac{15'}{60'} = 0.25^{\circ}$$

$$\delta'' = \frac{18'}{3600'} = 0.005^{\circ}$$

$$\text{άρα, } \theta = 38^{\circ}.255$$

Για την μετατροπή μιας γωνίας, σε μοίρες, από δεκαδική σε εξηκονταδική μορφή ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία:

Έστω η γωνία  $\theta = 38^\circ.255$ , τότε

$$\mu^\circ = 38^\circ$$

$$\pi' = (38^\circ.255 - 38^\circ) \times 60' = 15.3'$$

$$\delta'' = (15.3' - 15') \times 60'' = 18''$$

$$\text{άρα, } \theta = 38^\circ 15' 18''$$

Όταν η γωνία μετράται σε μονάδες βαθμών (grad) η συνηθέστερη μορφή της είναι π.χ.  $215^g.3550$  που είναι ισοδύναμη με την μορφή  $215^g 35^c 50^{cc}$ .

Στους γεωδαιτικούς υπολογισμούς, οι λόγοι  $\frac{180^\circ}{\pi}$  ή  $\frac{200^g}{\pi}$  χρησιμοποιούνται πολύ συχνά, και έτσι το σύμβολο «ρ» χρησιμοποιείται για να δηλώσει τους παραπάνω λόγους, δηλ.  $\frac{180^\circ}{\pi} = \rho^\circ$  ή  $\frac{200^g}{\pi} = \rho^g$ .

Επομένως, για την μετατροπή γωνιακών μεγεθών από ακτίνια σε μοίρες αρκεί να πολλαπλασιάσουμε με  $\rho^\circ$  ή με  $1/\rho^\circ$  για την αντίστροφη μετατροπή. Βάσει της σχέσης (1.1) προκύπτει ότι:

$$1 \text{ rad} = 57^\circ.2957795 = 63^g.6619972, \text{ καθώς και οι παρακάτω αριθμοί:}$$

$$\rho^\circ = 57^\circ.2957795... \quad \rho' = 3437'.7467... \quad \rho'' = 206264''.8...$$

$$\rho^g = 63^g.661977 \quad \rho^c = 6366^c.1977 \quad \rho^{cc} = 636619^{cc}.77$$

#### 1.1.4 Σημαντικά ψηφία και στρογγυλοποίηση

Οι μηχανικοί μεταδίδουν ένα μεγάλο μέρος της πληροφορίας που θέλουν να δώσουν χρησιμοποιώντας αριθμούς. Είναι σημαντικό, επομένως, να γνωρίζουμε ότι το πλήθος των ψηφίων που δίνουμε για τις διάφορες υπολογισμένες τιμές ανταποκρίνεται στην ακρίβεια με την οποία τα μεγέθη έχουν μετρηθεί στο ύπαιθρο ή έχουν υπολογιστεί εκ των υστέρων. Για παράδειγμα, υπάρχει διαφοροποίηση στις τιμές 2.00m και 2.000m, δεδομένου ότι η δεύτερη τιμή υποδηλώνει εκτίμηση στο επίπεδο του χιλιοστού (mm) σε αντίθεση με την πρώτη τιμή που δηλώνει ακρίβεια στο επίπεδο των 10 χιλιοστών (cm).

Το πλήθος των ψηφίων ενός αριθμού, τα οποία έχουν σημασία για την ακρίβεια της τιμής του μεγέθους λέγονται *σημαντικά ψηφία*. Το πλήθος των σημαντικών ψηφίων δεν πρέπει να συγχέεται με τον αριθμό των δεκαδικών ψηφίων. Ο βασικός κανόνας είναι ότι ο αριθμός των μηδενικών ψηφίων αμέσως μετά την υποδιαστολή, για αριθμούς μικρότερους της μονάδας, και μέχρι το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο δεν λαμβάνονται υπόψη. Για παράδειγμα:

2 σημαντικά ψηφία: 50, 62, 4.2, 0.33, 0.0042, 0.0040

3 σημαντικά ψηφία: 736, 73.6, 70.6, 0.706, 0.0706, 0.00700

Πρέπει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια των αρχικών μετρήσεων δεν πρέπει να μεταβάλλεται κατά την διάρκεια των υπολογισμών που ακολουθούν για την εκτίμηση άλλων μεγεθών. Επομένως, ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων που δίνεται στην τελική λύση πρέπει να συμβαδίζει με την ακρίβεια των σημαντικών

ψηφίων των αρχικών δεδομένων, παρόλο που στις ενδιάμεσες πράξεις συνήθως διατηρούνται περισσότερα σημαντικά ψηφία.

Επίσης, στην περίπτωση αριθμητικών πράξεων με αριθμούς που δεν έχουν το ίδιο πλήθος σημαντικών ψηφίων, ισχύει ότι στην πρόσθεση (ή αφαίρεση) το άθροισμα (ή η διαφορά) θα έχουν τόσα δεκαδικά όσα έχει ο αριθμός με τα λιγότερα δεκαδικά που συμμετέχει σε αυτές τις αριθμητικές πράξεις. Για παράδειγμα, έστω ότι έγιναν μετρήσεις μήκους με το ίδιο όργανο και προέκυψαν οι τιμές: 122.224m, 52.47m, 2457.8m, 0.92m. Το άθροισμα των αριθμών με χρήση υπολογιστή τσέπης θα δώσει την τιμή 2633.414, ενώ η τιμή που διατηρεί την ακρίβεια των μετρούμενων μεγεθών είναι 2633.4.

Το ίδιο ισχύει στον πολλαπλασιασμό ή στην διαίρεση αριθμών. Έστω  $214.8345 \times 2.03 = 436.114035$ , αλλά επειδή ο αριθμός με τα λιγότερα σημαντικά ψηφία είναι ο 2.03 (με τρία σημαντικά ψηφία) η τιμή του αποτελέσματος που διατηρεί αυτή την ακρίβεια είναι 436.

Συχνά, για να διατηρηθεί η ακρίβεια των αριθμών με τα σημαντικά ψηφία, απαιτείται να γίνει *στρογγυλοποίηση* στην τελική λύση των ενδιάμεσων αριθμητικών υπολογισμών. Κατά τη διαδικασία αυτή διαγράφονται κάποια από τα τελευταία ψηφία του αριθμού, έτσι ώστε να περιέχει μόνο τα σημαντικά ψηφία. Υπάρχουν διάφοροι κανόνες στρογγυλοποίησης, αλλά οι συνηθέστεροι είναι:

- εάν απαιτούνται  $k$  σημαντικά ψηφία, τότε απορρίπτονται όλα τα ψηφία που βρίσκονται δεξιά του  $k+1$  ψηφίου
- εξετάζεται το  $k+1$  ψηφίο:
  - εάν είναι από 0 ως 4 τότε απορρίπτεται, π.χ. ο αριθμός 15.64421 που στρογγυλοποιείται σε τέσσερα σημαντικά ψηφία γίνεται 15.64
  - εάν είναι από 6 ως 9 τότε απορρίπτεται και αυξάνεται το  $k+1$  ψηφίο κατά 1, π.χ. ο αριθμός 7.176 που στρογγυλοποιείται σε τρία σημαντικά ψηφία γίνεται 7.18
  - εάν είναι 5 και το  $k$  ψηφίο είναι ζυγός αριθμός, τότε απορρίπτεται, π.χ. ο αριθμός 15.645 που στρογγυλοποιείται σε τέσσερα σημαντικά ψηφία γίνεται 15.64
  - εάν είναι 5 και το  $k$  ψηφίο είναι μονός αριθμός, τότε απορρίπτεται και αυξάνεται το  $k$  ψηφίο κατά 1, π.χ. ο αριθμός 15.6435 που στρογγυλοποιείται σε πέντε σημαντικά ψηφία γίνεται 15.644.

Κατά τη συνηθέστερη πρακτική, όταν το τελευταίο ψηφίο που πρέπει να φύγει είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο του 5, ο αριθμός στρογγυλεύεται αντίστοιχα προς τα κάτω ή προς τα πάνω, δηλαδή προς τη πλησιέστερη μονάδα. Όταν το ψηφίο που πρέπει να φύγει είναι 5, τότε ο αριθμός στρογγυλεύεται προς τα κάτω ή προς τα πάνω, έτσι ώστε το τελευταίο ψηφίο του αριθμού να γίνει άρτιο.

## 1.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

### 1.2.1 Βασικοί ορισμοί

Ο τοπογράφος μηχανικός ασχολείται με μια ποικιλία δραστηριοτήτων που αναφέρονται στη μελέτη των γεωμετρικών χαρακτηριστικών του χώρου σε μικρή ή μεγάλη κλίμακα. Όλες αυτές οι δραστηριότητες αναπτύσσονται γύρω από μετρήσεις και αφορούν στη συλλογή, επεξεργασία και ανάλυσή τους. Επομένως,



είναι απαραίτητο να διευκρινιστεί τι είναι «μέτρηση» και ποια είναι τα χαρακτηριστικά της.

Η μέτρηση περιλαμβάνει την παρατήρηση, διότι αν κάτι δεν παρατηρηθεί τότε δεν υπάρχει μέτρηση. Επομένως, οι όροι «μέτρηση» και «παρατήρηση» χρησιμοποιούνται συχνά ως συνώνυμες έννοιες. Επίσης, πρέπει να τονισθεί ότι η μέτρηση είναι το τελικό προϊόν (τιμή) μιας σειράς διεργασιών. Η μέτρηση είναι μια διαδικασία που υπόκειται σε μεταβολή. Καμία μέτρηση δεν μπορεί να επαναληφθεί επακριβώς λόγω των ατελειών στα όργανα που χρησιμοποιούνται, στην έλλειψη ικανότητας ή εμπειρίας του παρατηρητή να πραγματοποιήσει τη μέτρηση ή να διαβάσει τη σωστή ένδειξη ή στις συνθήκες του περιβάλλοντα χώρου κατά τη διάρκεια των παρατηρήσεων κλπ.

Αυτό το σύστημα «όργανο - παρατηρητής-συνθήκες» συμβάλλει στην ακρίβεια των παρατηρήσεων και επομένως, οι πολύ μικρές μεταβολές που συμβαίνουν στις διαδικασίες μέτρησης παράγουν αντίστοιχες μεταβολές στις τιμές των μετρήσεων. Όταν οι μετρήσεις ενός μεγέθους με το ίδιο σύστημα «όργανο – παρατηρητής - συνθήκες» τείνουν στο άπειρο, τότε το σύνολο των ενδεχόμενων τιμών του μεγέθους αυτού αποτελεί το *πληθυσμό*. Πρακτικά όμως, οι παρατηρήσεις είναι περιορισμένου πλήθους και έτσι τα αποτελέσματα μιας σειράς παρατηρήσεων θεωρούνται ότι αποτελούν *δείγμα* (δηλαδή υποσύνολο του πληθυσμού).

Εφόσον όλες οι μετρήσεις υπόκεινται σε μεταβολή, σημαίνει ότι κανένα μέγεθος που μετράται δεν είναι πλήρως προσδιορισίμο. Συνήθως, αναζητούμε μια σταθερή τιμή για το μέγεθος που μετράμε και την οποία θεωρούμε ότι είναι η «αληθής τιμή», αλλά στην πραγματικότητα αυτό που παίρνουμε είναι μια εκτίμηση της αληθούς τιμής. Μαθηματικά επομένως, το μέγεθος που μετράται (δηλαδή η μέτρηση) θεωρείται ότι είναι μια *μεταβλητή*.

Λόγω της μεταβολής που παρατηρείται κατά την διάρκεια των μετρήσεων, είναι αναμενόμενο να υπάρχει διαφορά μεταξύ του αποτελέσματος της μέτρησης ενός μεγέθους και της αληθούς τιμής του. Αυτή η διαφορά ονομάζεται «αληθές σφάλμα» της μέτρησης.

Τα σφάλματα των μετρήσεων παραδοσιακά ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες:

- Χονδροειδή
- Συστηματικά
- Τυχαία

Τα *χονδροειδή* σφάλματα έχουν γενικά μεγάλη τιμή συγκριτικά με τις υπόλοιπες τιμές του ίδιου μεγέθους στο δείγμα και οφείλονται σε τυχηματικούς λόγους όπως στην απροσεξία του παρατηρητή, (π.χ. λανθασμένη καταγραφή της ένδειξης μιας μέτρησης λόγω εναλλαγής ψηφίων, στόχευση με κάποιο τοπογραφικό όργανο σε λάθος σημείο). Προσεκτικές διαδικασίες μέτρησης στο πεδίο μπορούν να βοηθήσουν στην αποφυγή ή ανίχνευση των χονδροειδών σφαλμάτων. Τέτοιες διαδικασίες περιλαμβάνουν τον προσεκτικό έλεγχο όλων των σημάνσεων (στόχων), την επανάληψη των μετρήσεων, ή τον έλεγχο με απλές γεωμετρικές ή αλγεβρικές σχέσεις (π.χ. άθροισμα τριών γωνιών ενός τριγώνου ίσο με 200 βαθμούς). Παρόλο που τα χονδροειδή σφάλματα έχουν γενικά μεγάλη τιμή και είναι εύκολο να εντοπιστούν σε μια σειρά μετρήσεων, εντούτοις υπάρχουν και κάποια τα οποία δεν οφείλονται στα παραπάνω αλλά μπορούν να εντοπισθούν όταν εφαρμοστούν κατάλληλες στατιστικές μέθοδοι ανίχνευσής τους.

Τα *συστηματικά* σφάλματα ονομάζονται έτσι γιατί εμφανίζουν τάση επανάληψης εάν οι μετρήσεις για το ίδιο μέγεθος γίνονται κάθε φορά στις ίδιες συνθήκες. Ακολουθούν συνήθως κάποιο φυσικό νόμο και μπορούν να εκφραστούν και επομένως να υπολογιστούν με μαθηματικές σχέσεις. Το χαρακτηριστικό τους είναι ότι συνήθως εμφανίζουν σταθερότητα σε μέγεθος και πρόσημο για μια σειρά μετρήσεων ή περιοδικότητα και έχουν μικρό μέγεθος. Παραδείγματα τέτοιων σφαλμάτων είναι αυτά που προκύπτουν από την κακή οριζοντίωση ενός τοπογραφικού οργάνου (π.χ. του θεοδόλιχου) ή την επίδραση της ατμόσφαιρας στις μετρήσεις που χρησιμοποιούν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (π.χ. GPS). Επίσης, συστηματικά σφάλματα είναι δυνατό να προκληθούν λόγω της απλοποίησης των γεωμετρικών και μαθηματικών σχέσεων που περιγράφουν τις μετρήσεις (π.χ. χρήση επίπεδης γεωμετρίας αντί της σφαιρικής για τους υπολογισμούς τριγώνου που αποτελείται από τρεις γεωδαιτικές κορυφές που απέχουν μεταξύ τους δεκάδες χιλιόμετρα με αποτέλεσμα να προκύπτει η σφαιρική υπεροχή).

Τα *τυχαία* σφάλματα εμφανίζονται με μη συστηματικό χαρακτήρα και οι τιμές τους παρουσιάζουν μια διασπορά μεταξύ δύο ακραίων τιμών που όμως η κατανομή τους ακολουθεί συνήθως την κανονική κατανομή. Όμως παρόλο που κάθε τυχαίο σφάλμα ξεχωριστά έχει απρόβλεπτη συμπεριφορά, η συλλογική συμπεριφορά μεγάλου αριθμού τέτοιων σφαλμάτων μπορεί να περιγραφεί με τη χρήση πιθανοτήτων εμφάνισης των δυνατών τιμών τους (ενότητα 1.2.2).

Βάσει των παραπάνω, εάν «τ» συμβολίζει την αληθή τιμή ενός μεγέθους (π.χ. γωνία, απόσταση κλπ) και «x» είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης του ίδιου μεγέθους, τότε το αληθές σφάλμα στην μέτρηση x ορίζεται ως:  $\varepsilon = x - \tau$ .

Ανάλογα με το πόσο κοντά στην αληθή τιμή ενός μεγέθους είναι το εξαγόμενο μιας μέτρησης, τόσο η μέτρηση θεωρείται περισσότερο ή λιγότερο ορθή. Επομένως, εάν οι μετρήσεις ενός μεγέθους που πραγματοποιούνται με το ίδιο σύστημα έδιναν το ίδιο αποτέλεσμα, θα προέκυπτε η ακριβής τιμή «α» του μεγέθους. Η διαφορά « $u = x - \alpha$ » ορίζει το τυχαίο σφάλμα. Με τα τυχαία σφάλματα ασχολείται κυρίως η επιστήμη της Θεωρίας Σφαλμάτων.

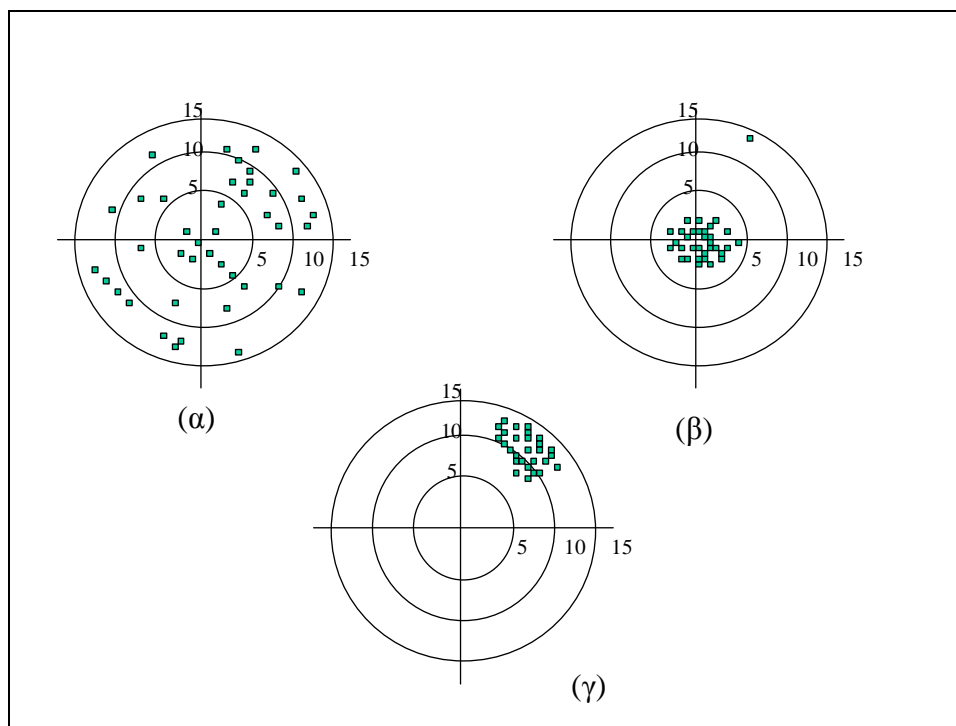
Για να υπολογισθεί η αληθής τιμή «τ» ενός μεγέθους, θα πρέπει να γίνει άπειρο πλήθος μετρήσεων (σύμφωνα με την μαθηματική θεωρία του Gauss). Όμως, επειδή δεν μπορούμε ποτέ να γνωρίζουμε ποια είναι η τιμή «τ», δεν θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε την ακριβή τιμή του «α». Εντούτοις, μπορεί με κάποιο τρόπο να προσδιοριστεί η καλύτερη εκτίμηση της τιμής «τ». Έτσι, αν « $\hat{x}$ » συμβολίζει την εκτίμηση του «τ», τότε η διαφορά μεταξύ του « $\hat{x}$ » και της μετρημένης τιμής «x» ορίζεται ως υπόλοιπο ή πιθανό σφάλμα «u», δηλαδή:  $u = \hat{x} - x$ .

Τα υπόλοιπα ή πιθανά σφάλματα θεωρείται ότι συμπεριφέρονται όπως τα τυχαία και όταν οι μετρήσεις είναι πολλές ακολουθούν την κανονική κατανομή (ενότητα 1.2.2). Το χαρακτηριστικό τους είναι ότι τα σφάλματα αυτά έχουν αλγεβρικό άθροισμα μηδέν (δηλαδή, σε μια σειρά παρατηρήσεων υπάρχει για κάθε θετικό σφάλμα το αντίστοιχο αρνητικό). Επίσης, τα σφάλματα αυτά κυμαίνονται μεταξύ δύο οριακών τιμών, το διάστημα των οποίων ονομάζεται *διασπορά*.

Μια εκτίμηση « $\hat{x}$ » της τιμής ενός μεγέθους δεν έχει καμία αξία αν δεν συνοδεύεται από κάποιο μέτρο της ακρίβειας της. Η *ακρίβεια* αναφέρεται στο πόσο πλησιάζουν μεταξύ τους επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου μεγέθους.

Η ακρίβεια επομένως είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερα είναι κυρίως τα τυχαία σφάλματα.

Ένα μέτρο της ακρίβειας είναι η *τυπική απόκλιση* «σ» (ενότητα 1.2.3). Όσο καλύτερη είναι η ακρίβεια τόσο πιο μικρή είναι η τυπική απόκλιση.



**Σχήμα 1.1** Σχηματική απεικόνιση ακρίβειας και ορθότητας

Επίσης, χρησιμοποιείται η έννοια της *ορθότητας* που σχετίζεται με το πόσο κοντά είναι οι επαναλαμβανόμενες μετρήσεις στην αληθινή τιμή. Η ορθότητα εξαρτάται κυρίως από το μέγεθος των συστηματικών σφαλμάτων. Ο συνδυασμός ορθότητας και ακρίβειας αναφέρεται συχνά ως *αξιοπιστία*.

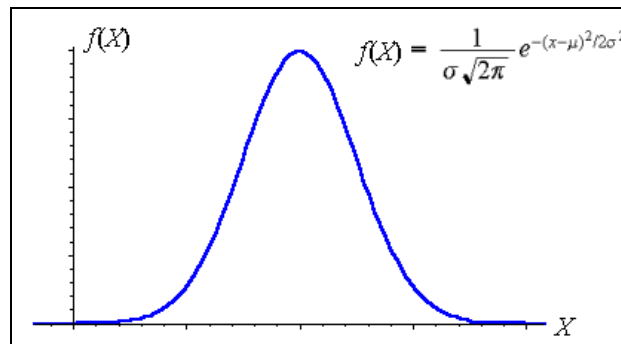
Το σχήμα 1.1(α) απεικονίζει μια σειρά παρατηρήσεων που έχουν μεγάλη διασπορά και επομένως οι μετρήσεις αυτές έχουν μικρή ακρίβεια (δηλαδή μικρή αξιοπιστία και άρα μεγάλη τυπική απόκλιση). Αντίθετα, στο σχήμα 1.1(β) οι παρατηρήσεις έχουν μικρή διασπορά και επομένως μεγάλη ακρίβεια (δηλαδή μικρή τυπική απόκλιση). Στο σχήμα 1.1(γ) οι παρατηρήσεις είναι ακριβείς αλλά έχουν ένα συστηματικό σφάλμα της τάξης των 10-15 μετρητικών μονάδων (έστω σε μέτρα). Επομένως οι παρατηρήσεις είναι ακριβείς χωρίς όμως να είναι ορθές.

### 1.2.2 Η κατανομή των σφαλμάτων

Η κατανομή των σφαλμάτων μιας μεγάλης σειράς μετρήσεων σε σχέση με την πιθανότερη τιμή των μετρήσεων αυτών (που την δεχόμαστε ως αληθινή τιμή) μπορεί να απεικονισθεί γραφικά με τη μορφή καμπυλών. Από πειραματικές και θεωρητικές μελέτες έχει προκύψει ότι όλες οι καμπύλες που παριστάνουν την κατανομή των τυχαίων σφαλμάτων, ακολουθούν ένα ενιαίο νόμο με ορισμένη μαθηματική συνάρτηση της μορφής:

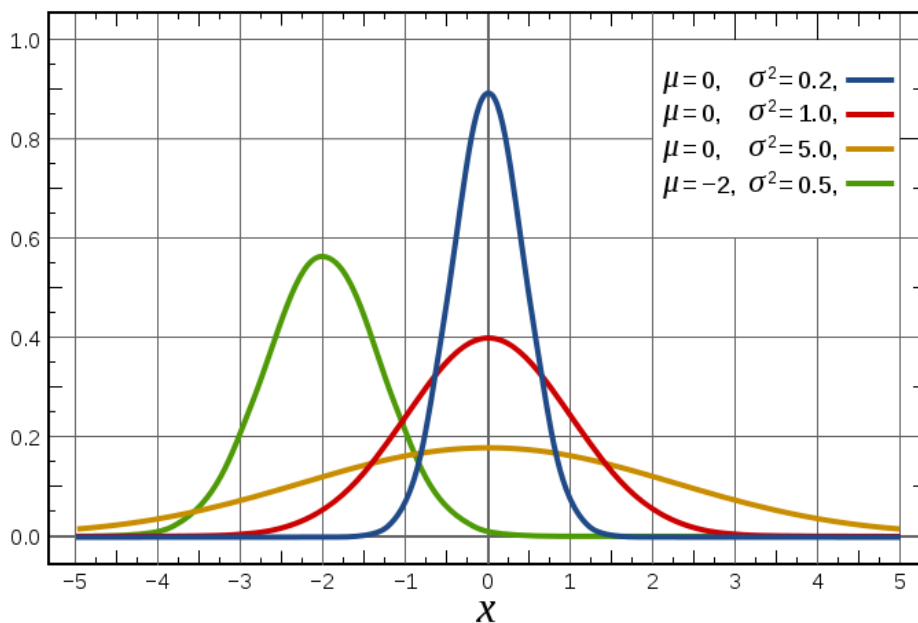
$$y = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (1.2)$$

Η σχέση (1.2) ονομάζεται *συνάρτηση πυκνότητας* και η καμπύλη που παριστάνει η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *καμπύλη κανονικής κατανομής Gauss*. Στη σχέση (1.2),  $\mu$  είναι η μέση τιμή (ή καλύτερη εκτίμηση μιας μεταβλητής  $x$ ) και  $\sigma$  είναι η τυπική απόκλιση της. Η συνάρτηση πυκνότητας της κανονικής κατανομής είναι συμμετρική σε σχέση με τη μέση τιμή  $\mu$ , και έχει τη μέγιστη τιμή της για την τιμή  $x=\mu$ , οπότε  $f(\mu) = 1/(\sigma \sqrt{2\pi})$  (σχήμα 1.2). Η τιμή  $f(\mu)$  είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερη είναι η μεταβλητότητα  $\sigma^2$ , ενώ αντίστοιχα αυξάνει η «συγκέντρωση» γύρω από τον άξονα  $x = \mu$ .



**Σχήμα 1.2** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας της κανονικής κατανομής

Στο σχήμα 1.3 φαίνεται η διαφορετική μορφή συναρτήσεων πυκνότητας με την ίδια τιμή  $\mu$ , αλλά διαφορετική μεταβλητότητα. Διακρίνεται ότι στη περίπτωση της καμπύλης  $\mu=0, \sigma^2 = 5.0$ , τα κατ' απόλυτη τιμή μεγάλα σφάλματα είναι λίγα (έχουν μικρή συχνότητα) ενώ τα κατ' απόλυτη τιμή μικρά σφάλματα είναι πολλά (έχουν μεγάλη συχνότητα). Το αντίθετο συμβαίνει στη περίπτωση της καμπύλης με  $\mu=0, \sigma^2 = 0.2$ . Στη περίπτωση της καμπύλης με  $\mu=-2, \sigma^2 = 0.5$ , υπάρχουν συστηματικά σφάλματα. Άρα, μεγάλη τιμή του  $\sigma$  σημαίνει μεγάλη συχνότητα εμφάνισης μικρών σφαλμάτων.



**Σχήμα 1.3** Διαφορετικές μορφές της συνάρτησης πυκνότητας της κανονικής κατανομής

Για να δηλωθεί ότι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή  $x$  ακολουθεί την *κανονική κατανομή* με  $\mu$  και  $\sigma^2$ , χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ . Για κάθε  $x$ , η

αντίστοιχη τιμή  $f(x)$  μπορεί να υπολογιστεί με αριθμητική ολοκλήρωση της σχέσης 1.2. Στην πράξη, υπολογίζονται πίνακες τιμών της  $f(x)$  για την λεγόμενη τυπική κανονική κατανομή που αντιστοιχεί σε τιμές  $\mu = 0$  και  $\sigma^2 = 1$ . Για να «τυποποιηθεί» η κανονική κατανομή  $x \sim N(\mu, \sigma^2)$  χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός  $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ , οπότε  $z \sim N(0, 1)$ .

Η πιθανότητα εμφάνισης να προκύψει τιμή του  $x$  σε ένα διάστημα  $a < x \leq b$  δίνεται από τη σχέση:

$$P(a < x \leq b) = F_z\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - F_z\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \quad (1.3)$$

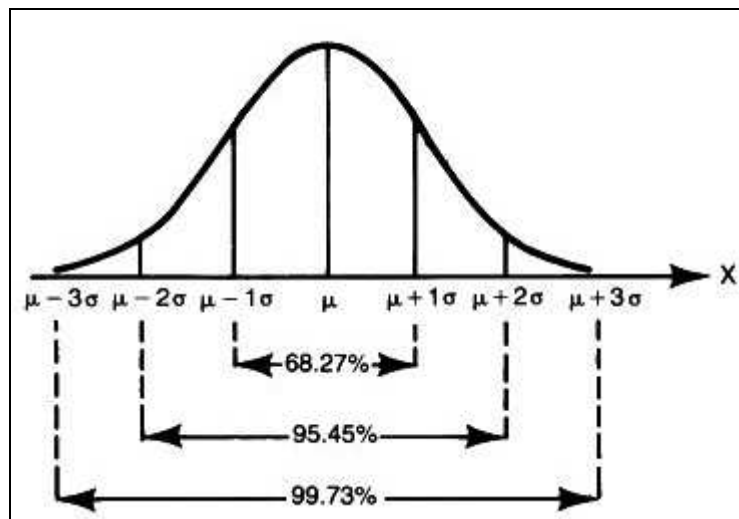
Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει ο υπολογισμός της πιθανότητας εμφάνισης ενός σφάλματος που περιέχεται στα διαστήματα που ορίζουν τα μέτρα των σφαλμάτων:

$$P(\mu - \sigma < x \leq \mu + \sigma) = F_z(1) - F_z(-1) = 0.6826$$

$$P(\mu - 2\sigma < x \leq \mu + 2\sigma) = F_z(2) - F_z(-2) = 0.9544$$

$$P(\mu - 3\sigma < x \leq \mu + 3\sigma) = F_z(3) - F_z(-3) = 0.9974$$

Έτσι, η πιθανότητα να προκύψει τιμή  $x$  σε απόσταση το πολύ  $\sigma$  από τη μέση τιμή  $\mu$  είναι 68.26%. Για απόσταση  $2\sigma$  η πιθανότητα γίνεται 95.44% και για  $3\sigma$  γίνεται 99.74%. Η πιθανότητα για απόσταση μεγαλύτερη από  $3\sigma$  είναι  $1 - 0.9974 = 0.0026$ , δηλαδή 0.26%. Τα παραπάνω αποτελέσματα παρουσιάζονται παραστατικά στο Σχήμα 1.4.



Σχήμα 1.4 Σχηματική παράσταση πιθανοτήτων για  $\sigma$ ,  $2\sigma$ ,  $3\sigma$

### 1.2.3 Μέτρα ακρίβειας

Το μέγεθος όλων των σφαλμάτων χαρακτηρίζει την *ακρίβεια* μιας μέτρησης και είναι τόσο μεγαλύτερη όσο μικρότερα είναι τα σφάλματα. Η ακρίβεια διακρίνεται σε *εσωτερική* και *εξωτερική*. Η εσωτερική ακρίβεια εξαρτάται από το μέγεθος των τυχαίων σφαλμάτων και αναφέρεται στο πόσο πλησιάζουν μεταξύ τους επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου μεγέθους. Η εξωτερική ακρίβεια εξαρτάται κυρίως από το μέγεθος των συστηματικών σφαλμάτων και αναφέρεται

στο πόσο πλησιάζουν στην αληθινή τιμή επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου μεγέθους.

Στην πράξη, η καλύτερη τιμή πλησιάζει την ακριβή τιμή ενός μεγέθους όσο το πλήθος των μετρήσεων πλησιάζει το άπειρο και δίνεται από τον *αριθμητικό μέσο* (ή μέσο όρο) δηλαδή:

$$\hat{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x} \quad (1.4)$$

Η ακρίβεια της καλύτερης τιμής ενός μεγέθους ή των εξαγόμενων μιας σειράς μετρήσεων περιγράφονται από κάποια μέτρα ακρίβειας που δηλώνουν την αβεβαιότητα (δίνεται ως  $\pm$ ). Όλα αυτά τα μέτρα ακρίβειας έχουν καθορισθεί αυθαίρετα από τα αληθή σφάλματα «ε» μιας σειράς παρατηρήσεων ενός μεγέθους.

Τα πιο συνηθισμένα είναι το μέσο τετραγωνικό ή τυπικό σφάλμα της μιας μέτρησης και το σχετικό ή αναλογικό σφάλμα.

(α) Το *μέσο τετραγωνικό σφάλμα* (γνωστό ως RMS, Root Mean Square error) εκφράζει την ακρίβεια κάθε μιας μέτρησης από μια σειρά «n» μετρήσεων, ενώ η ακρίβεια είναι μεγαλύτερη όσο μικρότερο είναι το σφάλμα αυτό. Δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.5)$$

Η διαφορά  $(x_i - \bar{x})$  συνήθως συμβολίζεται με  $v$  (δηλ. τυχαίο  $x_i$  – αριθμητικό μέσο του μεγέθους).

Το *μέσο τετραγωνικό ή τυπικό σφάλμα* της πιθανότερης τιμής « $\hat{x}$ » δίνεται από τη σχέση

$$\sigma_{\hat{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[vu]}{n(n-1)}} \quad (1.6)$$

Ο συμβολισμός  $[vu] = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \dots + v_n^2$  σημαίνει άθροισμα των τετραγώνων των επιμέρους σφαλμάτων και έχει προέλθει από τον Gauss.

(β) Το *σχετικό ή αναλογικό σφάλμα* εκφράζει το λόγο του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των μετρήσεων ενός μεγέθους (συνήθως μήκους) προς την τιμή του μεγέθους.

Τα σφάλματα των γραμμικών μεγεθών “ $\sigma_D$ ” εκφράζονται συχνά σαν αναλογικά σφάλματα είτε με την μορφή του λόγου είτε σε p.p.m. (parts per million):

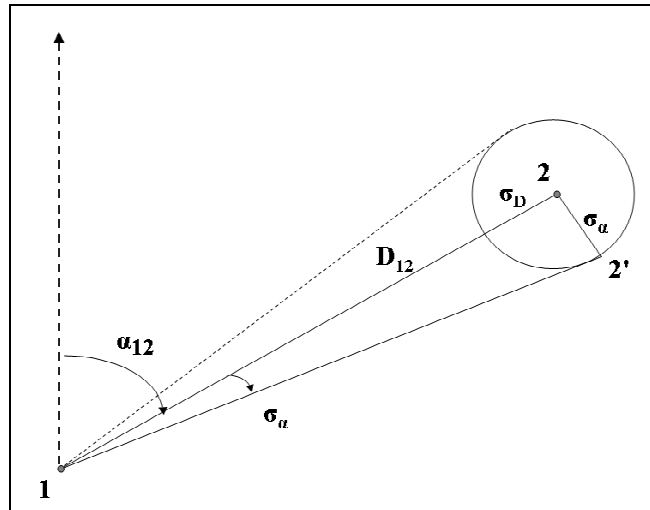
$$\frac{\sigma_D}{D} = \frac{1}{K}$$

$$\text{όπου } K = \frac{D}{\sigma_D} \text{ ή}$$

$$\sigma_D^{\text{ppm}} = \frac{\sigma_D}{D} 10^6$$

όπου  $\sigma_D$  (σε m) = σφάλμα στο μήκος D (σε m)

Τα γωνιακά σφάλματα δεν εκφράζονται αναλογικά επειδή είναι ανεξάρτητα από τα μεγέθη των γωνιών. Μπορεί όμως να εκφραστεί το γωνιακό σφάλμα μιας διεύθυνσης, έστω της 1-2, σε rad, το οποίο δηλώνει το αναλογικό γραμμικό σφάλμα σε διεύθυνση κάθετη προς την διεύθυνση 1-2, όπως φαίνεται στο σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5 Γωνιακό σφάλμα διεύθυνσης

Έτσι, τα γωνιακά σφάλματα " $\sigma_\gamma^{\text{rad}}$ " εκφράζονται είτε σε ppm (parts per million)

δηλαδή  $\sigma_\gamma^{\text{rad}} \times 10^6$ , είτε με τον λόγο  $\frac{1}{K}$  όπου  $K = \frac{1}{\sigma_\gamma^{\text{rad}}}$ .

Για να γίνει κατανοητό το αναλογικό σφάλμα και πως εκφράζονται τα σφάλματα της απόστασης και της γωνίας σε μορφή 1/K και σε ppm, έστω ότι μετρήθηκε η απόσταση  $S_{ij}$  ίση με 8000m με σφάλμα 0.05m και η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{ij}$  με σφάλμα 5cc.

Τότε, το αναλογικό σφάλμα της απόστασης είναι  $\frac{0.05}{8000} = \frac{1}{160000}$  και το

αντίστοιχο σφάλμα σε ppm είναι  $\frac{1}{160000} \times 10^6 = 6.25 \text{ ppm}$ , που σημαίνει ότι στα  $10^6 \text{ m}$  το σφάλμα είναι 6.25 m (ή 6.25mm στο 1km).

Το γωνιακό σφάλμα εκφρασμένο σε rad δίνει το λόγο της γραμμικής μετατόπισης 2-2' του σημείου 2 σε διεύθυνση κάθετη στην 1-2 προς την απόσταση  $D_{12}$ . Προκύπτει ότι

$$\sigma_\alpha^{\text{rad}} = \frac{5}{\rho^{\text{cc}}} = \frac{5}{636620} = \frac{2-2'}{D_{12}}$$

που σημαίνει πως το σφάλμα των 5cc στα 8000m αντιστοιχεί σε μετατόπιση 2-2' = 0.06m.

Το αντίστοιχο σφάλμα σε ppm είναι  
 $\sigma_{\alpha}^{\text{rad}} \times 10^6 = \frac{5}{636620} \times 10^6 = 7.85 \approx 8 \text{ ppm}$ , που σημαίνει γραμμικό σφάλμα  
 8m στα  $10^6\text{m}$ .

Το γραμμικό και γωνιακό σφάλμα δίνουν ουσιαστικά την ακρίβεια προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου από σημείο γνωστής θέσης όταν έχουν μετρηθεί η οριζόντια διεύθυνση και η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων. Το γωνιακό σφάλμα δίνει την μετατόπιση στην κάθετη προς την πλευρά διεύθυνση και το γραμμικό σφάλμα δίνει την οριζόντια μετατόπιση που αναφέρεται στην διεύθυνση της πλευράς. Από το σχήμα 1.5 φαίνεται ότι το γωνιακό σφάλμα είναι

$\tan \sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_{\alpha}}{D_{12}}$ . Επειδή θεωρείται ότι η μετατόπιση είναι πολύ μικρή συγκριτικά με την μετρημένη πλευρά, τότε:

$$\sigma_{\alpha}^{\text{rad}} = \arctan \left( \frac{\sigma_{\alpha}}{D_{12}} \right) \cong \frac{\sigma_{\alpha}}{D_{12}} \quad \text{ή}$$

$$\sigma_{\alpha}^{\text{cc}} = \frac{\sigma_{\alpha}}{D_{12}} \times \frac{200}{\pi} 10000$$

Επομένως, η κάθετη μετατόπιση θα είναι:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\alpha}^{\text{rad}} \times D_{12} \quad \text{ή}$$

$$\sigma_{\alpha}^{\text{mm}} = \sigma_{\alpha}^{\text{cc}} \times D_{12} \times \frac{\pi}{2 \times 10^6}$$

#### 1.2.4 Ισοβαρείς παρατηρήσεις

Για ένα μέγεθος «x» έστω ότι υπάρχουν τιμές  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  που αντιπροσωπεύουν τα εξαγόμενα μετρήσεων του μεγέθους οι οποίες πραγματοποιήθηκαν κάτω από τις ίδιες συνθήκες και με τον ίδιο παρατηρητή και το ίδιο όργανο. Να σημειωθεί ότι τα εξαγόμενα των μετρήσεων μπορεί να αντιπροσωπεύουν τους μέσους όρους αντίστοιχων σειρών μετρήσεων. Οι τιμές  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  θεωρούνται ότι έχουν την ίδια ακρίβεια και οι παρατηρήσεις ονομάζονται *ισοβαρείς*.

Η καλύτερη (πιθανότερη) τιμή του μεγέθους από μια σειρά «n» ισοβαρών παρατηρήσεων είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{x} = \frac{l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_n}{n} = \bar{x} \quad (1.7)$$

Το τυπικό σφάλμα των μετρήσεων (ή τυπική απόκλιση) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \quad \text{όπου } v = \hat{x} - l_i \quad (1.8)$$

Το τυπικό σφάλμα της καλύτερης (ή μέσης τιμής) υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\sigma_{\hat{x}} = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} \quad (1.9)$$



Η τιμή του τυπικού σφάλματος (ή μέσου τετραγωνικού σφάλματος) χρησιμοποιείται ως ένα μέτρο που χαρακτηρίζει την ακρίβεια μιας σειράς μετρήσεων και επομένως σαν ένα στοιχείο που επιτρέπει την σύγκριση ανάμεσα στις ακρίβειες δύο διαφορετικών σειρών μετρήσεων. Μπορεί να χρησιμοποιείται δηλαδή ως κριτήριο για την ποιοτική σύγκριση ανάμεσα στα αποτελέσματα δύο ανεξάρτητων σειρών μετρήσεων του ίδιου μεγέθους.

Έστω για παράδειγμα, δύο σειρές μετρήσεων του ίδιου μεγέθους που περιλαμβάνουν από 10 παρατηρήσεις η κάθε μία, με τις ακόλουθες τιμές των υπολοίπων:

Σειρά 1: -7, +6, +3, -5, -6, +2, +6, -6, +9, -2

Σειρά 2: +6, -3, +9, +10, -20, 0, +1, -1, 0, -2

Αν συγκρίνουμε τις δύο αυτές σειρές μετρήσεων βασιζόμενοι μόνο στις τιμές των μέσων αριθμητικών σφαλμάτων, θα έπρεπε να συμπεράνουμε ότι είναι της ίδιας ακρίβειας. Όμως, η διασπορά της 1<sup>ης</sup> σειράς (από -7 ως +9) είναι μικρότερη από την διασπορά της 2<sup>ης</sup> σειράς (από -20 ως +10) μετρήσεων. Συμπεραίνουμε, επομένως, από τον υπολογισμό των μέσων τετραγωνικών σφαλμάτων ότι η 1<sup>η</sup> σειρά έχει μεγαλύτερη ακρίβεια ( $\sigma = \pm 5.9$ ) από την 2<sup>η</sup> σειρά μετρήσεων ( $\sigma = \pm 8.4$ ).

### 1.2.5 Ανισοβαρείς παρατηρήσεις

Για ένα μέγεθος «x» έστω ότι υπάρχουν τιμές  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  που αντιπροσωπεύουν τα εξαγόμενα αντίστοιχων σειρών μετρήσεων του μεγέθους. Οι μετρήσεις αυτές έχουν πραγματοποιηθεί με διαφορετικές συνθήκες, διαφορετικό παρατηρητή ή όργανο. Να σημειωθεί ότι τα εξαγόμενα των μετρήσεων μπορεί να αντιπροσωπεύουν τους μέσους όρους αντίστοιχων σειρών μετρήσεων. Οι τιμές  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  θεωρούνται ότι δεν έχουν την ίδια ακρίβεια και οι παρατηρήσεις ονομάζονται *ανισοβαρείς*.

Τα αίτια που προκαλούν παρατηρήσεις άνισης ακρίβειας είναι ο παρατηρητής, το όργανο, οι συνθήκες μέτρησης και το πλήθος των παρατηρήσεων. Για να υπολογιστεί η καλύτερη τιμή μιας σειράς τέτοιων παρατηρήσεων ενός μεγέθους, θα πρέπει να αντιστοιχίσουμε μεγαλύτερα σφάλματα σε μετρήσεις μικρότερης ακρίβειας και αντίστροφα, μικρότερα σφάλματα σε μετρήσεις μεγαλύτερης ακρίβειας.

Ο βαθμός εμπιστοσύνης κάθε μίας σειράς μετρήσεων εκφράζεται με την έννοια του βάρους. Το *βάρος*  $p$  μια σειράς μέτρησης είναι ανάλογο του πλήθους των μετρήσεων που αποτελεί τη σειρά αυτή και ορίζεται ως το αντίστροφο του τετραγώνου του τυπικού σφάλματος της καλύτερης (ή μέσης) τιμής  $\sigma_{\hat{x}}$ , πολλαπλασιαζόμενο επί την μεταβλητότητα της μονάδας βάρους  $\sigma_0^2$ ,

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_{\hat{x}_i}^2} \quad (1.10)$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει για τα βάρη  $p_1, p_2, \dots, p_n$  ότι,

$$p_1 \cdot \sigma_{\hat{x}_1}^2 = p_2 \cdot \sigma_{\hat{x}_2}^2 = p_3 \cdot \sigma_{\hat{x}_3}^2 = \dots = p_n \cdot \sigma_{\hat{x}_n}^2 = \sigma_0^2 \quad (1.11)$$

Μονάδα βάρους είναι η παρατήρηση (πραγματική ή φανταστική) που έχει βάρος  $p = 1$ . Η μεταβλητότητα της μονάδας βάρους συμβολίζεται με  $\sigma_0^2$ .

Όσο μεγαλύτερο είναι το βάρος μιας παρατήρησης ή μιας σειράς παρατηρήσεων ενός μεγέθους, τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια έχει η τιμή αυτή.

Όταν γνωρίζουμε τα τυπικά σφάλματα των  $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$  τότε το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής είναι :

$$\sigma_{\hat{x}_1} = \pm \frac{\sigma_0}{\sqrt{\sum p_i}} \quad (1.12)$$

Δηλαδή, η σχέση (1.12) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μιας μέτρησης, όταν είναι γνωστό το βάρος της και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της μονάδας βάρους.

Από τα παραπάνω, καταλαβαίνουμε ότι για να ορίσουμε τα βάρη ανισοβαρών μετρήσεων, πρέπει να γνωρίζουμε ή από πόσες αρχικές ισοβαρείς παρατηρήσεις προέρχεται κάθε μέτρηση (όταν το τυπικό ή μέσο τετραγωνικό σφάλμα είναι το ίδιο για όλες τις σειρές) ή τα αντίστοιχα μέσα τετραγωνικά σφάλματα αυτών.

Έστω ότι για ένα ζητούμενο μέγεθος « $l$ » έχουμε τις μετρήσεις  $l_1, l_2, \dots, l_n$  με αντίστοιχα βάρη  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Η καλύτερη τιμή « $\bar{x}$ » των μετρήσεων δίνεται από τη σχέση

$$\bar{x} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} \quad (1.13)$$

Η τιμή « $\bar{x}$ » ονομάζεται γενικός αριθμητικός μέσος ή γενικευμένος μέσος όρος των ανισοβαρών μετρήσεων  $l_1, l_2, \dots, l_n$ . Το άθροισμα των βαρών  $[p] = p_1 + p_2 + \dots + p_n$  είναι το βάρος του γενικού αριθμητικού μέσου.

Κατ' αναλογία με τη σχέση (1.9), το τυπικό (ή μέσο) σφάλμα του γενικευμένου μέσου όρου είναι:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \pm \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{[p]}} = \pm \sqrt{\frac{[p \text{ uv}]}{[p] (n-1)}} \quad (1.14)$$

Το τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους « $\hat{\sigma}_0$ » υπολογίζεται από τη σχέση

$$\hat{\sigma}_0 = \pm \sqrt{\frac{[p \text{ uv}]}{n-1}} \quad \text{όπου } v = \bar{x} - x_i \quad (1.15)$$

Από τις σχέσεις (1.10), (1.11) και (1.13) φαίνεται ότι η τιμή του γενικευμένου μέσου όρου είναι ανεξάρτητη από το τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους, αλλά χρειάζεται μόνο μια εκτίμηση του λόγου των τυπικών σφαλμάτων των μετρήσεων, δηλαδή ισχύει η σχέση

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sigma_{\hat{x}_2}^2}{\sigma_{\hat{x}_1}^2} \quad (1.16)$$

κάτι που μας επιτρέπει πρακτικά να ορίζουμε αυθαίρετα το σφάλμα αυτό. Συχνά λαμβάνουμε  $\sigma_0 = 1$ , οπότε σύμφωνα με τη σχέση (1.10) έχουμε:

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (1.17)$$

Επομένως, μπορούμε να θεωρήσουμε ως βάρη τα αντίστροφα των τετραγώνων των τυπικών σφαλμάτων για τον υπολογισμό του γενικευμένου μέσου όρου ανισοβαρών παρατηρήσεων, των οποίων γνωρίζουμε τα τυπικά σφάλματα.

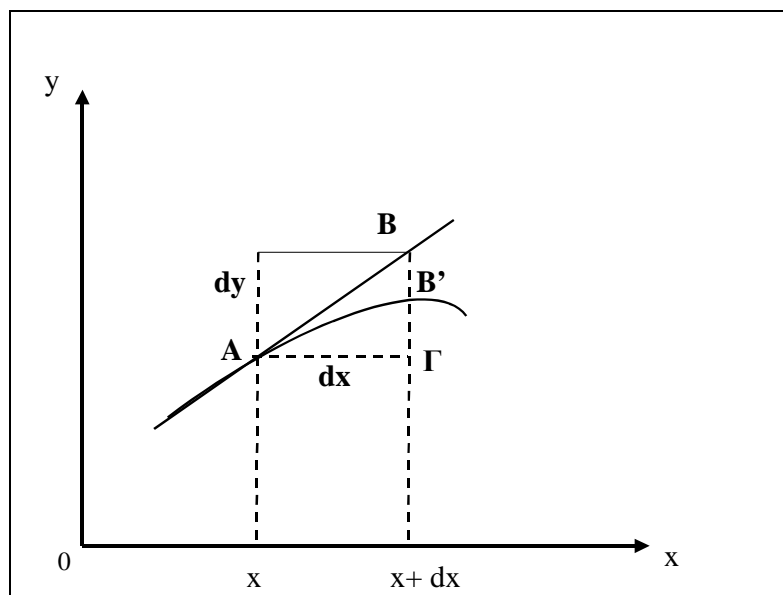
### 1.2.6 Νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων

Έστω μια ποσότητα  $y$ , η οποία προσδιορίζεται από την ποσότητα  $x$  με χρήση της συνάρτησης  $y = f(x)$ .

Το διαφορικό της παραπάνω συνάρτησης είναι:

$$dy = f'(x) dx \quad (1.18)$$

Η παράγωγος  $f'(x)$  της συνάρτησης  $f(x)$  αντιπροσωπεύει την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο που έχει τεταγμένη  $x$ , με τον άξονα των  $x$ . Η ποσότητα  $dy$  είναι η μεταβολή της τεταγμένης της εφαπτομένης της καμπύλης, όταν η τεταγμένη μεταβάλλεται από την τιμή  $x$  ως την τιμή  $x + dx$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.6. Για το ίδιο διάστημα  $dx$ , η μεταβολή της τεταγμένης της καμπύλης εκφράζεται από το τμήμα  $\Gamma B'$ .



Σχήμα 1.6 Σχηματική παράσταση της εξίσωσης (1.16)

Επομένως, όταν η ποσότητα  $x$  προσδιορίζεται από μετρήσεις με ένα σφάλμα  $dx$ , τότε αυτό εισάγει ένα σφάλμα στον υπολογισμό της ποσότητας  $y$ , το οποίο προσδιορίζεται πρακτικά από τη σχέση (1.20).

Προκύπτει από τα παραπάνω μία μέθοδος, με την οποία μπορούμε να βρούμε το σφάλμα μιας μεταβλητής  $y$ , η οποία προκύπτει έμμεσα από μετρήσεις που γίνονται για την μεταβλητή  $x$ . Στην γενική της μορφή, έστω ότι μια ποσότητα  $F$  που υπολογίζεται από τη συνάρτηση:

$$F = f(x, y, z) \quad (1.19)$$

τα  $x, y, z$  προσδιορίζονται με άμεσες μετρήσεις. Αν ονομάσουμε  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  τα σφάλματα που γίνονται στον προσδιορισμό των  $x, y, z$ , τότε η αληθινή τιμή της ποσότητας  $F$  θα είναι:

$$F - \Delta F = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \quad (1.20)$$

Η διόρθωση της ποσότητας  $F$  θα είναι:

$$\Delta F = f(x, y, z) - f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \quad (1.21)$$

Θεωρώντας ότι τα σφάλματα  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  είναι πολύ μικρά, μπορούμε να αγνοήσουμε τα τετράγωνα τους, τα γινόμενα ανά δύο και τους όρους μεγαλύτερης της 2<sup>ης</sup> τάξης. Έτσι, το σφάλμα  $\Delta F$  της ποσότητας  $F$  είναι γραμμική συνάρτηση των σφαλμάτων των μετρήσεων και κάθε ένα από αυτά ενεργεί ανεξάρτητα από τα άλλα (η παραδοχή αυτή είναι γνωστή ως αρχή της ανεξαρτησίας των σφαλμάτων).

Θεωρώντας τα παραπάνω, το ανάπτυγμα κατά Taylor της σχέσης (1.21) δίνει:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \Delta z \quad (1.22)$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ότι για να προσδιορίσουμε το σφάλμα  $\Delta F$  αρκεί να πάρουμε το ολικό διαφορικό της και να αντικαταστήσουμε τις μεταβολές των μεταβλητών με τα αντίστοιχα σφάλματα.

Αποδεικνύεται ότι το τυπικό σφάλμα της  $y = F(x, y, z)$  είναι:

$$\sigma_F^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 \quad (1.23)$$

Η σχέση (1.23) δίνει την αναλυτική έκφραση του σφάλματος μιας ποσότητας, η οποία προσδιορίζεται με έμμεσες μετρήσεις και εκφράζει τον νόμο που μεταδίδονται τα σφάλματα (γνωστός ως νόμος μετάδοσης των σφαλμάτων).

Μια από τις σημαντικές πρακτικές εφαρμογές του νόμου στην τοπογραφία είναι ο υπολογισμός του μέσου σφάλματος του αθροίσματος. Έστω ότι η ποσότητα  $F$  προσδιορίζεται από τις ποσότητες  $x, y, z$  που μετρήθηκαν άμεσα με αντίστοιχα τετραγωνικά σφάλματα  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , δια μέσου της συνάρτησης

$$F = \alpha x + \beta y + \gamma z \quad (1.24)$$

όπου τα  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι σταθεροί γνωστοί αριθμοί.

Για να βρεθεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα  $\sigma_F$  της ποσότητας  $F$  στην (1.24), εφαρμόζουμε τη σχέση (1.23):

$$\sigma_F = \pm \sqrt{\alpha^2 \sigma_x^2 + \beta^2 \sigma_y^2 + \gamma^2 \sigma_z^2} \quad (1.25)$$

Στην περίπτωση που είναι  $\alpha = \beta = \gamma = 1$  και  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$ , τότε είναι:

$$\sigma_F = \pm \sigma \sqrt{3} \quad (1.26)$$

Εάν, για παράδειγμα, θέλουμε να προσδιορίσουμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μιας απόστασης 100m που έχει μετρηθεί με μετροταινία ονομαστικού μήκους 10m, γνωρίζοντας ότι το μέσο τετραγωνικό σφάλμα σε καθένα από τα 10 τμήματα είναι 1.5cm, θα εφαρμόσουμε τη σχέση (1.25), δηλαδή:

$$\sigma = \pm 1.5 \sqrt{10} \approx \pm 5 \text{cm}$$

Επομένως, το απόλυτο σφάλμα είναι 5cm και το σχετικό σφάλμα είναι  $0.05/100 = 1/2000$  της απόστασης.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Μία απόσταση μετρήθηκε 10 φορές , με τις τιμές να δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Μέτρηση(m)	750.11	750.12	750.09	750.10	750.11	750.12	750.12	750.13	750.12	750.11
------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

Θεωρώντας ότι όλες οι μετρήσεις έχουν γίνει με το ίδιο όργανο-παρατηρητή-συνθήκες και είναι απαλλαγμένες από χονδροειδή σφάλματα και έχουν διορθωθεί για συστηματικά σφάλματα, να υπολογισθούν: α) η καλύτερη τιμή της απόστασης και β) το τυπικό σφάλμα της.

Τιμή (m)	$(x - \bar{x})$ (cm)	$(x - \bar{x})^2$ (cm <sup>2</sup> )
750.11	-0.3	0.09
750.12	+0.7	0.49
750.09	-2.3	5.29
750.10	-1.3	1.69
750.11	-0.3	0.09
750.12	+0.7	0.49
750.12	+0.7	0.49
750.13	+1.7	2.89
750.12	+0.7	0.49
750.11	-0.3	0.09
$\Sigma = 7501.13$	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 12.1$

Καλύτερη τιμή  $\hat{x} = 750.113 \text{m}$

$$\text{Τυπικό (ή μέσο τετραγωνικό) σφάλμα } \sigma = \pm \sqrt{\frac{\Sigma (x - \hat{x})^2}{n - 1}} = \pm \sqrt{\frac{12.1}{9}} = \pm 1.15 \text{cm}$$

$$\text{Σφάλμα της καλύτερης τιμής } \sigma_{\hat{x}} = \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \pm \frac{1.15}{\sqrt{10}} = \pm 0.36 \text{cm}$$

- Οι παρακάτω τιμές μετρήθηκαν για την ίδια γωνία. Θεωρούμε ότι οι μετρήσεις έχουν γίνει με διαφορετικό παρατηρητή, όργανο και συνθήκες:

73° 40' 12"	βάρος 2
73° 40' 15"	βάρος 3
73° 40' 09"	βάρος 1
73° 40' 14"	βάρος 4
73° 40' 10"	βάρος 1
73° 40' 18"	βάρος 1
73° 40' 16"	βάρος 2
73° 40' 13"	βάρος 3

Να υπολογισθούν (α) η καλύτερη τιμή της γωνίας (β) το τυπικό της σφάλμα της μονάδας βάρους (γ) το τυπικό σφάλμα της μίας παρατήρησης με βάρος 3 (δ) το τυπικό σφάλμα του γενικευμένου μέσου όρου.

Τιμή	x (")	Βάρος p	p x	(x - $\bar{x}$ ) (")	p(x - $\bar{x}$ ) <sup>2</sup>
73° 40' 12"	12	2	24	-1.7"	5.78
73° 40' 15"	15	3	45	+1.3"	5.07
73° 40' 09"	9	1	9	-4.7"	22.09
73° 40' 14"	14	4	56	+0.3"	0.36
73° 40' 10"	10	1	10	-3.7"	13.69
73° 40' 18"	18	1	18	+4.3"	18.49
73° 40' 16"	16	2	32	+2.3"	10.58
73° 40' 13"	13	3	39	-0.7"	1.47
		Σp = 17	233		77.53

Επομένως η καλύτερη τιμή (γενικευμένος μέσος όρος) της γωνίας είναι:  
 $\bar{x} = 73^\circ 40' + \frac{\sum p_i x_i}{\sum p_i} = 73^\circ 40' + \frac{233}{17} = 73^\circ 40' 13.7''$ .

Το τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους είναι:

$$\hat{\sigma}_0 = \pm \sqrt{\frac{\sum p_i (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \pm \sqrt{\frac{77.53}{8 - 1}} = \pm 3.33''$$

Το τυπικό σφάλμα της μίας παρατήρησης με βάρος 3 υπολογίζεται ως εξής:

$$\text{Γνωρίζουμε ότι } p_1 \cdot \sigma_1^2 = p_2 \cdot \sigma_2^2 = \dots = p_n \cdot \sigma_n^2 = \sigma_0^2$$

$$\text{Εάν } p_3 = 3, \text{ τότε } 3\sigma_3^2 = \sigma_0^2 = 3.33^2$$

$$\text{Επομένως } \sigma_3 = \pm \frac{3.33}{\sqrt{3}} = \pm 1.92''$$

Το τυπικό σφάλμα του γενικευμένου μέσου όρου είναι:

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \pm \sqrt{\frac{\sum [p_i (x_i - \bar{x})^2]}{(n - 1) \sum p_i}} = \pm \sqrt{\frac{77.53}{(8 - 1) 17}} = \pm 0.81''$$

Επίσης, μπορεί να υπολογισθεί και ως εξής:

$$\text{Επειδή } p_n \sigma_n^2 = \sigma_0^2$$

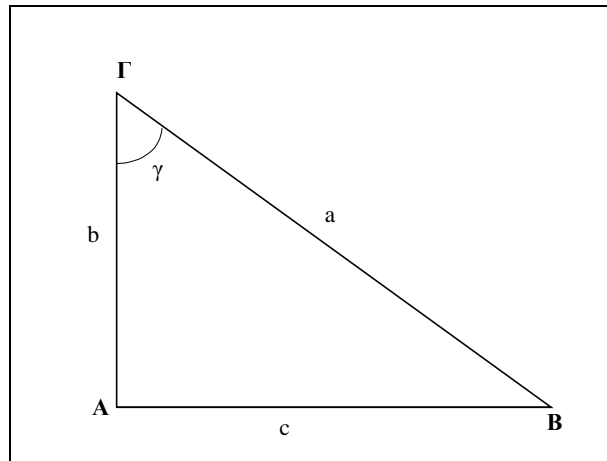
$$\sigma_n = \frac{\sigma_0}{\sqrt{p_n}} = \pm \frac{3.33}{\sqrt{17}} = \pm 0.81''$$

• Στο ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος μετρήθηκαν η γωνία γ και η πλευρά b με τα αντίστοιχα σφάλματά τους:

$$\gamma = 28.155\text{grad}, \sigma_\gamma = \pm 15\text{cc}$$

$$b = 55.30\text{m}, \sigma_b = \pm 2\text{cm}$$

Ζητείται να υπολογιστεί η υποτεινούσα  $a$  και το σφάλμα της  $\sigma_a$ .



*Λύση:*

Η υποτεινούσα  $a$  είναι ίση με:  $a = \frac{b}{\cos \gamma} = 61.19 \text{ m}$

Το σφάλμα της υποτεινούσας είναι:

$$\sigma_a = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\cos \gamma}\right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{b \sin \gamma}{\cos^2 \gamma}\right)^2 \frac{\sigma_\gamma^2}{\rho^2}} \quad \text{όπου } \rho = \frac{200^{\text{grad}}}{\pi}$$

$$= \pm a \sqrt{\left(\frac{\sigma_b}{b}\right)^2 + \tan^2 \gamma \left(\frac{\sigma_\gamma}{\rho^{\text{cc}}}\right)^2} \quad \text{όπου } \rho^{\text{cc}} = 636620$$

$$\approx \pm 2 \text{ cm}$$

- Οι συντεταγμένες δύο τριγωνομετρικών σημείων A και B δίνονται παρακάτω με τα αντίστοιχα τυπικά τους σφάλματα:

$$(x_A, y_A = 456.961\text{m} \pm 20\text{mm}, 573.237\text{m} \pm 30\text{mm})$$

$$(x_B, y_B = 724.616\text{m} \pm 40\text{mm}, 702.443\text{m} \pm 50\text{mm})$$

Να υπολογιστεί το μήκος της απόστασης AB και το σφάλμα της.

Επίσης, πραγματοποιήθηκαν ανεξάρτητες μετρήσεις χρησιμοποιώντας μετροταινία και ηλεκτρονικό όργανο μέτρησης αποστάσεων (EDM) για τον υπολογισμό του μήκους AB με τιμές  $297.426\text{m} \pm 70\text{mm}$  και  $297.155\text{m} \pm 15\text{mm}$ , αντίστοιχα. Να υπολογισθεί η καλύτερη τιμή της απόστασης AB χρησιμοποιώντας όλες τις μετρήσεις καθώς και το τυπικό σφάλμα της καλύτερης τιμής της απόστασης. Θεωρούμε ότι όλες οι μετρήσεις είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

*Λύση:*

Η απόσταση AB υπολογίζεται βάσει των γνωστών συντεταγμένων ως εξής

$$S_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{267.655^2 + 129.206^2} = 297.209 \text{ m}$$

Τα τυπικά σφάλματα  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  υπολογίζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$\sigma_x = \pm \sqrt{\sigma_{x_A}^2 + \sigma_{x_B}^2} = \sqrt{40^2 + 20^2} = \pm 44.7 \text{ mm}$$

$$\sigma_y = \pm \sqrt{\sigma_{y_A}^2 + \sigma_{y_B}^2} = \sqrt{50^2 + 50^2} = \pm 58.3 \text{ mm}$$

Το τυπικό σφάλμα της απόστασης που υπολογίστηκε βάσει της σχέσης

$$S_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad \text{και έστω } x_B - x_A = x, \quad y_B - y_A = y$$

$$\text{τότε } S_{AB} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_{AB}^2 = \left( \frac{\partial S_{AB}}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial S_{AB}}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2$$

όπου

$$\left( \frac{\partial S_{AB}}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2x(x^2 + y^2)^{-1/2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{S_{AB}}$$

$$\left( \frac{\partial S_{AB}}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2y(x^2 + y^2)^{-1/2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{S_{AB}}$$

επομένως

$$\sigma_{AB}^2 = \left( \frac{267.655}{297.209} \right)^2 44.7^2 + \left( \frac{129.206}{297.209} \right)^2 58.3^2 = 1622 + 642 = 2264 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{AB} = \pm 47.58 \text{ mm}$$

Η καλύτερη τιμή της απόστασης AB θα υπολογισθεί από τις τρεις τιμές που έχουν προκύψει με τις τρεις διαφορετικές μεθόδους μέτρησης δηλαδή,

(α) με μετροταινία  $297.426\text{m} \pm 70\text{mm}$

(β) με EDM  $297.155\text{m} \pm 15\text{mm}$

(γ) με υπολογισμό από συν/νες  $297.209\text{m} \pm 47.6\text{mm}$

Προφανώς οι παραπάνω παρατηρήσεις θεωρούνται ανισοβαρείς και πρέπει να υπολογίσουμε το βάρος της κάθε μίας βάσει του τυπικού σφάλματος της κάθε παρατήρησης. Το βάρος προκύπτει ως το αντίστροφο του τετραγώνου του τυπικού σφάλματος της κάθε παρατήρησης, δηλαδή

Μέτρηση	$l$ (m)	$p$ ( $\text{mm}^{-2}$ )
1	297.426	1/4900
2	297.155	1/225
3	297.209	1/2264

Επομένως, η καλύτερη τιμή (γενικευμένος μέσος όρος) είναι



$$\bar{x} = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3}{p_1 + p_2 + p_3} = \frac{\frac{297.426}{4900} + \frac{297.155}{225} + \frac{297.209}{2264}}{\frac{1}{4900} + \frac{1}{225} + \frac{1}{2264}} = 297.171 \text{ m}$$

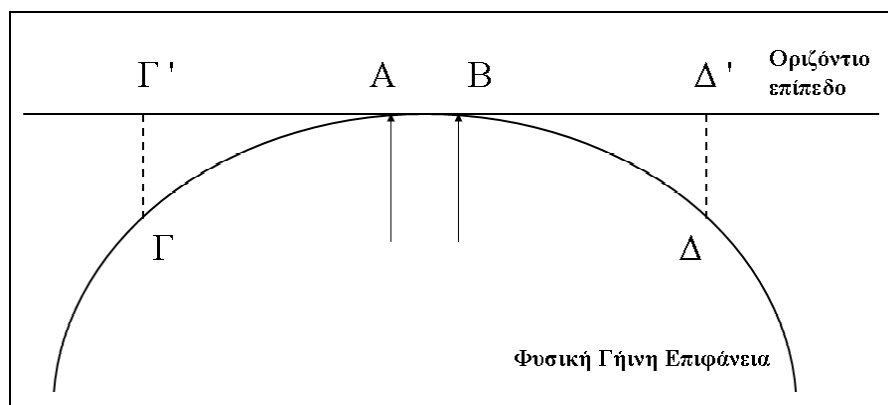
Το τυπικό σφάλμα του γενικευμένου μέσου όρου

είναι:  $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \pm \sqrt{\frac{\sum [p_i (x_i - \bar{x})^2]}{(n-1) \sum p_i}} = \pm 14 \text{ mm}$

### 1.3 ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

#### 1.3.1 Γενικά

Η συχνότερη διαδικασία στις καθημερινές γεωδαιτικές εργασίες αποτελεί ο προσδιορισμός της σχετικής θέσης σημείων, δηλαδή των συντεταγμένων τους σε δύο ή τρεις διαστάσεις, με διάφορες ακρίβειες, με σκοπό την παραγωγή τοπογραφικών διαγραμμάτων και χαρτών τμημάτων της επιφάνειας της γης. Το σχήμα 1. 7 δείχνει ότι αν η περιοχή ενδιαφέροντος είναι μικρής έκτασης και εκτείνεται μεταξύ των σημείων Α και Β πάνω στην φυσική γήινη επιφάνεια, τότε η ορθή προβολή τους σε ένα οριζόντιο επίπεδο συνεπάγεται σχεδόν μηδενική παραμόρφωση. Όταν όμως η περιοχή ενδιαφέροντος εκτείνεται από το Γ στο Δ, η επίδραση της καμπυλότητας της γης θα επιφέρει μεγάλη παραμόρφωση εάν δεν ληφθεί υπόψη στους υπολογισμούς και αντιμετωπισθεί ως να είναι οριζόντιο επίπεδο. Επομένως, ανάλογα με το είδος των γεωδαιτικών εργασιών και την επιδιωκόμενη ακρίβεια, απαιτείται ο καθορισμός επιφανειών αναφοράς και κατάλληλων συστημάτων συντεταγμένων για τους υπολογισμούς.

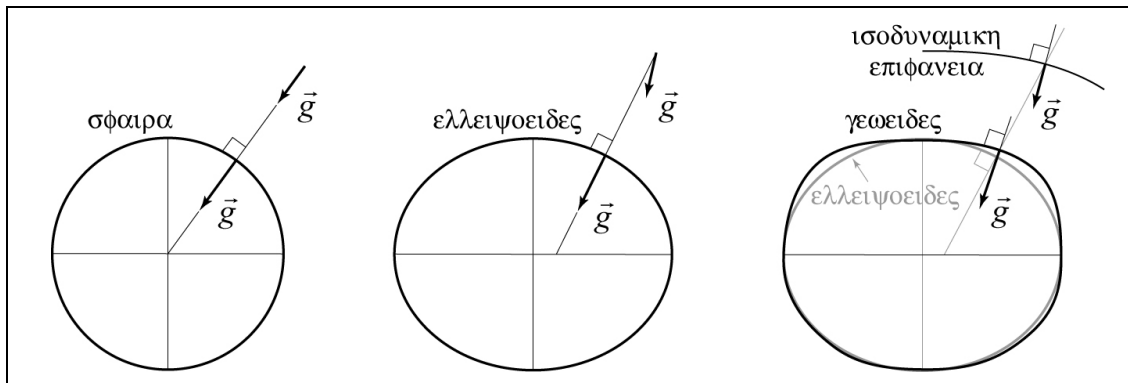


Σχήμα 1.7 Χρήση οριζοντίου επιπέδου ως επιφάνεια αναφοράς

#### 1.3.2 Βασικές επιφάνειες αναφοράς

Οι βασικές επιφάνειες αναφοράς που χρησιμοποιούνται στην επιστήμη της γεωδαισίας για την περιγραφή της φυσικής και μαθηματικής θεώρησης της γης είναι το γεωειδές, το ελλειροειδές εκ περιστροφής (ΕΕΠ) και η σφαίρα. Η επιφάνεια της πραγματικής γης, η φυσική γήινη επιφάνεια (ΦΓΕ), δεν είναι δυνατόν να αποδοθεί με μαθηματικές σχέσεις λόγω της πολυπλοκότητας της και έτσι έχουν κατασκευαστεί τα παραπάνω μοντέλα των επιφανειών που

προσεγγίζουν όσο καλύτερα γίνεται την φυσική γήινη επιφάνεια. Πάνω σε αυτές τις επιφάνειες γίνεται η προβολή των σημείων της φυσικής γήινης επιφάνειας ώστε να υπάρχει η δυνατότητα των μαθηματικών υπολογισμών βάσει των γεωδαιτικών μετρήσεων που γίνονται στην επιφάνεια της πραγματικής γης. Σχηματικά φαίνεται (σχήμα 1.8) η ανάπτυξη των μοντέλων για το σχήμα και το πεδίο βαρύτητας της γης, με την καλύτερη ακρίβεια να διαθέτει το μοντέλο του γεωειδούς (όπου  $\vec{g}$  το διάνυσμα της βαρύτητας).



Σχήμα 1.8 Ανάπτυξη των μοντέλων για το σχήμα και το πεδίο βαρύτητας της γης

### 1.3.2α Γεωειδές

Η γη έχει σχήμα σφαιροειδές, η σύστασή της στο εσωτερικό αλλά και τμήμα της επιφάνειάς της αποτελείται από ρευστά υλικά και επιπλέον η επιφάνειά της δεν είναι ομογενής. Η κίνησή της είναι σύνθετη και η μάζα της δέχεται την επίδραση της έλξης όλων των ουρανίων σωμάτων καθώς και την επίδραση φαινομένων όπως των ηφαιστειών, την κίνηση των ηπείρων και των ωκεανών κλπ. Μια προσέγγιση στο μη κανονικό σφαιροειδές σχήμα της γης ορίζει το «γεωειδές». Ακριβέστερα, το γεωειδές είναι εκείνη η επιφάνεια, στην οποία η ένταση του πεδίου βαρύτητας έχει σταθερή και προκαθορισμένη τιμή (περίπου όση στη μέση στάθμη της θάλασσας - ΜΣΘ).

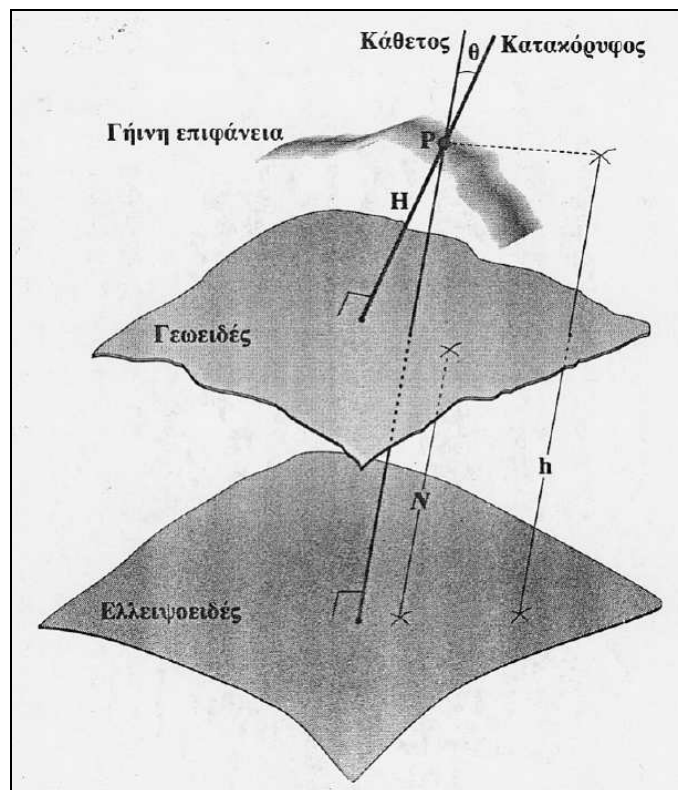
Η *Μέση Στάθμη της Θάλασσας* (ΜΣΘ) είναι μία ιδεατή επιφάνεια που προκύπτει από τις στάθμες της θάλασσας απομονώνοντας τις επιδράσεις των παλιρροιών, των κυματισμών και των θαλασσιών ρευμάτων. Η ΜΣΘ είναι μια ισοδυναμική επιφάνεια ως προς το δυναμικό της βαρύτητας. Θεωρητικά αυτό σημαίνει πως σε κάθε σημείο της ΜΣΘ το διάνυσμα της βαρύτητας ( $g$ ) είναι κάθετο στην επιφάνεια. Πρακτικά, σημαίνει πως δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί ροή λόγω διαφοράς δυναμικού. Η ΜΣΘ χρησιμοποιείται ως επιφάνεια αναφοράς (υψομετρική αφετηρία) στους χάρτες καθώς διαχωρίζει, ουσιαστικά, την επιφάνεια της στεριάς από αυτήν της θάλασσας.

Παρόλο που το γεωειδές θεωρητικά είναι μία ισοδυναμική επιφάνεια ως προς το δυναμικό της βαρύτητας και η επιφάνειά του είναι ομαλότερη της φυσικής γήινης επιφάνειας, παραμένει ακατάλληλη ως επιφάνεια αναφοράς για τοπογραφικές εργασίες (π.χ. για τον προσδιορισμό της οριζοντιογραφικής θέσης σημείων). Εντούτοις, το γεωειδές αποτελεί την βασική επιφάνεια αναφοράς των υψομέτρων (ορθομετρικών,  $H$ ). Η διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας (διεύθυνση της κατακορύφου) είναι κάθετη στην επιφάνεια του γεωειδούς σε κάθε του σημείο, και τα γεωδαιτικά όργανα που οριζοντιώνονται με χρήση αεροστάθμης υλοποιούν την κατακόρυφο και τα υψόμετρα μετρούνται από την ΜΣΘ της περιοχής. Επομένως τα υψόμετρα που μετράμε σε μια περιοχή και αναφέρονται στο τοπικό

γεωειδές μιας χώρας δεν μπορούν να συσχετισθούν με τα υψόμετρα που αναφέρονται σε άλλο γεωειδές που χρησιμοποιείται για παράδειγμα σε άλλη χώρα. Η παγκόσμια επιφάνεια της ΜΣΘ μπορεί να διαφέρει από το γεωειδές μέχρι και 3m σε περιοχές, και έτσι δεν είναι για όλες τις γεωδαιτικές εργασίες πάντοτε εφικτό να χρησιμοποιείται το ίδιο γεωειδές σε παγκόσμια κλίμακα. Το παγκόσμιο μοντέλο γεωειδούς που χρησιμοποιείται σήμερα με την καλύτερη ακρίβεια λόγω μεγάλης χωρικής δειγματοληψίας (της τάξης των 9km) είναι το Earth Gravitational Model 2008 – EGM08. Αρχικές μελέτες της χρήσης του EGM08 στον ελληνικό χώρο έχουν δείξει συμφωνία τιμών της τάξης των  $\pm 10\text{cm}$  (1σ) μεταξύ των ορθομετρικών υψομέτρων όπως προκύπτουν από το EGM08 και των ορθομετρικών υψομέτρων βάσει μετρήσεων GPS για μεγάλο αριθμό κορυφών δικτύου.

### 1.3.2β Ελλειψοειδές εκ περιστροφής

Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής είναι η πλησιέστερη μαθηματική επιφάνεια που προσδιορίζει το σχήμα της πραγματικής γης. Δημιουργείται από την περιστροφή μιας έλλειψης γύρω από τον μικρό άξονά της ( $b$ ) και ορίζεται από τον *μεγάλο ημιάξονα* ( $a$ ) και την *επιπλάτυνση* ( $f$ ). Η σύγχρονη τάση στην επιστήμη της γεωδαισίας είναι να χρησιμοποιείται ένα γεωκεντρικό ελλειψοειδές εκ περιστροφής όπου το κέντρο του ταυτίζεται με το κέντρο μάζας της γης, ο άξονας συμμετρίας του ταυτίζεται με τον μέσο άξονα περιστροφής της και προσεγγίζει σε διαστάσεις καλύτερα το γεωειδές σε παγκόσμια κλίμακα. Υπάρχουν όμως πολλές χώρες που χρησιμοποιούν «τοπικά προσαρμοσμένο» ελλειψοειδές, το οποίο ταιριάζει καλύτερα στο γεωειδές της συγκεκριμένης περιοχής, είναι παράλληλα μετατοπισμένο ως προς το γεωκεντρικό ελλειψοειδές και συχνά έχει τις ίδιες διαστάσεις με αυτό.



**Σχήμα 1.9** Σχετικές θέσεις της φυσικής γήινης επιφάνειας, του γεωειδούς και του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής

Το σχήμα 1.9 παρουσιάζει τη σχετική θέση της γήινης φυσικής επιφάνειας, του γεωειδούς και του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής. Αν στο σημείο P του σχήματος η γωνία  $\theta$  (απόκλιση της κατακορύφου) ήταν ίση με μηδέν, τότε οι επιφάνειες του ελλειψοειδούς και του γεωειδούς θα ήταν παράλληλες μεταξύ τους. Επιπλέον αν η τιμή του υψόμετρου της αποχής του γεωειδούς  $N$  ήταν ίση με το μηδέν, τότε οι δύο επιφάνειες θα ταυτιζόνταν, αν και ποτέ δεν θα υπήρχε πλήρης ταύτιση αφού το ελλειψοειδές είναι ομαλή επιφάνεια σε αντίθεση με το γεωειδές.

Αν η επιφάνεια αναφοράς είναι το ελλειψοειδές εκ περιστροφής, το υψόμετρο ονομάζεται *γεωμετρικό* ( $h$ ) και η απόσταση μετριέται κατά μήκος της κάθετης από το σημείο προς το ελλειψοειδές (σχ. 1.9). Αν η επιφάνεια αναφοράς είναι το γεωειδές, το υψόμετρο ονομάζεται *ορθομετρικό* ( $H$ ) και η απόσταση μετριέται κατά μήκος της κατακόρυφης (που ταυτίζεται με τη διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας που περνά από το σημείο και είναι κάθετη στο γεωειδές) (σχ. 1.9). Ορθομετρικά υψόμετρα ή σωστότερα ορθομετρικές υψομετρικές διαφορές μετρώνται ή προσδιορίζονται με τα συνήθη τοπογραφικά όργανα.

Οι δύο γραμμές, η κατακόρυφη και η κάθετη από το σημείο στο ελλειψοειδές αναφοράς, δεν ταυτίζονται αφού οι δύο επιφάνειες δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες. Οι δύο γραμμές σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία  $\theta$  που ονομάζεται απόκλιση της κατακορύφου. Η απόκλιση της κατακορύφου είναι διανυσματικό μέγεθος με συνιστώσες  $\xi$  (στη διεύθυνση βορρά – νότου) και  $\eta$  (στη διεύθυνση ανατολής – δύσης).

Το γεωμετρικό και το ορθομετρικό υψόμετρο ενός σημείου συνδέονται μεταξύ τους με την εξής βασική σχέση :

$$h = H + N \quad (1.27)$$

όπου  $N$  : το υψόμετρο του γεωειδούς ως προς το ελλειψοειδές αναφοράς.

Όπως φαίνεται από τα παραπάνω, η τελική επιδίωξη είναι να επιτευχθεί ο υπολογισμός ενός ελλειψοειδούς εκ περιστροφής τέτοιου, ώστε οι αποκλίσεις του γεωειδούς από αυτό να γίνονται ελάχιστες για την συγκεκριμένη περιοχή. Πολλές χώρες χρησιμοποιούν τοπικά ελλειψοειδή αναφοράς έτσι ώστε αυτά να προσαρμόζονται καλύτερα στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της περιοχής. Κάθε τοπικά καλύτερα προσαρμοζόμενο ελλειψοειδές αποτελεί μέρος του αντίστοιχου γεωδαιτικού συστήματος αναφοράς (Datum). Ένα *τοπικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς* ορίζεται από τα παρακάτω στοιχεία:

- Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής με όλα τα μαθηματικά στοιχεία που το περιγράφουν
- Ένα γνωστό σημείο το οποίο καλείται αφετηρία του συστήματος αναφοράς (ή θεμελιώδες σημείο)
- Τις συνιστώσες της απόκλισης της κατακορύφου και το υψόμετρο του γεωειδούς ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $N$ ) στο θεμελιώδες σημείο του συστήματος αναφοράς
- Τη συνθήκη ότι ο μικρός άξονας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής είναι παράλληλος με τον άξονα περιστροφής της γης
- Ένα κατάλληλο προβολικό σύστημα

και υλοποιείται από:

- Τις συντεταγμένες των τριγωνομετρικών σημείων του κρατικού δικτύου με τα αντίστοιχα ορθομετρικά υψόμετρα.

### 1.3.2γ Σφαίρα

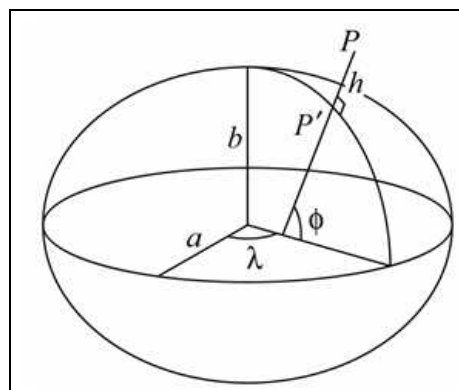
Η επιφάνεια μιας σφαίρας με κέντρο που συμπίπτει με το κέντρο μάζας της γης και ακτίνα ίση με την μέση ακτίνα καμπυλότητας του ελλειψοειδούς εκ περιστροφής, αποτελεί την απλούστερη μαθηματική επιφάνεια που προσεγγίζει με μικρότερη ακρίβεια το σχήμα της πραγματικής γης. Συχνά, για μικρές εκτάσεις και τρέχουσες τοπογραφικές εργασίες, η σφαίρα, που είναι εγγύτατη στο σημείο της περιοχής, μπορεί να αντικαταστήσει το ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

### 1.3.3 Συστήματα συντεταγμένων

Για τον προσδιορισμό της θέσης σημείων στο χώρο μέσω των γεωδαιτικών μετρήσεων απαιτείται η χρήση συστημάτων αναφοράς. Αυτά εκφράζουν ένα πλαίσιο παραμέτρων και συστημάτων συντεταγμένων που αναφέρονται στο χώρο και ως προς τον οποίο καθορίζονται οι θέσεις σημείων. Επομένως, ο καθορισμός του συστήματος συντεταγμένων είναι βασικός για την διαδικασία προσδιορισμού της θέσης σημείων. Τα βασικά συστήματα συντεταγμένων που χρησιμοποιούνται στην Γεωδαισία είναι οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ), οι καρτεσιανές τρισδιάστατες συντεταγμένες ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) και οι επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες ( $x$ ,  $y$ ) που συνοδεύονται συνήθως με το ορθομετρικό υψόμετρο ( $H$ ) του σημείου.

#### 1.3.3α Ελλειψοειδείς συντεταγμένες

Οι ελλειψοειδείς (ή γεωδαιτικές) συντεταγμένες σχετίζονται με ένα ελλειψοειδές αναφοράς διαστάσεων  $a$ ,  $b$  ή  $f$  και εκφράζονται με το γεωδαιτικό πλάτος  $\varphi$ , το γεωδαιτικό μήκος  $\lambda$  και το γεωμετρικό υψόμετρο  $h$  (βλ Σχήμα 1.10). Γεωδαιτικό πλάτος  $\varphi$  είναι η γωνία που σχηματίζει η κάθετος στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς από το σημείο  $P$  με το επίπεδο του ισημερινού και μετριέται από  $0^\circ$  έως  $\pm 90^\circ$ . Γεωδαιτικό μήκος  $\lambda$  είναι η γωνία που σχηματίζει στον ισημερινό το επίπεδο του μηδενικού μεσημβρινού (στο Greenwich) με το επίπεδο του μεσημβρινού του σημείου και μετριέται από  $0^\circ$  έως  $360^\circ$  προς ανατολάς. Το υψόμετρο  $h$  μετριέται πάνω στην κάθετη από το  $P$  (φυσική γήινη επιφάνεια) στο  $P'$  (ελλειψοειδές).



Σχήμα 1.10 Προσδιορισμός θέσης με γεωδαιτικές συντεταγμένες

### 1.3.3β Τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες

Οι τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες (X, Y, Z) στην Γεωδαισία χρησιμοποιούνται στο γήινο (ή παγκόσμιο) σύστημα αναφοράς και ορίζονται με αρχή το κέντρο μάζας της γης, Z το μέσο άξονα περιστροφής της γης, X την κάθετη στον άξονα Z από το κέντρο τη γης προς τον μηδενικό μεσημβρινό (του Greenwich) και άξονα Y κάθετο στο επίπεδο XZ προς ανατολάς.

Οι ελλειψοειδείς (ή γεωδαιτικές) συντεταγμένες σχετίζονται με τις τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} X &= (N + h) \cos\varphi \cos\lambda \\ Y &= (N + h) \cos\varphi \sin\lambda \\ Z &= [(N(1 - e^2) + h] \sin\varphi \end{aligned} \quad (1.28)$$

Όπου N είναι η ακτίνα καμπυλότητας της μεσημβρινής έλλειψης στο P' (κάθετη προβολή του P στο ελλειψοειδές αναφοράς) και ίση με

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad (1.29)$$

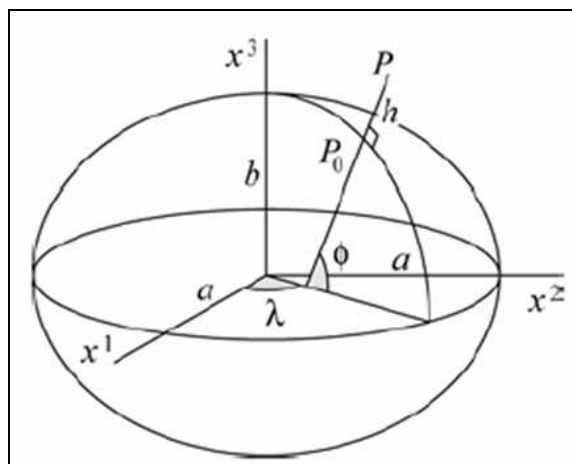
και e είναι η εκκεντρότητα ίση με :

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad (1.30)$$

Επίσης, χρήσιμη σε υπολογισμούς είναι η ακτίνα καμπυλότητας  $\rho$  του ΕΕΠ κατά την τομή του μεσημβρινού (ή μεσημβρινής τομής), η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\rho = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}} \quad (1.31)$$

Από κάθε σημείο του ελλειψοειδούς περνά ένα μεσημβρινό επίπεδο, που περιέχει την κάθετη στο σημείο και τον άξονα περιστροφής Z. Η τομή του με το ελλειψοειδές είναι έλλειψη με ακτίνα καμπυλότητας στο σημείο αυτό ίση με  $\rho$ .



Σχήμα 1.11 Συσχέτιση καρτεσιανών και γεωδαιτικών συντεταγμένων

Όπως φαίνεται, υπάρχει εξάρτηση των καρτεσιανών συντεταγμένων από τις γεωδαιτικές ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) αλλά και από τις παραμέτρους του ελλειψοειδούς αναφοράς ( $a$ ,  $b$ ,  $e$ ). Στο Σχήμα 1.11 φαίνεται η παραπάνω συσχέτιση (όπου  $x^3 = Z$ ,  $x^2 = Y$ ,  $x^1 = X$ ).

Για τον αντίστροφο υπολογισμό, δηλαδή γνωρίζοντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  του τυχαίου σημείου  $P$ , οι αντίστοιχες γεωδαιτικές συντεταγμένες  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ , υπολογίζονται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

- γεωδαιτικό μήκος  $\lambda$ :  $\lambda = \arctan \frac{Y}{X}$
- γεωμετρικό υψόμετρο  $h$ :  $h = \frac{Z}{\sin \varphi} - N(1 - e^2)$
- γεωδαιτικό πλάτος  $\varphi$ : επιλύοντας με διαδοχικές προσεγγίσεις τη σχέση  $\varphi = \arctan \left( \frac{Z + e^2 N \sin \varphi}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right)$  με αρχική τιμή στο δεξιό σκέλος ίση με  $\varphi_0 = \arctan \left( \frac{Z (1 + e'^2 N \sin \varphi)}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right)$ , όπου  $e'$  είναι η δεύτερη εκκεντρότητα ( $e' = \frac{a^2}{b^2} - 1$ ).

(Αν  $\varphi = 0^\circ$ , π.χ. στην περίπτωση που το σημείο βρίσκεται στην περιοχή του ισημερινού, τότε  $h = \sqrt{X^2 + Y^2} - a$  και αν  $\varphi = 90^\circ$  τότε  $h = Z - b$ ).

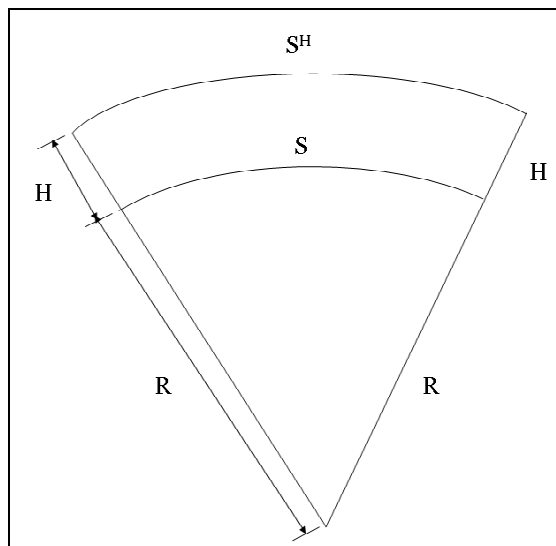
### 1.3.3γ Επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες στη προβολή

Στην καθημερινή πρακτική των απλών τοπογραφικών εργασιών χρησιμοποιούνται αντί των γεωδαιτικών συντεταγμένων οι επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες. Οι επίπεδες ορθογώνιες συντεταγμένες ( $\chi$ ,  $y$ ) αναφέρονται στο προβολικό σύστημα και είναι το ζεύγος των τιμών που προκύπτει για ένα σημείο της φυσικής γήινης επιφάνειας αφού γίνει η προβολή του αρχικά σε κάποια καμπυλόγραμμη επιφάνεια που προσεγγίζει την πραγματική γη (σφαίρα ή ελλειψοειδές εκ περιστροφής ανάλογα με την απαιτούμενη ακρίβεια) με συντεταγμένες ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $h$ ) και μετά γίνει η προβολή του σε κάποια αναπτυσσόμενη επιφάνεια (π.χ. κύλινδρο, κώνο) που συνήθως είναι «εφαπτόμενη» στο ελλειψοειδές αναφοράς μέσω κατάλληλων μαθηματικών μετασχηματισμών χαρτογραφικής απεικόνισης. Στην περίπτωση των επίπεδων ορθογώνιων συντεταγμένων, η τρίτη διάσταση του υψόμετρου δίνεται από το ορθομετρικό υψόμετρο  $H$  που αναφέρεται στην μέση στάθμη της θάλασσας (δηλαδή υψόμετρα κρατικού δικτύου). Οι παραπάνω «χαρτογραφικές» συντεταγμένες ( $\chi$ ,  $y$ ) δεν πρέπει να συγχέονται με τις οριζόντιες επίπεδες συντεταγμένες ( $x$ ,  $y$ ) που αναφέρονται σε τυχαίο οριζόντιο επίπεδο κάθετο στην κατακόρυφο σε οποιοδήποτε σημείο της.

Τα δύο παραπάνω στάδια της διαδικασίας δίνονται σχηματικά στο σχ. 1.12 που δείχνει την αναγωγή μιας μετρημένης απόστασης  $S^H$  μεταξύ δύο σημείων, η οποία μετράται στην επιφάνεια της γης σε απόσταση  $H$  από την επιφάνεια αναφοράς που προσεγγίζει καλύτερα την περιοχή μελέτης (σφαίρα ή ελλειψοειδές), στο προβολικό επίπεδο. Θεωρώντας ως επιφάνεια αναφοράς τη σφαίρα ακτίνας  $R$ ,

από το σχήμα φαίνεται ότι η απόσταση  $S$  η οποία αναπαριστά την απόσταση μετά την προβολή της στη σφαίρα, σε πρώτη προσέγγιση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\frac{S}{S^H} = \frac{R}{R+H} \Rightarrow S = \frac{R}{R+H} S^H = k_1 S^H \quad (1.32)$$



**Σχήμα 1.12** Συσχέτιση απόστασης μετρημένης στην επιφάνεια της γης και της αναγωγής της στη σφαίρα

#### 1.3.4 Γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς

Ο προσδιορισμός της θέσης ενός σημείου (κατά την οριζοντιογραφία και υψομετρικά) εκφράζεται με τις συντεταγμένες του σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων που συνήθως στην τοπογραφία είναι τοπικό, κρατικό ή παγκόσμιο. Οι συντεταγμένες προσδιορίζουν αναλυτικά (με μαθηματικές σχέσεις) τη θέση ενός σημείου στο χώρο ως προς μια αφετηρία, δηλαδή ως προς σημείο που έχει επιλεγεί να αποτελεί αρχή μέτρησης των συντεταγμένων.

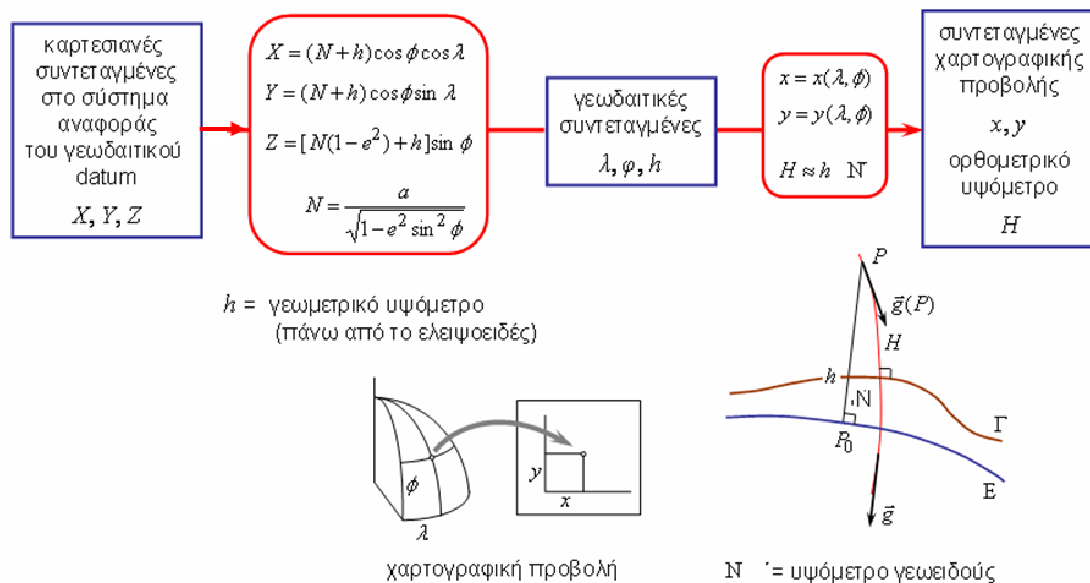
Η έννοια του συστήματος συντεταγμένων συνδέεται στενά με αυτήν του συστήματος αναφοράς. Συγκεκριμένα, το γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς αποτελείται από ένα σύνολο συμβάσεων (π.χ. τρισσορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα που ορίζεται από τον άξονα περιστροφής της γης), προτύπων (π.χ. το ελλειψοειδές εκ περιστροφής), μοντέλων (π.χ. γεωδυναμικά και τεκτονικά μοντέλα) και σταθερών (π.χ. η ταχύτητα του φωτός). Για να είναι υλοποιήσιμο το σύστημα αναφοράς θα πρέπει να συνδέεται με γνωστές συντεταγμένες αριθμού σημείων, οι οποίες αναφέρονται σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή (εποχή) με ταυτόχρονη γνώση των στοιχείων της κίνησης κάθε σημείου (ταχύτητα) λόγω τεκτονικών κινήσεων. Επίσης, χρησιμοποιεί ένα προβολικό σύστημα χαρτογραφικής απεικόνισης κατάλληλα προσαρμοσμένο στην χώρα για την μείωση των παραμορφώσεων.

Όταν έχουμε ένα σύνολο σημείων γνωστών συντεταγμένων που έχουν υπολογισθεί σε κάποιο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς και αναφέρονται σε συγκεκριμένη εποχή, για μια γεωγραφική περιοχή, τότε μιλάμε για το *πλαίσιο αναφοράς* (π.χ. ETRF 2007.5, ETRS89).

Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός τυχαίου σημείου στο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς μιας χώρας, πρέπει να γίνουν κατάλληλες μετρήσεις που να συνδέουν



το νέο σημείο με ένα ή περισσότερα σημεία του υπάρχοντος τριγωνομετρικού δικτύου. Η διαδικασία προσδιορισμού της θέσης σημείου όταν είναι γνωστές οι τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες του (π.χ. από μετρήσεις με δορυφορικές μεθόδους) παριστάνεται σχηματικά παρακάτω (Σχήμα 1.13).



**Σχήμα 1.13** Η διαδικασία προσδιορισμού της θέσης σημείου στο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς

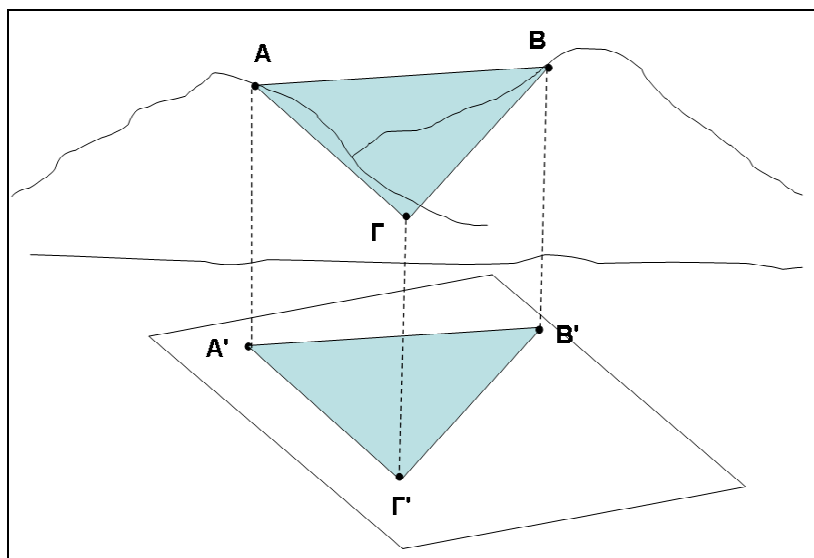
Η τρίτη παράμετρος για τον προσδιορισμό της θέσης του σημείου είναι το υψόμετρο του που ορίζεται ως η απόστασή του σημείου, κατά την κάθετη έννοια, από μια επιφάνεια αναφοράς. Όταν το εν λόγω σημείο αναφέρεται στο παγκόσμιο ή γήινο σύστημα αναφοράς τότε το υψόμετρό του είναι γεωμετρικό (h). Σε άλλη περίπτωση, η πρακτική είναι να ιδρύονται ανεξάρτητα υψομετρικά συστήματα αναφοράς ως προς το γεωειδές. Έτσι, ανεξάρτητα από τα γεωδαιτικά συστήματα αναφοράς που υλοποιούνται με τα τριγωνομετρικά σημεία για την οριζοντιογραφία, ιδρύονται υψομετρικά δίκτυα αναφοράς τα οποία υλοποιούνται με τις χωροσταθμικές αφετηρίες (υψομετρικές αναφορές) που συνδέονται με την υλοποίηση της μέσης στάθμης της θάλασσας και δίνουν ορθομετρικό υψόμετρο H. Ο στόχος του υψομετρικού δικτύου είναι τέτοιος ώστε η επιφάνεια αναφοράς να είναι το γεωειδές γιατί η ΜΣΘ δεν είναι μια υψομετρική επιφάνεια του πεδίου βαρύτητας. Όμως, στην πράξη πολλές χώρες όπως και η Ελλάδα, χρησιμοποιούν την ΜΣΘ όπως υπολογίζεται από μακροχρόνια ανάλυση και μετρήσεις παλιρροιογράφων που βρίσκονται σε ένα ή περισσότερα σημεία. Η τιμή της ΜΣΘ υλοποιεί το συμβατικό μηδέν του υψομετρικού συστήματος της συγκεκριμένης χώρας.

Είναι εύκολο εδώ να γίνει αντιληπτό, πως ενώ το ορθομετρικό υψόμετρο είναι ανεξάρτητο από το χρησιμοποιούμενο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς, το γεωμετρικό υψόμετρο εξαρτάται από αυτό. Πάντως, το υψόμετρο που συναντάμε στους χάρτες είναι αυτό που αναφέρεται στη ΜΣΘ, με εξαίρεση τους χάρτες που αφορούν βαθυμετρία, όπου τα βαθύμετρα μετρώνται από την "κατωτάτη ρηχία" της θάλασσας στην περιοχή.

## 1.4 ΒΑΣΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

### 1.4.1 Γενικά

Στις τρέχουσες τοπογραφικές εργασίες που αναφέρονται σε μικρής έκτασης περιοχές, το πρόβλημα προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου στο χώρο ανάγεται σε πρόβλημα που χρησιμοποιεί ως επιφάνεια αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο και την κατακόρυφο. Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.14, η θέση του σημείου A στο χώρο προσδιορίζεται αν προσδιορισθεί η προβολή του A' επάνω στο επίπεδο του οριζοντα (στο οριζόντιο δηλαδή επίπεδο υψομέτρου 0.0m) και η απόσταση του AA' είναι ίση H από το επίπεδο αυτό, δηλαδή από την επιφάνεια της θάλασσας. Συνεπώς, όταν αναφερόμαστε στον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου στο οριζόντιο επίπεδο, εννοούμε ουσιαστικά την προβολή του σημείου στο επίπεδο (σχήμα 1.14), χρειάζεται να υπάρχει ένα σύστημα ορθογώνιων αξόνων για τους υπολογισμούς. Ένα τέτοιο σύστημα είναι το σύστημα των ορθογώνιων επίπεδων συντεταγμένων όπου ο προσδιορισμός της θέσης ενός σημείου γίνεται με απλούς μαθηματικούς υπολογισμούς.

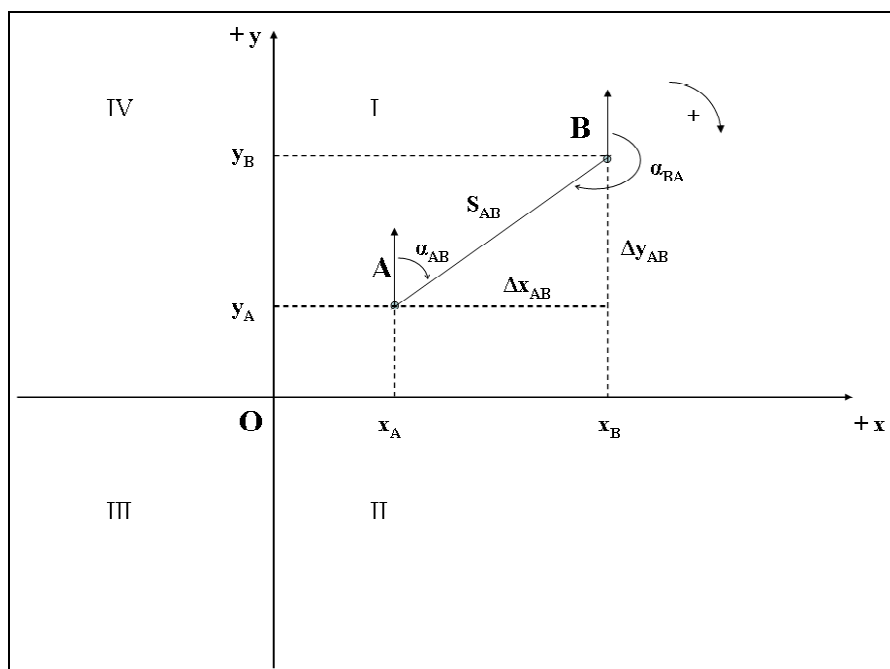


Σχήμα 1.14 Προβολή σημείων στο οριζόντιο επίπεδο

### 1.4.2 Τοπικά συστήματα συντεταγμένων

Στις τρέχουσες τοπογραφικές εργασίες τα συστήματα συντεταγμένων που βρίσκουν ευρεία χρήση είναι οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες και οι πολικές συντεταγμένες, και ισχύουν οι σχέσεις της επίπεδης αναλυτικής γεωμετρίας.

Το ορθογώνιο επίπεδο σύστημα συντεταγμένων ορίζεται όπως στο σχήμα 1.15. Χωρίζεται σε τέσσερα τεταρτημόρια (I, II, III, IV) με αρχή των αξόνων το σημείο O και γενικά ισχύει ότι ο θετικός άξονας y συμπίπτει με την διεύθυνση του βορρά και ο θετικός άξονας x έχει προσανατολισμό προς ανατολάς. Το σύστημα των συντεταγμένων που δημιουργείται κατά σύμβαση ορίζεται να συμπίπτει με την φορά των δεικτών του ρολογιού (θεωρείται δεξιόστροφο). Να σημειωθεί ότι αυτή η σύμβαση μπορεί να διαφοροποιείται από χώρα σε χώρα.



**Σχήμα 1.15** Ορθογώνιο επίπεδο σύστημα συντεταγμένων

Από το σχήμα 1.15 φαίνεται ότι το ζεύγος των ορθογώνιων συντεταγμένων  $(x_A, y_A)$  ορίζει την θέση του σημείου A και η θέση του σημείου B δίνεται από το ζεύγος  $(x_B, y_B)$  ως:  $x_B = x_A + \Delta x_{AB}$ ,  $y_B = y_A + \Delta y_{AB}$

Η γωνία διεύθυνσης (ή προσανατολισμού)  $\alpha_{AB}$  είναι η γωνία που διαγράφεται όταν ο θετικός ημιάξονας των  $y$  στραφεί κατά την θετική φορά (δεξιόστροφα) μέχρι να συμπέσει με το διάνυσμα θέσης AB. Η γωνία μπορεί να παίρνει τιμές μεταξύ 0 και 400 βαθμών ή 0 και 360 μοιρών. Όταν ο θετικός ημιάξονας των  $y$  έχει διεύθυνση προς τον βορρά τετραγωνισμού, τότε η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  ονομάζεται αζιμούθιο της πλευράς AB.

Στο σχήμα 1.15 φαίνεται ότι η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$ , της πλευράς AB είναι η γωνία η οποία διαγράφεται όταν η παράλληλη στον θετικό ημιάξονα  $y$  (που διέρχεται από το σημείο A) στραφεί κατά την θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την πλευρά AB. Η γωνία  $\alpha_{AB}$  υπολογίζεται, βάσει του σχήματος, από τις γνωστές

συντεταγμένες των σημείων A και B χρησιμοποιώντας τη σχέση  $\tan \alpha_{AB} = \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta y_{AB}}$ .

Να σημειωθεί ότι για τον υπολογισμό της γωνίας που αντιστοιχεί στην αντίστροφη συνάρτηση εφαπτομένης της ποσότητας  $\frac{\Delta x_{AB}}{\Delta y_{AB}}$ , θα πρέπει να βρεθεί το σωστό τεταρτημόριο της γωνίας λαμβάνοντας υπόψη τα πρόσημα των  $\Delta x_{AB}$  και  $\Delta y_{AB}$ .

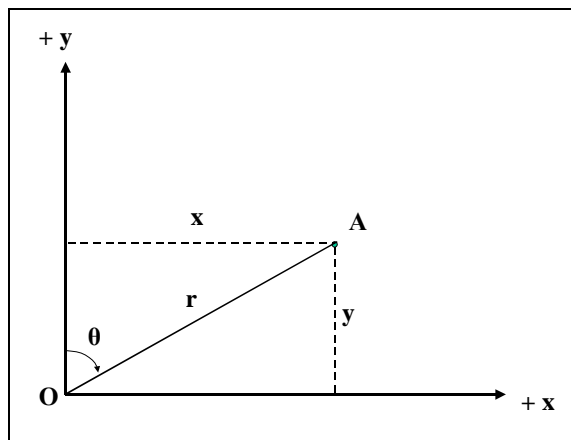
Η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{BA}$  της πλευράς BA μπορεί να βρεθεί από την γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  της πλευράς AB (αλλαγή φοράς) αρκεί να προστεθούν 200° (ή 180°), και η τιμή της γωνίας να παραμένει μεταξύ 0° και 400° (ή 0° και 360°). Ισχύει:

$$\alpha_{BA} = \alpha_{AB} + 200^\circ = \alpha_{AB} + 180^\circ \quad (1.33)$$

Αν από αριθμητικές πράξεις προκύψουν μεγαλύτερες τιμές των 400° (ή 360°) για την γωνία  $\alpha_{BA}$  τότε αφαιρούνται τόσα ακέραια πολλαπλάσια των 400° (δηλαδή

τόσες ακέραιες περιφέρειες) όσα χρειάζεται για να μείνει τελικά η τιμή της  $a_{BA}$  μεταξύ  $0^{\circ}$  και  $400^{\circ}$ . Για παράδειγμα, αν  $a_{AB} = 356.25^{\circ}$  τότε η  $a_{BA} = 356.25^{\circ} + 200^{\circ} = 556.25^{\circ}$  και τελικά  $a_{BA} = 156.25^{\circ}$ .

Η θέση ενός τυχαίου σημείου A του επιπέδου μπορεί επίσης να ορισθεί με ένα ζεύγος πολικών συντεταγμένων ( $r, \theta$ ). Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.16, οι πολικές συντεταγμένες αναφέρονται σε σύστημα του οποίου αφετηρία είναι ο πόλος O (ο οποίος συμπίπτει με την αρχή ενός ορθογώνιου συστήματος συντεταγμένων) και έχει αρχική διεύθυνση μέτρησης για τις πολικές γωνίες (συμπίπτει με τον άξονα Oy). Η απόσταση (οριζόντια) του σημείου A από την αρχή των αξόνων ονομάζεται πολική απόσταση r η οποία ισούται με το μέτρο του διανύσματος OA και η γωνία που σχηματίζεται όταν ο θετικός ημιάξονας των y στραφεί κατά την θετική φορά (φορά των δεικτών του ρολογιού - δεξιόστροφα) μέχρι να συμπέσει με την OA ονομάζεται πολική γωνία  $\theta$ .



Σχήμα 1.16 Σχέση μεταξύ πολικών και ορθογώνιων συντεταγμένων

Όταν είναι γνωστές οι πολικές συντεταγμένες του σημείου A μπορούν να υπολογισθούν οι αντίστοιχες ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες του και αντίστροφα με χρήση των παρακάτω σχέσεων που προκύπτουν από την γεωμετρία του σχήματος 1.16:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \\ y &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.34)$$

επίσης:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{x}{y} \quad \text{ή} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \\ r &= \frac{x}{\sin \theta} = \frac{y}{\cos \theta} \end{aligned} \quad (1.35)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

### 1.4.3 Θεμελιώδη προβλήματα γεωδαισίας

Οι βασικοί υπολογισμοί στο επίπεδο για τον προσδιορισμό της σχετικής θέσης σημείων αποτελούν τα τρία θεμελιώδη προβλήματα της γεωδαισίας ενώ ο συνδυασμός τους επιτρέπει την αντιμετώπιση ενός μεγάλου μέρους τοπογραφικών εφαρμογών.

#### 1.4.3α Πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα

Στο πρόβλημα αυτό γίνεται ο υπολογισμός των επίπεδων καρτεσιανών συντεταγμένων σημείου B ( $x_B, y_B$ ), όταν είναι γνωστά οι συντεταγμένες σημείου A ( $x_A, y_A$ ), η οριζόντια απόσταση  $S_{AB}$  μεταξύ των δύο σημείων και η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  της πλευράς AB.

Από το σχήμα 1.15 φαίνεται ότι:

$$\begin{aligned}\Delta y &= y_B - y_A \Rightarrow y_B = y_A + \Delta y \\ \Delta x &= x_B - x_A \Rightarrow x_B = x_A + \Delta x\end{aligned}\quad (1.36)$$

Επίσης ισχύει:

$$\Delta y = S_{AB} \cos \alpha_{AB} \text{ και } \Delta x = S_{AB} \sin \alpha_{AB} \quad (1.37)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (1.37) στην (1.36) προκύπτει:

$$\begin{aligned}y_B &= y_A + S_{AB} \cos \alpha_{AB} \\ x_B &= x_A + S_{AB} \sin \alpha_{AB}\end{aligned}\quad (1.38)$$

#### 1.4.3β Δεύτερο θεμελιώδες πρόβλημα

Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται στον υπολογισμό της απόστασης  $S_{AB}$  μεταξύ δύο σημείων A και B και της γωνίας διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  της πλευράς AB όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες των σημείων A ( $x_A, y_A$ ) και B ( $x_B, y_B$ ).

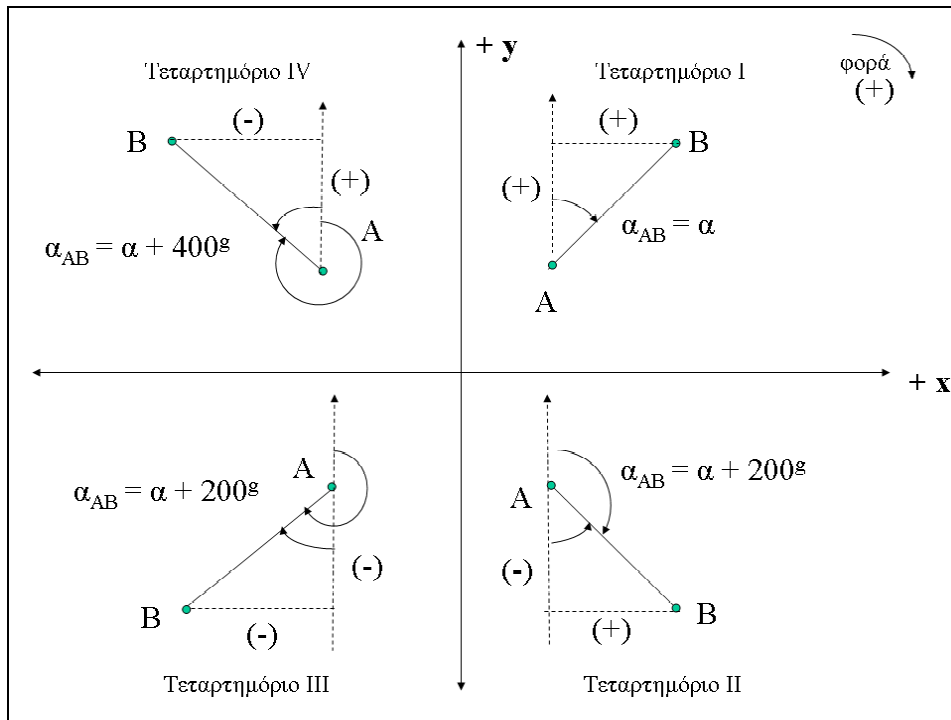
Όπως φαίνεται από το σχήμα 1.15, είναι:

$$\begin{aligned}\tan \alpha_{AB} &= \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta y_{AB}} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \quad \text{ή} \quad \alpha_{AB} = \arctan \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta y_{AB}} \\ S_{AB} &= \frac{\Delta x_{AB}}{\sin \alpha_{AB}} = \frac{\Delta y_{AB}}{\cos \alpha_{AB}} = \sqrt{\Delta x_{AB}^2 + \Delta y_{AB}^2}\end{aligned}\quad (1.39)$$

Η γωνία  $\alpha_{AB}$ , όπως υπολογίζεται από την πρώτη εξίσωση της σχέσης (1.39), μπορεί να πάρει μία τιμή εκ των τεσσάρων τεταρτημορίων μεταξύ  $0^\circ$  και  $400^\circ$ . Έτσι, αρκεί να λάβουμε την τιμή της γωνίας που αντιστοιχεί στην εφαπτομένη:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right) \\ \text{ή} \quad \alpha &= \arctan \left( \frac{\Delta x}{\Delta y} \right)\end{aligned}\quad (1.40)$$

Στην συνέχεια, ανάλογα με τα πρόσημα των  $\Delta x$  και  $\Delta y$  στο τεταρτημόριο που βρίσκονται και θεωρώντας την γωνία  $\alpha$  προσημασμένη, εφαρμόζουμε τον κατάλληλο τύπο όπως φαίνεται στο σχήμα 1.17 και στον Πίνακα 1.4.



Σχήμα 1.17 Προσδιορισμός της γωνίας διεύθυνσης ως προς τα τεταρτημόρια

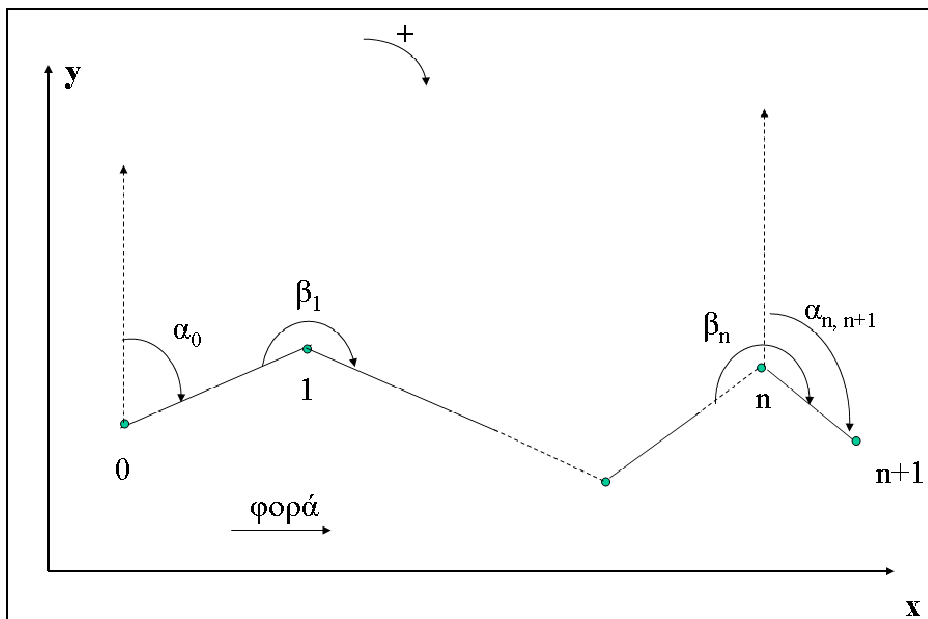
Αν	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{+}{+}$	τότε	$\alpha_{AB} = \alpha$
Αν	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{+}{-}$	τότε	$\alpha_{AB} = 200^\circ + \alpha$
Αν	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{-}{-}$	τότε	$\alpha_{AB} = 200^\circ + \alpha$
Αν	$\frac{\Delta x}{\Delta y}$	$\frac{-}{+}$	τότε	$\alpha_{AB} = 400^\circ + \alpha$
Επίσης				
			αν $\Delta y \geq 0$	τότε $\alpha_{AB} = 0^\circ$
Αν $\Delta x = 0$			αν $\Delta y < 0$	τότε $\alpha_{AB} = 200^\circ$
			αν $\Delta x > 0$	τότε $\alpha_{AB} = 100^\circ$
Αν $\Delta y = 0$			αν $\Delta x < 0$	τότε $\alpha_{AB} = 300^\circ$

Πίνακας 1.4 Διερεύνηση προσήμου για τον υπολογισμό της τιμής της γωνίας διεύθυνσης

### 1.4.3γ Τρίτο θεμελιώδες πρόβλημα

Συχνά στην Γεωδαισία, ζητείται ο προσδιορισμός της θέσης διαδοχικών σημείων 0, 1, 2, ..., n. Αυτά τα σημεία ορίζουν μια τεθλασμένη γραμμή που ονομάζεται πολυγωνική όδευση ή απλά όδευση γιατί έχει αρχή, τέλος και φορά. Στο σχήμα 1.18 φαίνονται εκτός από τις γωνίες διεύθυνσης των πλευρών μεταξύ των σημείων, οι γωνίες θλάσης  $\beta_i$  μεταξύ των δύο διαδοχικών πλευρών. Η γωνία θλάσης διαγράφεται όταν η προηγούμενη πλευρά στραφεί κατά την θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την επόμενη πλευρά.

Το τρίτο πρόβλημα αναφέρεται στον υπολογισμό της γωνίας διεύθυνσης  $\alpha_{n,n+1}$  της πλευράς  $S_{n,n+1}$  όταν δίνονται οι γωνίες θλάσης  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  μιας όδευσης και η γωνία διεύθυνσης της πρώτης πλευράς  $\alpha_{01}$ .



Σχήμα 1.18 Πολυγωνική όδευση

Η ζητούμενη γωνία διεύθυνσης υπολογίζεται από την σχέση:

$$\alpha_{n,n+1}^{\text{grad}} = \alpha_{01}^{\text{grad}} + \sum_{i=1}^n \beta_i + n \cdot 200^{\text{grad}} - (k \cdot 400^{\text{grad}}) \quad (1.41)$$

όπου,  $i = 1, 2, \dots, n$  και  $k =$  ακέραιος  $0, 1, 2, \dots$

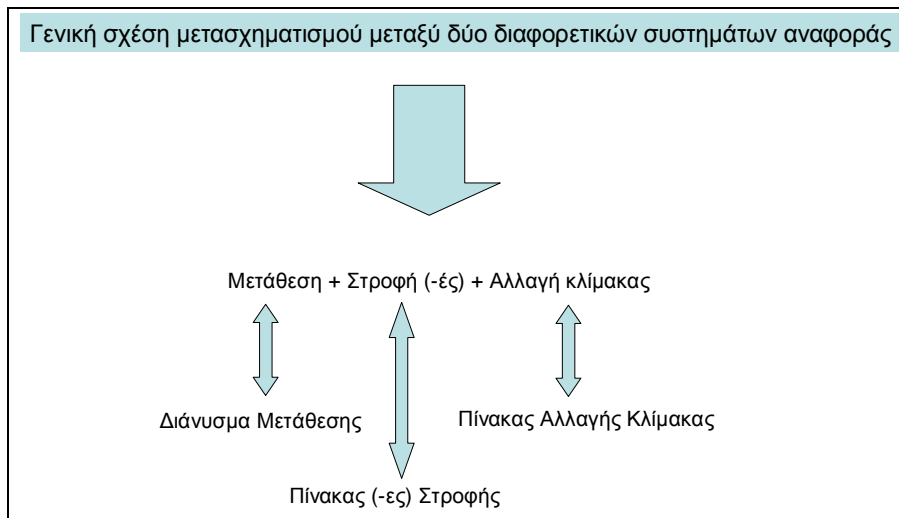
Οι γωνίες θλάσης που χρησιμοποιούνται στην σχέση (1.41) πρέπει να είναι μετρημένες με την ίδια φορά (π.χ. δεξιόστροφες) ενώ στη περίπτωση που κάποια είναι μετρημένη με την αντίθετη φορά θα πρέπει στους υπολογισμούς να χρησιμοποιηθεί η γωνία  $400^\circ - \beta_i$ . Αν από τις αριθμητικές πράξεις προκύψει για την γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{n,n+1}$  αποτέλεσμα με τιμή μεγαλύτερη των  $400^\circ$ , τότε αφαιρούνται τόσες ακέραιες περιφέρειες (δηλ.  $400^\circ$ ) όσες χρειάζεται για να μείνει τελικά η τιμή της γωνίας διεύθυνσης μεταξύ  $0^\circ$  και  $400^\circ$ .

### 1.4.4 Μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Στις καθημερινές τοπογραφικές εργασίες υπάρχει συχνά η ανάγκη να συσχετισθούν χάρτες ή τοπογραφικά διαγράμματα που αναφέρονται σε

διαφορετικά συστήματα συντεταγμένων. Για τον μετασχηματισμό συντεταγμένων από ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο συνήθως χρησιμοποιείται ο μετασχηματισμός ομοιότητας στο επίπεδο (similarity transformation), που είναι συνδυασμός μετάθεσης κατά  $x, y$ , στροφής και ενιαίας κλίμακας για το επίπεδο εφαρμογής (σχήμα 1.19). Η ιδιότητα που χαρακτηρίζει τον μετασχηματισμό αυτό είναι η διατήρηση της μορφής των σχημάτων.

Αξίζει να σημειωθεί ότι δεν πρέπει να συγχέεται ο ορός «μετασχηματισμός» με την «μετατροπή» των συντεταγμένων, που αναφέρεται στην αλλαγή της μορφής των συντεταγμένων π.χ. από γεωδαιτικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες, χωρίς όμως να αλλάζει το σύστημα αναφοράς.



**Σχήμα 1.19** Γενική διαδικασία μετασχηματισμού συντεταγμένων διαφορετικών συστημάτων αναφοράς

Τα δύο συστήματα μπορεί, στην απλούστερη περίπτωση, να είναι παράλληλα και να απέχουν μόνο οι αφετηρίες τους ή να έχουν μεταξύ τους μια στροφή ή και να έχουν διαφορετική κλίμακα.

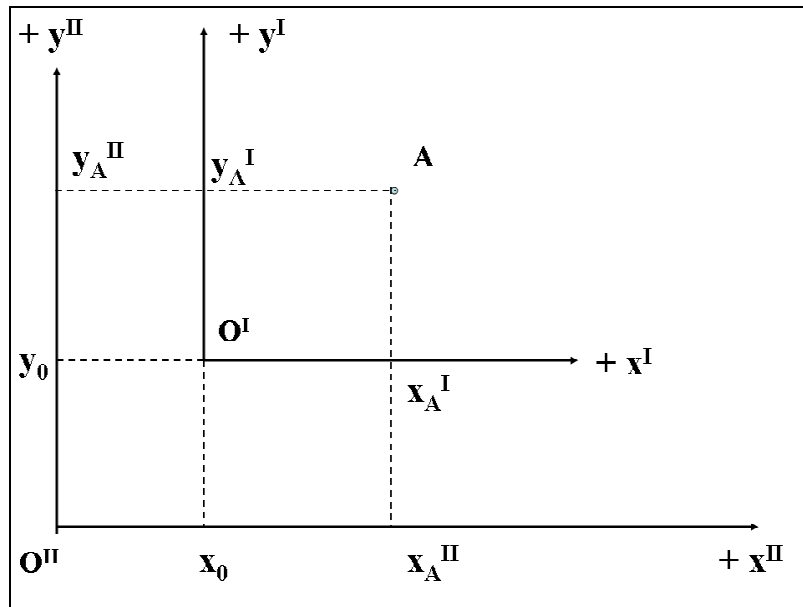
#### 1.4.4α Μετάθεση της αρχής

Ο μετασχηματισμός μετάθεσης επηρεάζει μόνο τη θέση και διατηρεί αναλλοίωτα τα γεωμετρικά στοιχεία (αποστάσεις, γωνίες, διευθύνσεις). Από το σχήμα 1.19 φαίνεται ότι όταν οι συντεταγμένες της αρχής του συστήματος I ως προς τις αντίστοιχες συντεταγμένες αρχής του συστήματος II είναι μετατοπισμένες κατά  $(x_0^II, y_0^II)$ , τότε για το τυχαίο σημείο A με συντεταγμένες  $(x^I, y^I)$  στο σύστημα I, η θέση του στο σύστημα II δίνεται από τις σχέσεις :

$$\begin{aligned} x^{II} &= x^I + x_0 \\ y^{II} &= y^I + y_0 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Οι συντεταγμένες  $(x_0, y_0)$  είναι προσημασμένες με πρόσημα που εξαρτώνται από την θέση της αρχής  $O^I$  ως προς την αρχή  $O^{II}$  του συστήματος II.





Σχήμα 1.20 Μετάθεση αρχής των συντεταγμένων

#### 1.4.4β Αλλαγή κλίμακας

Ο μετασχηματισμός κλίμακας αφήνει αναλλοίωτες τις διευθύνσεις ως προς το σύστημα συντεταγμένων αλλά επηρεάζει το μέγεθος (αποστάσεις και εμβαδά). Ο συντελεστής κλίμακας  $m$  (συνήθως ονομάζεται κλίμακα παραμόρφωσης) ορίζεται με το λόγο ενός μήκους στο σύστημα II ως προς το αντίστοιχο μήκος στο σύστημα I.

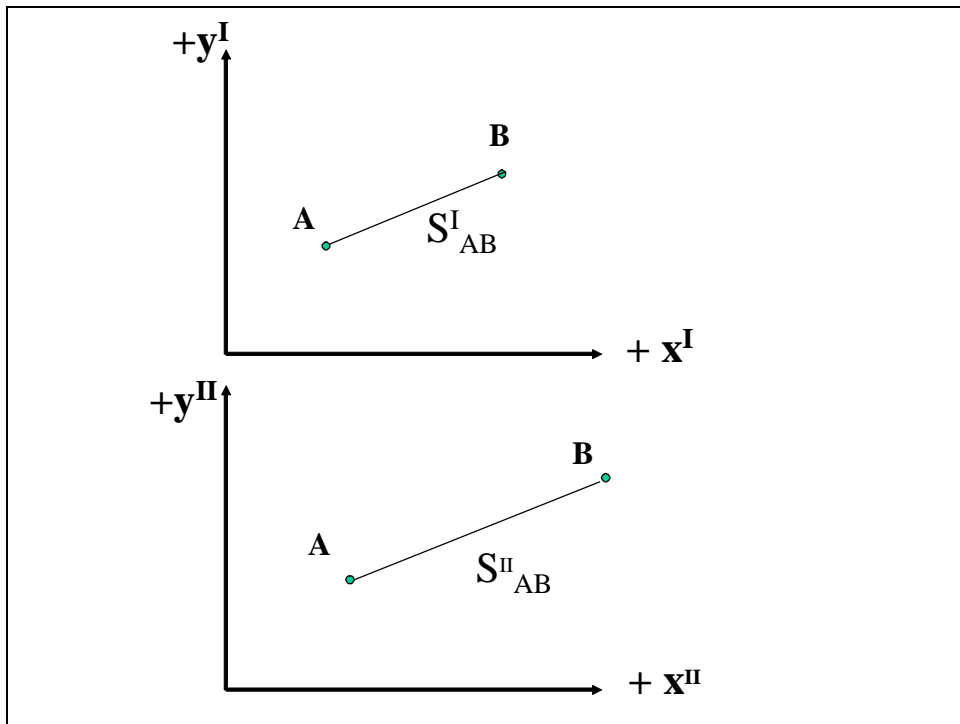
Για δύο τυχαία σημεία A και B που έχουν μεταξύ τους απόσταση  $S_{AB}^I$ ,  $S_{AB}^{II}$  στα δύο συστήματα συντεταγμένων, ο συντελεστής κλίμακας είναι:

$$m = \frac{S_{AB}^{II}}{S_{AB}^I} = \frac{\sqrt{\Delta x_{AB}^{II\ 2} + \Delta y_{AB}^{II\ 2}}}{\sqrt{\Delta x_{AB}^I\ 2 + \Delta y_{AB}^I\ 2}} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \text{όπου} \quad \Delta x_{AB}^I &= x_B^I - x_A^I, \quad \Delta y_{AB}^I = y_B^I - y_A^I \\ \Delta x_{AB}^{II} &= x_B^{II} - x_A^{II}, \quad \Delta y_{AB}^{II} = y_B^{II} - y_A^{II} \end{aligned}$$

Επομένως, οι συντεταγμένες στο σύστημα II υπολογίζονται ως:

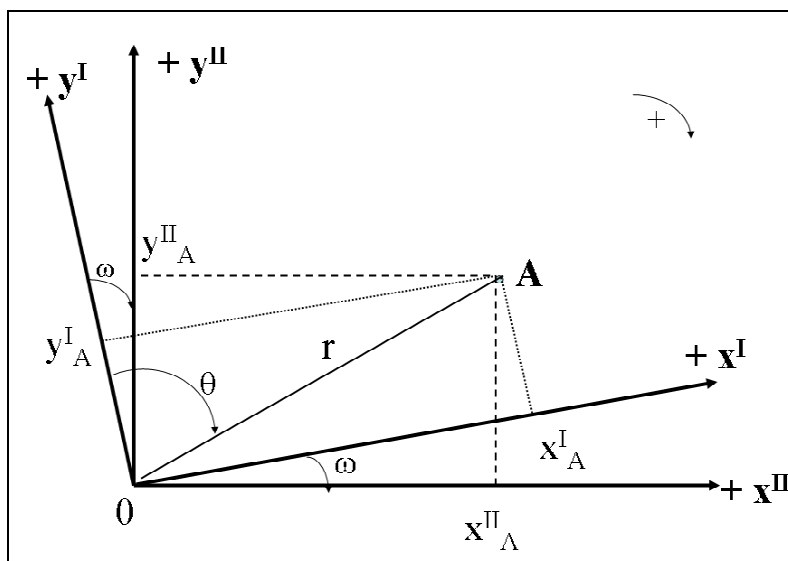
$$x^{II} = m x^I \quad \text{και} \quad y^{II} = m y^I \quad (1.44)$$



Σχήμα 1.21 Για  $S^I_{AB} \neq S^{II}_{AB}$  χρησιμοποιείται η κλίμακα παραμόρφωσης  $m$

#### 1.4.4γ Στροφή των αξόνων ως προς κοινή αρχή

Ο μετασχηματισμός στροφής αφήνει αναλλοίωτα τις αποστάσεις και τις γωνίες αλλά επηρεάζει τον προσανατολισμό. Για τα δύο συστήματα συντεταγμένων I και II, που φαίνονται στο σχήμα 1.22, έχουν κοινή αρχή O αλλά οι άξονες του συστήματος I πρέπει να στραφούν δεξιόστροφα κατά γωνία  $\omega$  (γωνία στροφής) για να ταυτιστούν με τους άξονες του συστήματος II.



Σχήμα 1.22 Μετασχηματισμός στροφής δύο ορθογώνιων συστημάτων συντεταγμένων με κοινή αρχή

Για το τυχαίο σημείο A με γνωστές ορθογώνιες συντεταγμένες  $(x^I, y^I)$ , οι αντίστοιχες συντεταγμένες του στο δεύτερο σύστημα II προσδιορίζονται βάσει των σχέσεων (1.34):

$$\begin{aligned}x^{II} &= r \sin(\theta - \omega) \\y^{II} &= r \cos(\theta - \omega)\end{aligned}\tag{1.45}$$

Η σχέση (1.45) γράφεται μετά από ανάπτυξη των τριγωνομετρικών όρων:

$$\begin{aligned}x^{II} &= r \sin\theta \cos\omega - r \cos\theta \sin\omega \\y^{II} &= r \cos\theta \cos\omega + r \sin\theta \sin\omega\end{aligned}\tag{1.46}$$

και με χρήση των σχέσεων (1.34) η παραπάνω σχέση απλοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned}x^{II} &= x \cos\omega - y \sin\omega \\y^{II} &= y \cos\omega + x \sin\omega\end{aligned}\tag{1.47}$$

Οι σχέσεις (1.46) μπορούν να γραφούν με την μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} x^{II} \\ y^{II} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \times \begin{bmatrix} x^I \\ y^I \end{bmatrix}\tag{1.48}$$

$$\text{όπου } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας R ονομάζεται «πίνακας στροφής» και δεν έχει μονάδες. Επίσης, εφόσον η γωνία  $\omega$  είναι προσημασμένη, η σχέση (1.48) ικανοποιεί τόσο την δεξιόστροφη όσο και την αριστερόστροφη φορά των αξόνων.

#### 1.4.4δ Μετασχηματισμός ομοιότητας

Ο μετασχηματισμός ομοιότητας αποτελεί συνδυασμό μετάθεσης, ενιαίας στροφής και κλίμακας, άρα απαιτούνται τέσσερις παράμετροι μετασχηματισμού  $[(x_0, y_0), \omega, m]$ . Άρα, για ένα σημείο του οποίου είναι γνωστή η θέση του  $(x^I, y^I)$  στο σύστημα συντεταγμένων I, και ζητείται να βρεθεί η αντίστοιχη θέση του στο σύστημα II δηλαδή  $(x^{II}, y^{II})$  θα πρέπει να είναι γνωστά η θέση  $(x_0, y_0)$  της αρχής των αξόνων των δύο συστημάτων, η κλίμακα παραμόρφωσης  $m$  και η γωνία στροφής του συστήματος I ως προς το σύστημα II. Η γενική σχέση που δίνει το μετασχηματισμό είναι:

$$\begin{aligned}x^{II} &= x_0^{II} + m(x^I \cos\omega - y^I \sin\omega) \\y^{II} &= y_0^{II} + m(x^I \sin\omega + y^I \cos\omega)\end{aligned}\tag{1.49}$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} x^{II} \\ y^{II} \end{bmatrix} = m\mathbf{R} \begin{bmatrix} x^I \\ y^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0^{II} \\ y_0^{II} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega \\ \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^I \\ y^I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0^{II} \\ y_0^{II} \end{bmatrix}\tag{1.50}$$

#### 1.4.4ε Προσδιορισμός παραμέτρων μετασχηματισμού

Για να γίνει μετασχηματισμός μεταξύ των δύο συστημάτων αναφοράς, αρκεί να υπάρχουν κοινά σημεία (τουλάχιστον δύο) με γνωστές συντεταγμένες και στα δύο συστήματα. Βάσει των κοινών αυτών σημείων γίνεται ο προσδιορισμός των παραμέτρων μετασχηματισμού. Τα κοινά σημεία θα πρέπει να είναι κατανομημένα στην περιοχή εφαρμογής για καλύτερο προσδιορισμό των παραμέτρων. Όταν υπάρχει μεγάλος αριθμός κοινών σημείων, ο προσδιορισμός των παραμέτρων γίνεται συνήθως με μαθηματικές μεθόδους, όπως με χρήση της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων.

Μετά τον προσδιορισμό των παραμέτρων, δηλαδή την μετάθεση της αρχής των αξόνων, την στροφή των αξόνων και την κλίμακα, ακολουθεί ο προσδιορισμός των συντεταγμένων για όλα τα υπόλοιπα σημεία στο νέο σύστημα.

Έστω δύο σημεία A και B των οποίων οι θέσεις τους  $(x_A^I, y_A^I)$ ,  $(x_B^I, y_B^I)$ ,  $(x_A^{II}, y_A^{II})$ ,  $(x_B^{II}, y_B^{II})$  είναι γνωστές σε δύο συστήματα ορθογώνιων συντεταγμένων I και II. Για τον προσδιορισμό των παραμέτρων μετασχηματισμού μεταξύ των δύο συστημάτων πρέπει να υπολογιστούν τα παρακάτω:

- Η απόσταση  $S_{AB}$  και η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  για κάθε σύστημα, δηλαδή

$$\alpha_{AB}^I = \arctan \frac{\Delta x_{AB}^I}{\Delta y_{AB}^I}, \quad \alpha_{AB}^{II} = \arctan \frac{\Delta x_{AB}^{II}}{\Delta y_{AB}^{II}}$$
$$S_{AB}^I = \sqrt{\Delta x_{AB}^I{}^2 + \Delta y_{AB}^I{}^2}, \quad S_{AB}^{II} = \sqrt{\Delta x_{AB}^{II}{}^2 + \Delta y_{AB}^{II}{}^2}$$

- Η κλίμακα  $m$  του συστήματος II ως προς το σύστημα I, δηλαδή

$$m = \frac{S_{AB}^{II}}{S_{AB}^I}$$

- Η γωνία στροφής  $\omega$  του συστήματος II ως προς το σύστημα I, δηλαδή

$$\omega = \alpha_{AB}^I - \alpha_{AB}^{II}$$

- Το διάνυσμα της μετάθεσης  $(x_0^{II}, y_0^{II})$  βάσει ενός από τα δύο γνωστά σημεία, έστω το σημείο A, δηλαδή

$$x_0^{II} = x_A^{II} - (\cos \omega) x_A^I m + (\sin \omega) y_A^I m$$
$$y_0^{II} = y_A^{II} - (\sin \omega) x_A^I m - (\cos \omega) y_A^I m$$

Οι σχέσεις μπορούν να εφαρμοσθούν είτε για το σημείο A ή για το σημείο B. Όταν εφαρμοσθούν οι σχέσεις και για τα δύο σημεία A και B τότε λαμβάνεται ο μέσος όρος των παραμέτρων μετασχηματισμού.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Δίνονται οι ορθογώνιες συντεταγμένες ενός σημείου A ( $x_A, y_A$ ) = (713.64m, 496.72m). Έχουν μετρηθεί η απόσταση μεταξύ του A και σημείου B ίση με  $S_{AB}=135.25\text{m}$ , και η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}=32.9645 \text{ grad}$ . Ζητείται να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του σημείου B.

Είναι:

$$\sin\alpha_{12} = +0.49497$$

$$\cos\alpha_{12} = +0.86891$$

$$\Delta x = S \sin\alpha_{12} = + 66.95\text{m}$$

$$\Delta y = S \cos\alpha_{12} = + 117.52\text{m}$$

$$x_B = x_A + \Delta x = 780.59\text{m}$$

$$y_B = y_A + \Delta y = 614.24\text{m}$$

- Δίνονται οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες δύο σημείων A και B, ( $x_A, y_A$ )=(713.64m, 496.72m) και ( $x_B, y_B$ )=(780.59m, 614.24m). Ζητείται να υπολογισθούν η απόσταση μεταξύ των A και B και η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$ .

Είναι:

$$\Delta x = x_B - x_A = + 66.95\text{m}$$

$$\Delta y = y_B - y_A = + 117.52\text{m}$$

$$S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{66.95^2 + 117.52^2} = 135.25\text{m}$$

$$\tan\alpha_{12} = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{+ 66.95}{+ 117.52} = 0.5697$$

$$\Rightarrow \alpha_{12} = 32.9663 \text{ grad}$$

Να σημειωθεί ότι μια εναλλακτική σχέση για την γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  δίνεται από τους παρακάτω τύπους:

$$\sin\alpha_{AB} = \frac{x_B - x_A}{S}$$

$$\text{ή } \cos\alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{S}$$

- Στην όδευση του σχήματος έχουν μετρηθεί οι γωνίες θλάσης  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  και δίνεται η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_0$ :

$$\alpha_0 = 157.9422 \text{ grad}$$

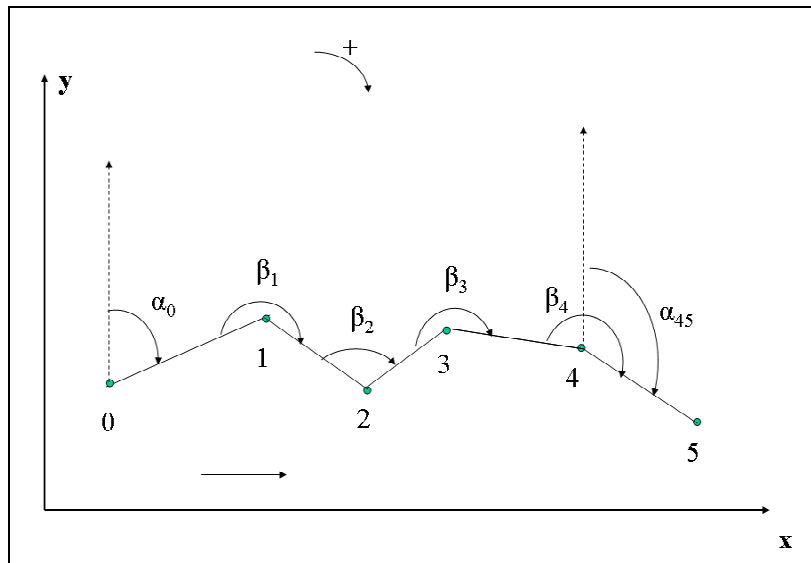
$$\beta_1 = 192.4735 \text{ grad}$$

$$\beta_2 = 196.5106 \text{ grad}$$

$$\beta_3 = 207.5641 \text{ grad}$$

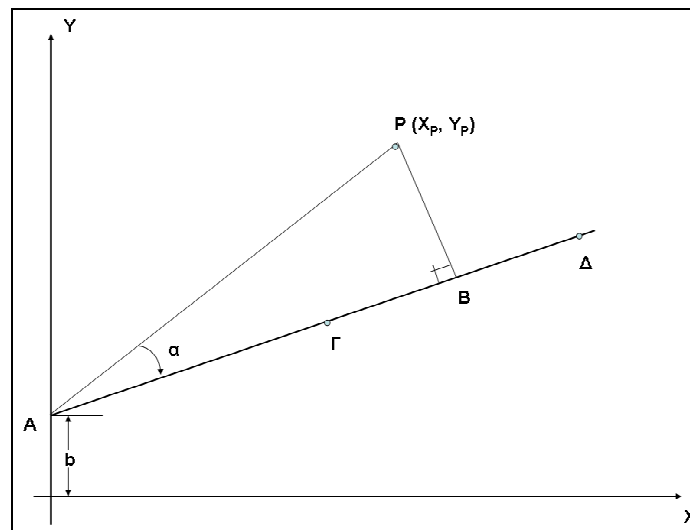
$$\beta_4 = 212.6123 \text{ grad} .$$

Να υπολογισθεί η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{45}$ .



Είναι:  $\alpha_{45} = \alpha_0 + \Sigma\beta + n \cdot 200^{\text{grad}} - k \cdot 400^{\text{grad}} =$   
 $157.9422 + 809.1605 + 4 \times 200 - k \times 400 =$   
 $1767.1027 - 4 \times 400 = 167.1027 \text{ grad} \quad (k = 4)$

- Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι συντεταγμένες του σημείου P (1123.82, 509.41)m και οι συντεταγμένες των σημείων Γ(865.49, 416.73)m και Δ(1557.41, 669.09)m. Να υπολογισθεί το μήκος της κάθετης απόστασης PB προς την ευθυγραμμία ΑΔ.



Το παραπάνω πρόβλημα συναντάται συχνά στις καθημερινές τοπογραφικές εργασίες και αφορά στο προσδιορισμό της κάθετης απόστασης από σημείο σε ευθυγραμμία (π.χ. για έλεγχο ευθυγραμμίας, σε εργασίες διανομής κλπ).

Η κλίση της ευθυγραμμίας AB υπολογίζεται από την γωνία διεύθυνσης χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ, αφού τα σημεία αυτά ανήκουν στην ίδια ευθυγραμμία δηλ.

$$\tan \alpha_{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta X_{\Gamma\Delta}}{\Delta Y_{\Gamma\Delta}} = \frac{669.09 - 416.73}{1557.41 - 865.49} = 0.364724245$$

Επίσης, για την εξίσωση της ευθυγραμμίας υπολογίζεται η ποσότητα b:

$$b = 416.73 - 0.364724245 \times 865.49 = 101.065\text{m}$$

Το μήκος της απόστασης AP είναι:

$$AP = \sqrt{(1123.82 - 0)^2 + (509.41 - 101.065)^2} = 1195.708\text{ m}$$

Η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AP}$  είναι:

$$\alpha_{AP} = \tan^{-1} \left( \frac{\Delta X_{AP}}{\Delta Y_{AP}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{1123.82 - 0}{509.41 - 101.07} \right) + 0^{\text{grad}} = 77.8125^{\text{grad}}$$

Η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  είναι:

$$\alpha_{AB} = \tan^{-1} \left( \frac{1}{0.364724245} \right) + 0^{\text{grad}} = 77.3540^{\text{grad}}$$

Επομένως, η γωνία  $\alpha$  είναι:

$$\alpha = \alpha_{AP} - \alpha_{AB} = 77.8125 - 77.3540 = 0.4585^{\text{grad}}$$

Η κάθετη απόσταση BP από το σημείο B στην ευθυγραμμία AB είναι:

$$BP = 1195.708 \times \sin(0.4585^{\text{grad}}) = 8.612\text{m}$$

## 1.5 Ασκήσεις

1. Να γίνει μετατροπή σε ακτίνια και μοίρες (εξηκονταδική και δεκαδική μορφή) των παρακάτω γωνιών:

(α) 53.0000 grad                      (β) 42.8701 grad      (γ) 315.2061 grad

2. Να δώσετε το τελικό αποτέλεσμα των παρακάτω με τον απαραίτητο αριθμό των σημαντικών ψηφίων:

(α) άθροισμα των αριθμών 31.65, 0.00231, 230, 8.8

(β) άθροισμα των αριθμών 1.252, 0.06, 1240, 483.7

(γ) γινόμενο των αριθμών 6781.49 και 4.7

(δ) τον λόγο των αριθμών 6781.49 και 2.88

2. Δύο διαφορετικοί ολοκληρωμένοι γεωδαιτικοί σταθμοί, ίδιας ακρίβειας κατά τον κατασκευαστή, χρησιμοποιήθηκαν για την μέτρηση ενός μήκους και έδωσαν τα παρακάτω αποτελέσματα:

Μήκος μετρημένο με όργανο A (m)	Μήκος μετρημένο με όργανο B (m)
1056.429	1056.435
1056.435	1056.435
1056.440	1056.432
1056.432	1056.436
1056.433	1056.435
1056.436	1056.436
	1056.434
	1056.435

Να υπολογισθεί η καλύτερη τιμή του μήκους και το τυπικό της σφάλμα.

(Απάντηση:  $1056.453\text{m} \pm 0.4\text{mm}$ )

4. Κατά την αποτύπωση κωνικού ανοίγματος σήραγγας σε ένα ορυχείο μετρήθηκε η διάμετρος της βάσης ίσης με  $150\text{m} \pm 0.5\text{m}$  και το ύψος ίσο με  $50\text{m} \pm 1\text{m}$ . Να υπολογισθεί ο όγκος του κώνου και το τυπικό του σφάλμα.

(Απάντηση:  $294524.3\text{m}^3 \pm 6209\text{m}^3$ )

5. Μια γωνία μετρήθηκε 6 φορές από τον παρατηρητή A και 10 φορές από τον παρατηρητή B, με διαφορετικά θεοδόλιχα:

Παρατηρητής A:  $\theta_A = 136.7735\text{grad}$   $\sigma_{\theta A} = \pm 7\text{cc}$  (τυπικό σφάλμα της μιας μέτρησης)

Παρατηρητής B:  $\theta_B = 136.7796\text{grad}$   $\sigma_{\theta B} = \pm 0.0020\text{grad}$  (τυπικό σφάλμα της μιας μέτρησης).

Να υπολογισθεί η καλύτερη τιμή της γωνίας και το τυπικό της σφάλμα.

(Απάντηση:  $136.7745\text{ grad} \pm 56\text{cc}$ )

6. Να υπολογισθούν οι γεωδαιτικές συντεταγμένες του σημείου A όταν δίνονται οι τριδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες του  $X = 4556918.183\text{m}$ ,  $Y = 2044857.785\text{m}$ ,  $Z = 3955488.572\text{m}$ .

7. Το διάνυσμα βάσης μεταξύ δύο σημείων A και B μετρήθηκε με GPS και βρέθηκε ίσο με ( $\Delta X = 457.984\text{m}$ ,  $\Delta Y = 124.873\text{m}$ ,  $\Delta Z = 239.016\text{m}$ ) στο παγκόσμιο σύστημα WGS84. Οι γεωδαιτικές συντεταγμένες του σημείου A είναι ( $\varphi = 34^\circ 15' 25.6019''$ ,  $\lambda = 75^\circ 42' 17.8406''$ ). Να υπολογιστεί το διάνυσμα της βάσης ( $\Delta n$ ,  $\Delta e$ ,  $\Delta u$ ) σε τοπικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς.



## 2. ΓΩΝΙΕΣ – ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

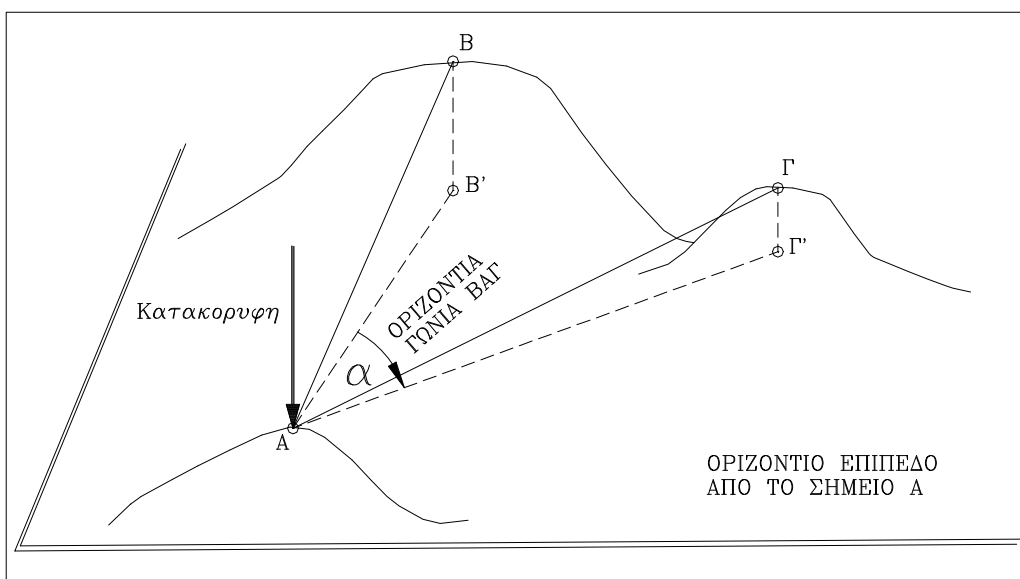
### 2.1 ΓΕΝΙΚΑ

Στην Τοπογραφία οι γωνίες αποτελούν βασικά μετρούμενα μεγέθη. Στο ύπαιθρο οι μετρούμενες γωνίες είναι *οριζόντιες* και *κατακόρυφες*. Οι οριζόντιες γωνίες χρησιμοποιούνται για την απεικόνιση και τον προσδιορισμό των σημείων της επιφάνειας του εδάφους. Οι κατακόρυφες γωνίες χρησιμοποιούνται για την αναγωγή των κεκλιμένων μηκών σε οριζόντια και τον προσδιορισμό των υψομετρικών διαφορών μεταξύ αυτών των σημείων. Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζονται οι γωνίες, οριζόντιες και κατακόρυφες, παρουσιάζονται τα όργανα που χρησιμοποιούνται στο ύπαιθρο για την μέτρηση τους, δίνεται η μεθοδολογία των μετρήσεων και η επεξεργασία τους. Τέλος δίνονται οι αναγωγές των οριζόντιων γωνιών και η εκτίμηση της ακρίβειας τους.

### 2.2 ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

#### 2.2.1 Ορισμός

*Οριζόντια γωνία* (BAΓ) (σχ. 2.1) ονομάζεται η δεξιόστροφη επίπεδη γωνία  $\alpha$  της διέδρης, της οποίας τα επίπεδα  $E_1$  και  $E_2$  ορίζονται από την κατακόρυφη που περνά από το σημείο A και τα σημεία B και Γ αντίστοιχα.



**Σχήμα 2.1** Η οριζόντια γωνία (BAΓ). Τα σημεία B' και Γ' είναι οι ορθές προβολές των σημείων B και Γ πάνω στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο A

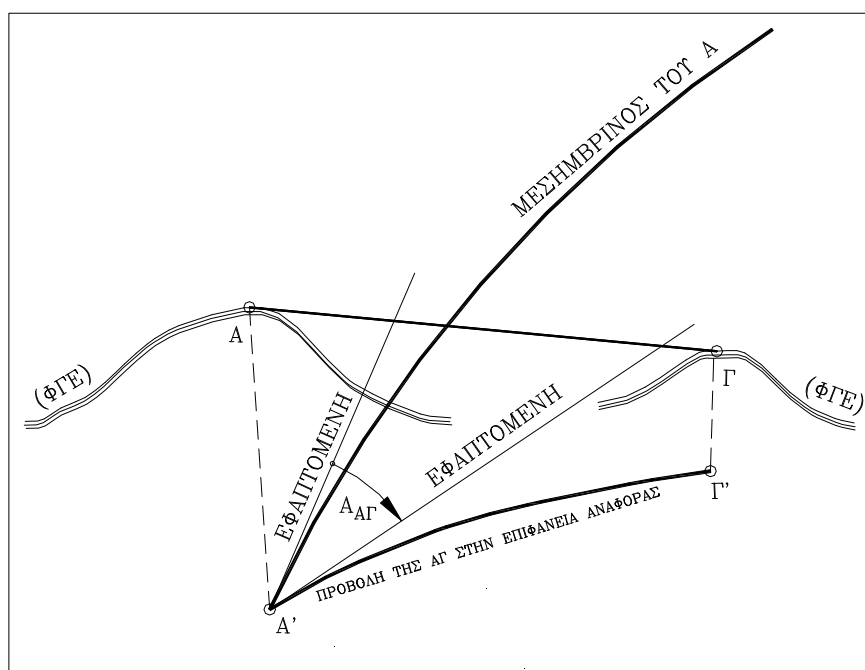
Με βάση αυτόν τον ορισμό είναι φανερό ότι η οριζόντια γωνία  $\alpha = \angle B'A\Gamma'$  μετριέται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο που είναι κάθετο στην κατακόρυφη που περνά από το σημείο A. Τα σημεία B' και Γ' είναι οι ορθές προβολές των B και Γ πάνω σε αυτό το επίπεδο.

Η οριζόντια γωνία (ΓAB) έχει μέτρο  $\alpha' = 400^\circ - \alpha$ . Έτσι αν η (BAΓ) είναι κυρτή γωνία (μικρότερη από  $200^\circ$ ) τότε η (ΓAB) είναι μη κυρτή (μεγαλύτερη από  $200^\circ$ ) και αντίστροφα.

### 2.2.2 Αζιμούθιο

Αν το κατακόρυφο επίπεδο  $E_1$ , που ορίστηκε στην ενότητα 2.2.1, περιέχει τον άξονα περιστροφής της γης και  $E_2$  το δεύτερο επίπεδο της διεδρης γωνίας, τότε η αντίστοιχη οριζόντια γωνία (σχ. 2.2) ονομάζεται *αστρονομικό ή πραγματικό ή γεωγραφικό αζιμούθιο*  $A_{AG}$  της πλευράς (ΑΓ).

Το συγκεκριμένο κατακόρυφο επίπεδο  $E_1$  τέμνει την επιφάνεια αναφοράς κατά τον πραγματικό (ή γεωγραφικό) μεσημβρινό που περνά από το σημείο Α. Ο μεσημβρινός περνά από τον πραγματικό ή γεωγραφικό βόρειο (και νότιο) πόλο Ο, επομένως η βασική (αρχική) διεύθυνση μέτρησης, του αστρονομικού ή πραγματικού ή γεωγραφικού αζιμουθίου  $A_{AG}$  της πλευράς (ΑΓ), είναι η *διεύθυνση του αστρονομικού ή πραγματικού ή γεωγραφικού βορρά*.



Σχήμα 2.2 Το Αζιμούθιο ( $A_{AG}$ ) της ευθείας (ΑΓ)

Θεωρώντας την γη ως ένα μαγνήτη, είναι δυνατό να οριστεί ο βόρειος και ο νότιος μαγνητικός πόλος της. Αν το κατακόρυφο επίπεδο  $E_1$  περιλαμβάνει την ευθεία που συνδέει τον βόρειο και τον νότιο μαγνητικό πόλο της γης, τότε η αντίστοιχη οριζόντια γωνία, ονομάζεται *μαγνητικό αζιμούθιο* της πλευράς (ΑΓ).

Το συγκεκριμένο κατακόρυφο επίπεδο τέμνει τη γη κατά τον μαγνητικό μεσημβρινό που περνά από το σημείο Α. Γιαυτό τον λόγο η βασική (αρχική) διεύθυνση μέτρησης του μαγνητικού αζιμουθίου της πλευράς (ΑΓ) είναι η *διεύθυνση του μαγνητικού βορρά*. Οι μαγνητικοί πόλοι δεν είναι σταθεροί και δεν ταυτίζονται με τους γεωγραφικούς πόλους. Στην πράξη η διεύθυνση του μαγνητικού μεσημβρινού ορίζεται με την πυξίδα.

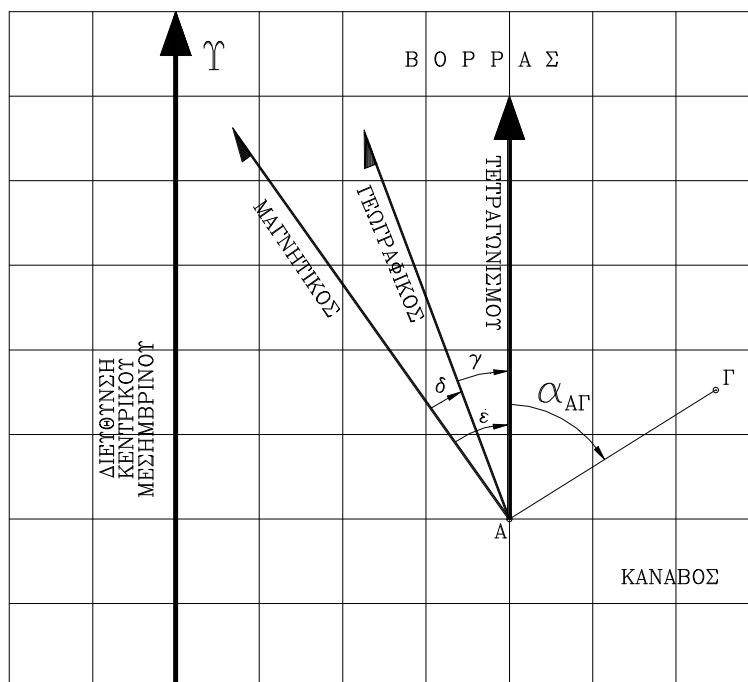
### 2.2.3 Γωνία διεύθυνσης

Από τις μετρήσεις που γίνονται στο ύπαιθρο (γωνίες και μήκη), προσδιορίζονται οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων της φυσικής γήινης επιφάνειας ΦΓΕ, με σκοπό την απεικόνιση της ΦΓΕ πάνω σε μια αναπτυκτική (επίπεδη) επιφάνεια. Η διεύθυνση του κεντρικού μεσημβρινού, που περνά από το μέσον της επιφάνειας,

ταυτίζεται με τον άξονα των (Y) ενός δεξιόστροφου ορθογώνιου συστήματος αναφοράς (XOY).

Στα τοπογραφικά διαγράμματα, με βάση αυτή την διεύθυνση, κατασκευάζεται πλέγμα γραμμών παράλληλων προς τους άξονες (Y) και (X), σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους. Το πλέγμα των παράλληλων υλοποιεί το σύστημα αναφοράς και λέγεται *κάναβος*. Η διεύθυνση του ημιάξονα (+Y) συνηθίζεται να λέγεται *βορράς τετραγωνισμού*. Η συγκεκριμένη διεύθυνση συμπίπτει με τον άξονα των (Y) του κρατικού συστήματος αναφοράς. Είναι φανερό ότι η διεύθυνση του βορρά τετραγωνισμού ταυτίζεται μόνο με την διεύθυνση του κεντρικού μεσημβρινού ενώ οι υπόλοιπες αποκλίνουν κατά γωνίες  $\gamma$ . Η οριζόντια γωνία που έχει ως βασική (αρχική) διεύθυνση μια παράλληλη με την διεύθυνση του βορρά τετραγωνισμού (AB) και η άλλη πλευρά της είναι η ευθεία (AG), λέγεται *γωνία διεύθυνσης* ή *γωνία προσανατολισμού*  $\alpha_{AG}$  της πλευράς (AG) (σχ. 2.3).

Αν ο άξονας των (Y) έχει αυθαίρετη διεύθυνση τότε η οριζόντια γωνία που έχει βασική (αρχική) διεύθυνση παράλληλη με τον αυθαίρετο ημιάξονα (+Y), λέγεται *αυθαίρετη γωνία διεύθυνσης* ή *αυθαίρετη γωνία προσανατολισμού*. Σε αυτή την περίπτωση το σύστημα αναφοράς (XOY) και ο αντίστοιχος κάναβος, που το υλοποιεί, είναι αυθαίρετα.



**Σχήμα 2.3** Βορράς τετραγωνισμού. Γωνία διεύθυνσης ( $\alpha_{AG}$ ) της πλευράς (AG)

Στα τοπογραφικά διαγράμματα ο κάναβος χρησιμοποιείται για μετρητικούς σκοπούς. Η απόσταση των γραμμών του είναι πάντοτε σταθερή και συνήθως 10cm, με αποτέλεσμα να σχηματίζονται τετράγωνα διαστάσεων 10cm x 10cm. Με βάση τις συντεταγμένες του κανάβου προσδιορίζεται η θέση ενός σημείου πάνω στο τοπογραφικό διάγραμμα με ακρίβεια ανάλογη της χάραξης του κανάβου και της κλίμακας του διαγράμματος.

## 2.2.4 Γωνίες βασικών διευθύνσεων

Όπως αναφέρθηκε στις προηγούμενες ενότητες οι βασικές (αρχικές) διευθύνσεις μέτρησης των οριζόντιων γωνιών είναι: η διεύθυνση του πραγματικού βορρά, η διεύθυνση του μαγνητικού βορρά, η διεύθυνση του βορρά τετραγωνισμού και η αυθαίρετη διεύθυνση.

Οι βασικές διευθύνσεις μέτρησης των οριζόντιων γωνιών σχηματίζουν μεταξύ τους αντίστοιχες οριζόντιες γωνίες. Οι γωνίες αυτές είναι οι επόμενες (σχ. 2.3):

*Μαγνητική απόκλιση*  $\delta$ , είναι η οριζόντια γωνία μεταξύ των διευθύνσεων του μαγνητικού και του γεωγραφικού βορρά. Η μαγνητική απόκλιση μεταβάλλεται διαχρονικά από τόπο σε τόπο, μέσα στην διάρκεια του χρόνου αλλά και κατά την διάρκεια της ημέρας. Διακρίνεται σε ανατολική και δυτική σε σχέση με τον γεωγραφικό βορρά. Το μέτρο της, για την Ελλάδα, είναι της τάξης των λίγων μοιρών ανατολική.

*Γεωδαιτική απόκλιση*  $\epsilon$ , είναι η οριζόντια γωνία μεταξύ του μαγνητικού βορρά και του βορρά τετραγωνισμού.

*Σύγκλιση μεσημβρινού*  $\gamma$ , είναι η οριζόντια γωνία μεταξύ του γεωγραφικού βορρά και του βορρά τετραγωνισμού. Στον κεντρικό μεσημβρινό η τιμή της γωνίας  $\gamma = 0$ .

Μεταξύ αυτών των οριζόντιων γωνιών ισχύει η σχέση:

$$\epsilon = \delta + \gamma \quad (2.1)$$

Η τιμή της γωνίας  $\epsilon$  χρησιμοποιείται στο πλαίσιο εργασιών πάνω σε τοπογραφικούς χάρτες ή παλαιότερα σε γεωδαιτικές εργασίες όπου χρησιμοποιούνταν πυξίδες.

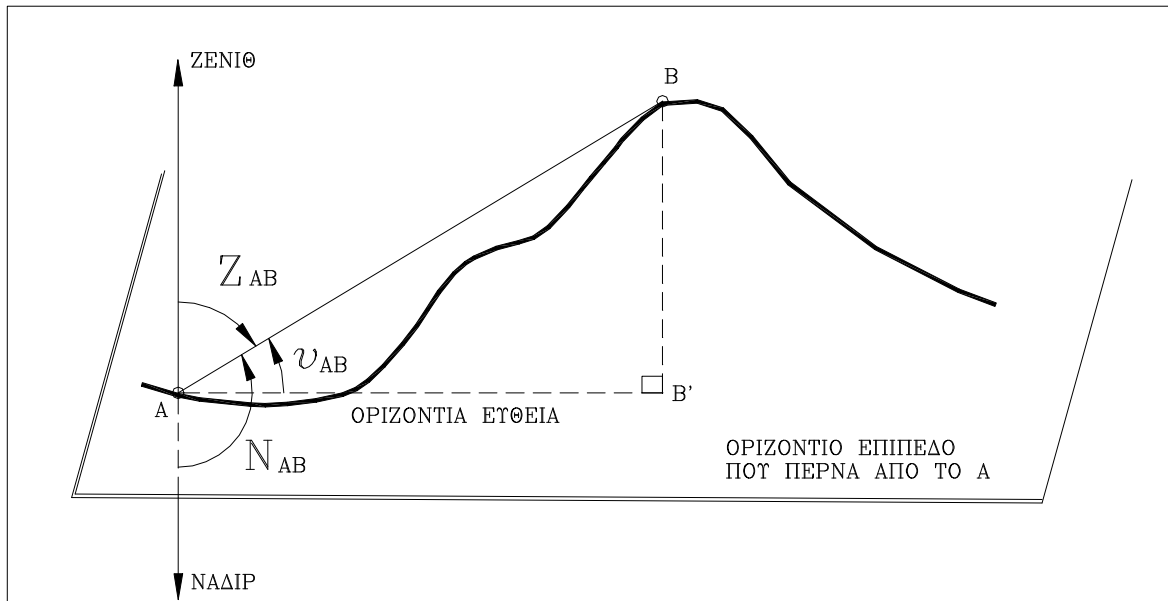
## 2.3 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

### 2.3.1 Ορισμοί

*Γωνία ύψους της πλευράς (AB)*,  $v_{AB}$  (σχ. 2.4), ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από την ευθεία (AB) και την προβολή της πάνω στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο A. Στην περίπτωση που η ευθεία (AB) βρίσκεται πάνω από αυτό το οριζόντιο επίπεδο η  $v_{AB}$  είναι θετική, με πεδίο τιμών  $0 \leq v_{AB} \leq 100^{\circ}$ . Ενώ όταν η ευθεία (AB) βρίσκεται κάτω από το ίδιο οριζόντιο επίπεδο η  $v_{AB}$  είναι αρνητική, με πεδίο τιμών  $-100^{\circ} \leq v_{AB} \leq 0$ .

*Ζενίθια γωνία της πλευράς (AB)*,  $Z_{AB}$  (σχ. 2.4), ονομάζεται η γωνία που σχηματίζεται από την κατακόρυφη που περνά από το σημείο A και την διεύθυνση της πλευράς (AB). Η ζενίθια γωνία μετριέται από το ζενίθ προς το ναδίρ και το πεδίο τιμών της είναι  $0 \leq (Z_{AB}) \leq 200^{\circ}$ . Η ζενίθια γωνία και η γωνία ύψους της πλευράς (AB) είναι συμπληρωματικές γωνίες επομένως ισχύει :

$$Z_{AB} + v_{AB} = 100^{\circ} \quad (2.2)$$



**Σχήμα 2.4** Κατακόρυφες γωνίες της πλευράς (AB). Γωνία ύψους  $\upsilon_{AB}$ , ζενίθια γωνία  $Z_{AB}$ , και ναδιριαία γωνία  $N_{AB}$

Ναδιριαία γωνία της πλευράς (AB),  $N_{AB}$  (σχ. 2.4), ορίζεται όπως και η αντίστοιχη ζενίθια γωνία  $Z_{AB}$ , με την διαφορά ότι μετριέται από το ναδίρ προς το ζενίθ. Το πεδίο τιμών της είναι  $0 \leq (N_{AB}) \leq 200^s$ .

### 2.3.2 Κλίση ευθείας

Κλίση της ευθείας (AB),  $i_{AB}$  (σχ. 2.5), λέγεται η εφαπτομένη της γωνίας ύψους της ευθείας AB,  $\upsilon_{AB}$ , δηλαδή ισχύει :

$$i_{AB} = \tan \upsilon_{AB} \quad (2.3)$$

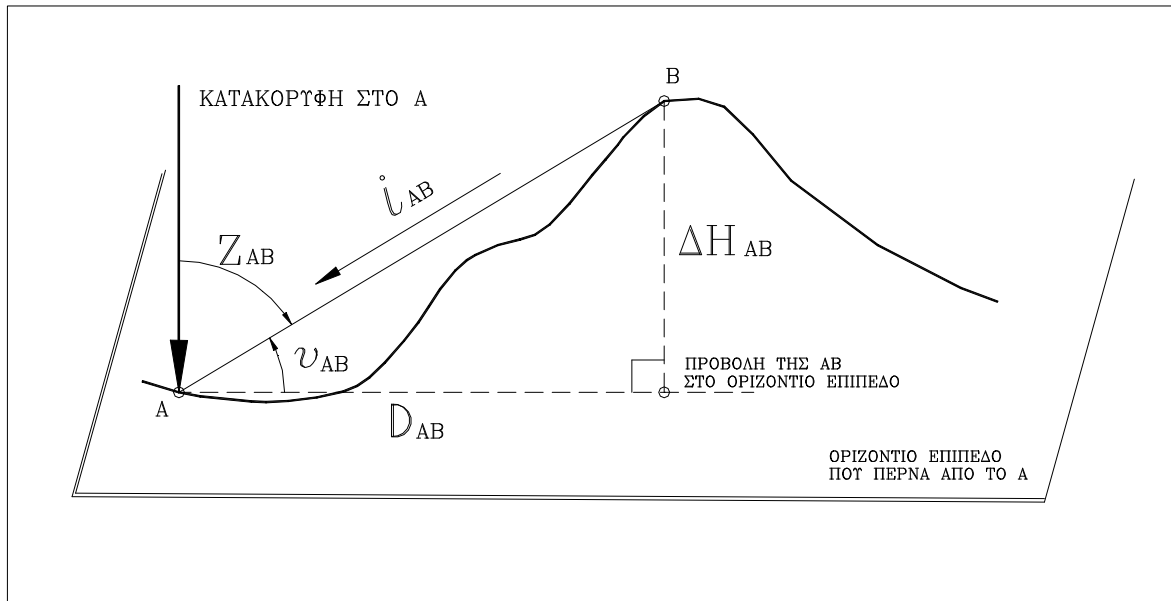
αντίστοιχα για την ζενίθια γωνία  $Z_{AB}$  της ευθείας (AB) ισχύει :

$$i_{AB} = \cot Z_{AB} \quad (2.4)$$

Η κλίση της ευθείας (AB) δίνεται συνήθως επί τοις εκατό (%), σε αυτή την περίπτωση ισχύουν οι αντίστοιχες σχέσεις :

$$i_{AB} \% = \tan \upsilon_{AB} \cdot 100 \quad (2.5)$$

$$i_{AB} \% = \cot Z_{AB} \cdot 100 \quad (2.6)$$



Σχήμα 2.5 Κλίση  $i_{AB}$  της ευθείας (AB)

Η κλίση  $i_{AB}$ , όπως και η αντίστοιχη γωνία ύψους  $\upsilon_{AB}$  της ευθείας (AB), παίρνει θετικές τιμές όταν η ευθεία (AB) βρίσκεται πάνω από το οριζόντιο επίπεδο, που περνά από το σημείο A, και αρνητικές τιμές όταν η (AB) βρίσκεται κάτω από το οριζόντιο επίπεδο, που περνά από το σημείο A.

Μερικές χαρακτηριστικές τιμές της κλίσης  $i_{AB}\%$  σχετικές με την ζενίθια γωνία  $Z_{AB}$  (ή  $\upsilon_{AB}$ ) της ευθείας AB είναι οι επόμενες :

$Z_{AB} = 0^\circ$  (ή  $\upsilon_{AB} = 100^\circ$ ),  $i_{AB} = +\infty\%$  (κατακόρυφος τοίχος A κάτω, B πάνω)

$Z_{AB} = 50^\circ$  (ή  $\upsilon_{AB} = 50^\circ$ ),  $i_{AB} = 100\%$

$Z_{AB} = 100^\circ$  (ή  $\upsilon_{AB} = 0^\circ$ ),  $i_{AB} = 0\%$  (A, B πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο)

$Z_{AB} = 150^\circ$  (ή  $\upsilon_{AB} = -50^\circ$ ),  $i_{AB} = -100\%$

$Z_{AB} = 200^\circ$  (ή  $\upsilon_{AB} = -100^\circ$ ),  $i_{AB} = -\infty\%$  (κατακόρυφος τοίχος A πάνω, B πάνω)

Όπως φαίνεται από τις προηγούμενες χαρακτηριστικές τιμές, η κλίση ( $i_{AB}$ ) ορίζεται στο διάστημα  $-\infty \leq (i_{AB}) \leq +\infty$ .

Εκτός του ορισμού που δόθηκε, με γεωδαιτικούς όρους, η κλίση μπορεί να ορισθεί ως ο λόγος της υψομετρικής διαφοράς  $\Delta H_{AB}$  των σημείων A και B, προς την απόστασή τους  $D_{AB}$  (σχ. 2.5).

Επομένως ισχύει:

$$i_{AB} = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} \quad (2.7)$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Μεταξύ των σημείων A και B μετρήθηκε η  $Z_{AB}=108.3520$  s . Να υπολογισθεί η κλίση  $i_{AB}$  % .

Με βάση τον ορισμό της κλίσης ισχύει :

$$\text{Εφόσον } Z_{AB} + v_{AB} = 100^s \Rightarrow v_{AB} = 100 - 108.3520 = -8.3520^s$$

$$\text{Άρα } i_{AB} = \tan(-8.3520) = -0.1320 \Rightarrow i_{AB} = -13.2\%$$

Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο και με την σχέση  $i_{AB} = \cot(108.3520) = -0.1320 \Rightarrow i_{AB} = -13.2\%$

- Η κλίση και η απόσταση μεταξύ των σημείων A και B δίνονται αντίστοιχα  $i_{AB} = 7.3\%$ ,  $D_{AB} = 24.46\text{m}$ . Να υπολογισθεί η υψομετρική διαφορά των σημείων  $\Delta H_{AB}$ . Ποια θα ήταν η υψομετρική διαφορά των σημείων A, B αν η κλίση  $i_{AB} = 7.3\%$ .

Από την σχέση  $i_{AB} = \frac{\Delta H_{AB}}{D_{AB}} \Rightarrow \Delta H_{AB} = 0.073 \cdot 24.46 = 1.79\text{m}$ . Το σημείο B

βρίσκεται ψηλότερα από το σημείο A κατά 1.79 m.

Αν  $i_{AB} = -7.3\%$  τότε το σημείο B θα ήταν χαμηλότερα από το A κατά 1.79 m.

## 2.4 ΟΡΓΑΝΑ

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται τα όργανα που χρησιμοποιούνται στο ύπαιθρο για την μέτρηση των οριζόντιων και κατακόρυφων γωνιών. Συγκεκριμένα γίνεται η περιγραφή του βασικού οργάνου μέτρησης των γωνιών που είναι το *θεοδόλιχο* και αναφέρονται οι συνθήκες λειτουργίας του. Στη συνέχεια παρουσιάζονται άλλα όργανα για την μέτρηση των γωνιών. Τέλος γίνεται αναφορά στα βοηθητικά όργανα που χρησιμοποιούνται κατά την διάρκεια των μετρήσεων στο ύπαιθρο.

### 2.4.1 Θεοδόλιχο

Το *θεοδόλιχο* είναι το γωνιομετρικό όργανο που χρησιμοποιείται τόσο στη Γεωδαισία όσο και την Αστρονομία για την μέτρηση των οριζόντιων και των κατακόρυφων γωνιών. Η μέτρηση της γωνίας, που είναι βασικό γεωμετρικό στοιχείο των σχημάτων, υπήρξε σημαντικό πρόβλημα για τους μηχανικούς αλλά και για τους αστρονόμους από την αρχαιότητα με την εμφάνιση της επιστήμης της Γεωμετρίας. Η διόπτρα του Ήρωνα (100 π.Χ.), με μικρές παραλλαγές και βελτιώσεις, έδωσε λύση στο πρόβλημα μέχρι τον 17<sup>ο</sup> αιώνα.

Το 1730 ο Άγγλος μηχανικός Sisson επινόησε και κατασκεύασε ένα γωνιομετρικό όργανο στο οποίο έδωσε το όνομα “Theodolitus”, από τις ελληνικές λέξεις «θεάομαι» (παρατηρώ) και «δολιχόν» (μακριά) γραμμένες με λατινικούς χαρακτήρες. Αυτό το όργανο είχε τα βασικά χαρακτηριστικά των σύγχρονων θεοδολίων.

Μετά τον πρώτο παγκόσμιο πόλεμο, αρχές της δεκαετίας του 1920, ο Ελβετός μηχανικός Henri Wild τελειοποίησε και έδωσε την τελική μορφή στο σύγχρονο *οπτικό θεοδόλιχο* που χρησιμοποιήθηκε μέχρι τις τελευταίες δεκαετίες του 20<sup>ου</sup>

αιώνα. Το θεοδόλιχο που είχε την δυνατότητα να μετρά και μήκη με οπτική μέθοδο ονομάστηκε *ταχύμετρο*. Με τον όρο ταχύμετρο επικράτησε να εννοείται το θεοδόλιχο με μειωμένη ακρίβεια, ενώ αντίθετα το όνομα που έδωσε ο Sisson, θεοδόλιχο, διατηρήθηκε στα γωνιομετρικά όργανα με αυξημένη ακρίβεια.

Μετά την εξέλιξη της τεχνολογίας και των ηλεκτρονικών υπολογιστών, στα τέλη του 20<sup>ου</sup> αιώνα, το οπτικό θεοδόλιχο αντικαταστάθηκε από το *ψηφιακό θεοδόλιχο*, στο οποίο γρήγορα ενσωματώθηκε ηλεκτρονικό όργανο μέτρησης μηκών. Στη συνέχεια αυτό το σύνθετο όργανο εξελίχθηκε σε μικρό ηλεκτρονικό υπολογιστή, ο οποίος σήμερα είναι σε θέση να αποθηκεύει τις μετρήσεις και να επιλύει απλά γεωδαιτικά προβλήματα στο ύπαιθρο. Σε αυτή την μονάδα, στην Ελληνική βιβλιογραφία, δόθηκε το όνομα «*Γεωδαιτικός Σταθμός Ολοκληρωμένων Αποδόσεων*» αποδίδοντας τον όρο «*Total Station*» που χρησιμοποιείται σήμερα διεθνώς.

#### **2.4.1α Περιγραφή οργάνου**

Το θεοδόλιχο (εικ. 2.1) αποτελείται από δύο κύρια τμήματα. Το ακίνητο τμήμα που βρίσκεται στο κάτω μέρος του οργάνου και το κινητό τμήμα που εδράζεται πάνω στο ακίνητο και περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα που λέγεται *πρωτεύων άξονας* (ΠΠ'). Τα δυο τμήματα του οργάνου συνδέονται μεταξύ τους με κατάλληλο κοχλία.

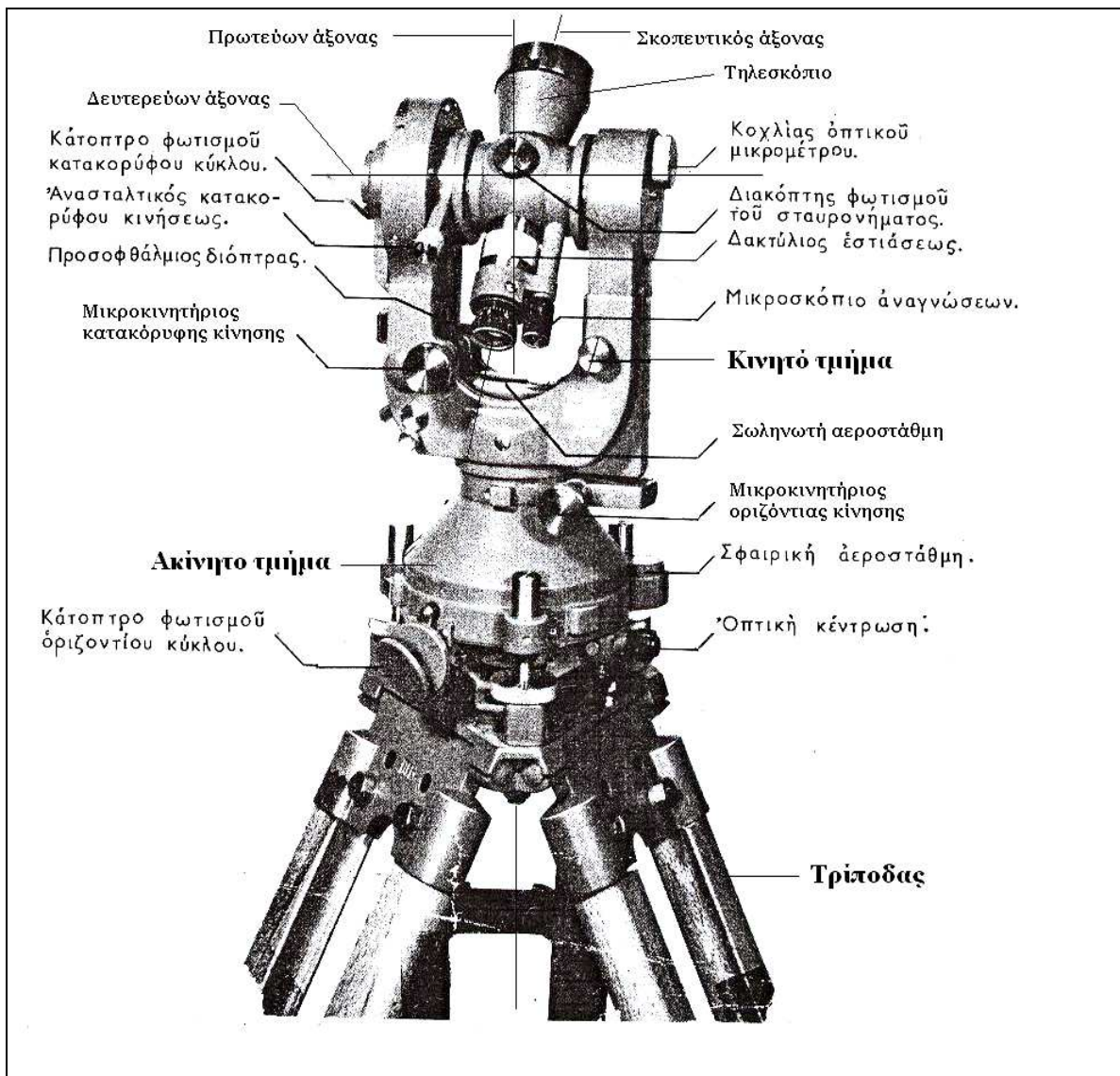
Το ακίνητο τμήμα περιλαμβάνει το σύστημα των τριών κοχλιών που είναι ενσωματωμένο στη βάση του οργάνου και ονομάζεται *τρικόχλιο* και ένα *διαιρεμένο δίσκο* που χρησιμοποιείται για τις μετρήσεις των οριζόντιων γωνιών. Το τρικόχλιο χρησιμοποιείται για την οριζοντίωση του οργάνου. Παλαιότερα σε μερικά όργανα αντί για το τρικόχλιο, στο ακίνητο τμήμα, υπήρχε σφαιρική άρθρωση.

Βασικό μέρος του κινητού τμήματος είναι το *τηλεσκόπιο*, το οποίο με το *σταυρόνημα*, το σύστημα των φακών και την εξωτερική διάταξη σκόπευσης μακρινών στόχων που διαθέτει, έχει την δυνατότητα να σκοπεύει σημεία σε μεγάλες αποστάσεις. Το τηλεσκόπιο έχει την δυνατότητα περιστροφής γύρω από άξονα κάθετο στον (ΠΠ') που λέγεται *δευτερεύων άξονας* (ΔΔ').

Τα υπόλοιπα μέρη του κινητού τμήματος του θεοδόλιχου είναι: ο *διαιρεμένος δίσκος* που χρησιμοποιείται για την μέτρηση των κατακόρυφων γωνιών. Το *σύστημα οριζοντίωσης* του οργάνου που αποτελείται από τις αεροστάθμες (σφαιρική, σωληνωτή) που είναι τοποθετημένες σε κατάλληλες θέσεις πάνω στο ακίνητο και στο κινητό τμήμα του οργάνου.

Πάνω στο κινητό τμήμα του θεοδόλιχου βρίσκονται επίσης: το *σύστημα κέντρωσης* για την ακριβή τοποθέτηση του οργάνου πάνω από συγκεκριμένο σημείο του εδάφους. Το ζευγάρι των *ανασταλτικών κοχλιών* και το ζευγάρι των *μικροκινητήριων κοχλιών* για την ακριβέστερη σκόπευση του τηλεσκοπίου σε συγκεκριμένο σημείο. Το *σύστημα ανάγνωσης* των οριζόντιων και κατακόρυφων γωνιών. Τέλος, πάνω στο κινητό τμήμα υπάρχουν βοηθητικά συστήματα π.χ. κάτοπτρα, πρίζες κ.λπ. που υποστηρίζουν την καλή λειτουργία του οργάνου στο ύπαιθρο κατά την διάρκεια της ημέρας και της νύκτας.





Εικόνα 2.1 Μέρη του θεοδόλιχου [2]

Με βάση τις τιμές των ζενίθιων γωνιών ορίζεται η θέση I του τηλεσκοπίου όταν  $0^\circ \leq Z \leq 200^\circ$  και η θέση II όταν  $200^\circ \leq Z < 400^\circ$ . Στα παλαιά θεοδόλιχα στη θέση I η εξωτερική σκοπευτική διάταξη ήταν στο πάνω μέρος του τηλεσκοπίου, ενώ στη θέση II στο κάτω.

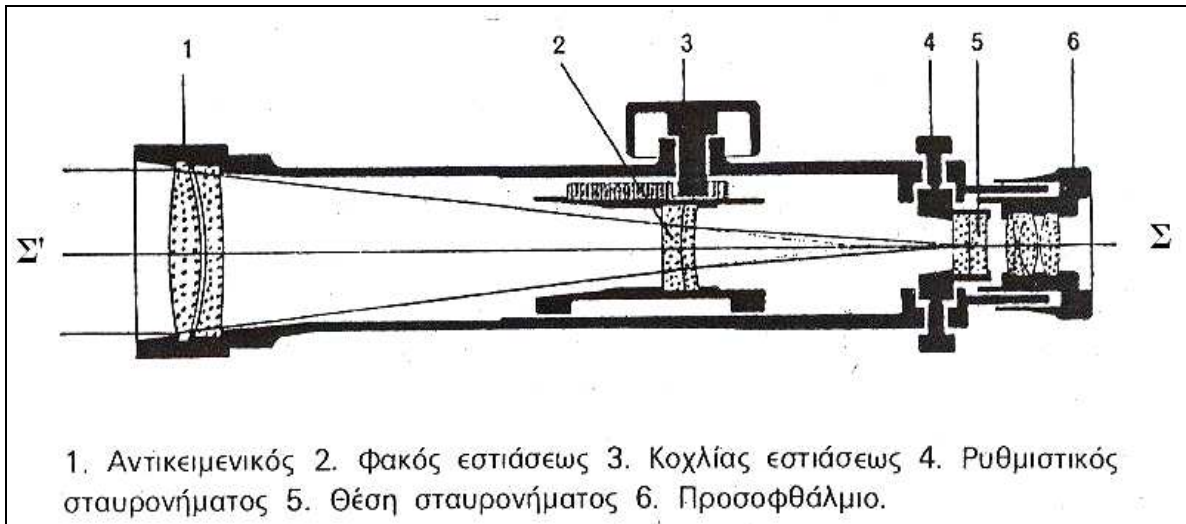
Μια συγκεκριμένη διεύθυνση, που σκοπεύεται με το τηλεσκόπιο του θεοδόλιχου σε θέση I, για να επανασκοπευθεί σε θέση II, πρέπει το κινητό τμήμα του θεοδόλιχου να περιστραφεί κατά μισή στροφή γύρω από τον πρωτεύοντα άξονα ΠΠ' και το τηλεσκόπιο να αναστραφεί γύρω από τον δευτερεύοντα άξονα ΔΔ'. Γι' αυτό τον λόγο κατά την σκόπευση των διευθύνσεων στις δυο θέσεις από την θέση I στην θέση II, λέγεται ότι χρειάζεται να γίνει *αναστροφή – περιστροφή*.

#### 2.4.1β Βασικά μέρη θεοδόλιχου

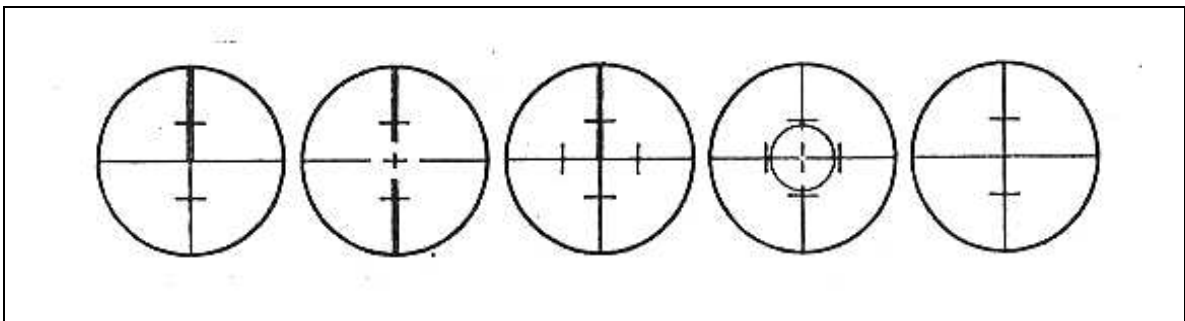
Τα βασικά μέρη του θεοδόλιχου είναι: το τηλεσκόπιο, το σύστημα μέτρησης των γωνιών, το σύστημα ανάγνωσης των μετρήσεων, το σύστημα κέντρωσης και οριζοντίωσης του οργάνου. Στις επόμενες ενότητες γίνεται η περιγραφή αυτών των συστημάτων.

- **Τηλεσκόπιο**

Το τηλεσκόπιο (σχ. 2.6) αποτελείται: από το *σύστημα του αντικειμενικού φακού*, που βρίσκεται στο μπροστινό μέρος του. Το *σύστημα του προσοφθάλμιου φακού*, που βρίσκεται στο πίσω μέρος του τηλεσκοπίου. Το *σταυρόνημα*, που είναι ένας σταυρός χαραγμένος πάνω σε γυάλινη πλάκα και βρίσκεται μπροστά από το προσοφθάλμιο σύστημα. Στο ταχύμετρο το σταυρόνημα είχε τις μορφές που φαίνεται στο (σχ. 2.7). Οι δυο μικρότερες ευθείες που είναι παράλληλες με την οριζόντια ευθεία του σταυρονήματος λέγονται *σταδιομετρικά νήματα*.



**Σχήμα 2.6** Τηλεσκόπιο θεοδόλιχου [5]



**Σχήμα 2.7** Είδη σταυρονήματος ταχυμέτρων [5]

Στο τηλεσκόπιο υπάρχει ο *εσωτερικός φακός εστίασης*, που βρίσκεται μεταξύ του αντικειμενικού συστήματος και του επιπέδου του σταυρονήματος. Το τηλεσκόπιο συμπληρώνεται από τους *κοχλίες εστίασης* του σκοπευόμενου αντικειμένου και του σταυρονήματος.

Η ευθεία που ορίζεται από το οπτικό κέντρο του αντικειμενικού συστήματος των φακών και το κέντρο του σταυρονήματος λέγεται *σκοπευτικός άξονας* ( $\Sigma\Sigma'$ ) (σχ. 2.6). Με τον φακό εστίασης το είδωλο του σκοπευόμενου αντικειμένου μεταφέρεται πάνω στο επίπεδο του σταυρονήματος, έτσι ώστε το είδωλο του αντικειμένου να έχει ευκρίνεια και κατά συνέπεια η σκόπευση να είναι ακριβής χωρίς *παράλλαξη*. Είναι χαρακτηριστικό ότι αν υπάρχει παράλλαξη τότε καθώς ο παρατηρητής κινεί το μάτι του δεξιά αριστερά, κατά την σκόπευση, παρατηρείται μικρή αντίθετη μετακίνηση του ειδώλου.

Βασικά χαρακτηριστικά του τηλεσκοπίου είναι : η *μεγέθυνση*, η *λαμπρότητα*, το *οπτικό πεδίο* και η *διακριτική ικανότητα*.

*Μεγέθυνση τηλεσκοπίου* (M), ορίζεται ο λόγος της γωνίας υπό την οποία φαίνεται ένα αντικείμενο προς την γωνία που το ίδιο αντικείμενο φαίνεται με γυμνό μάτι. Αυτός ο λόγος είναι ισοδύναμος με τον λόγο της εστιακής απόστασης του αντικειμενικού συστήματος φακών  $F_a$  προς την εστιακή απόσταση του προσοφθάλμιου συστήματος φακών  $F_\pi$ . Τελικά η μεγέθυνση δίνεται από την σχέση:

$$M = \frac{F_a}{F_\pi} \quad (2.8)$$

*Λαμπρότητα* (I), ορίζεται η ένταση του φωτός που εκπέμπεται από 1 cm<sup>2</sup> της επιφάνειας του ειδώλου. Η λαμπρότητα δίνεται από την σχέση :

$$I = C \cdot \frac{d^2}{M^2} \quad (2.9)$$

όπου : C συντελεστής που εξαρτάται από τον αριθμό των φακών που χρησιμοποιούνται στο τηλεσκόπιο, την ποιότητα και το πάχος τους, d η διάμετρος του αντικειμενικού συστήματος φακών και M η μεγέθυνση του τηλεσκοπίου.

*Οπτικό πεδίο* ( $\gamma$ ), ορίζεται η γωνία της κωνικής δέσμης των ακτίνων η οποία διέρχεται από το αντικειμενικό σύστημα φακών. Δίνεται σε βαθμούς από την σχέση:

$$\gamma^g = 63.662 \cdot \frac{a}{D} \quad (2.10)$$

όπου a το μήκος που αποκόπτεται από το περίγραμμα του οπτικού πεδίου του τηλεσκοπίου πάνω σε ένα χάρακα που βρίσκεται σε απόσταση D από το όργανο.

Στα θεοδόλιχα με διάμετρο αντικειμενικού συστήματος φακών  $d = 30 \div 40$ mm, το οπτικό πεδίο  $\gamma = 1^g \sim 2^g$ .

*Διακριτική ικανότητα* (p), ορίζεται η μικρότερη γωνία υπό την οποία φαίνονται δυο γειτονικά σημεία. Η διακριτική ικανότητα δίνεται σε δευτερόλεπτα βαθμού από την σχέση :

$$p^{cc} = \frac{36}{d} \quad (2.11)$$

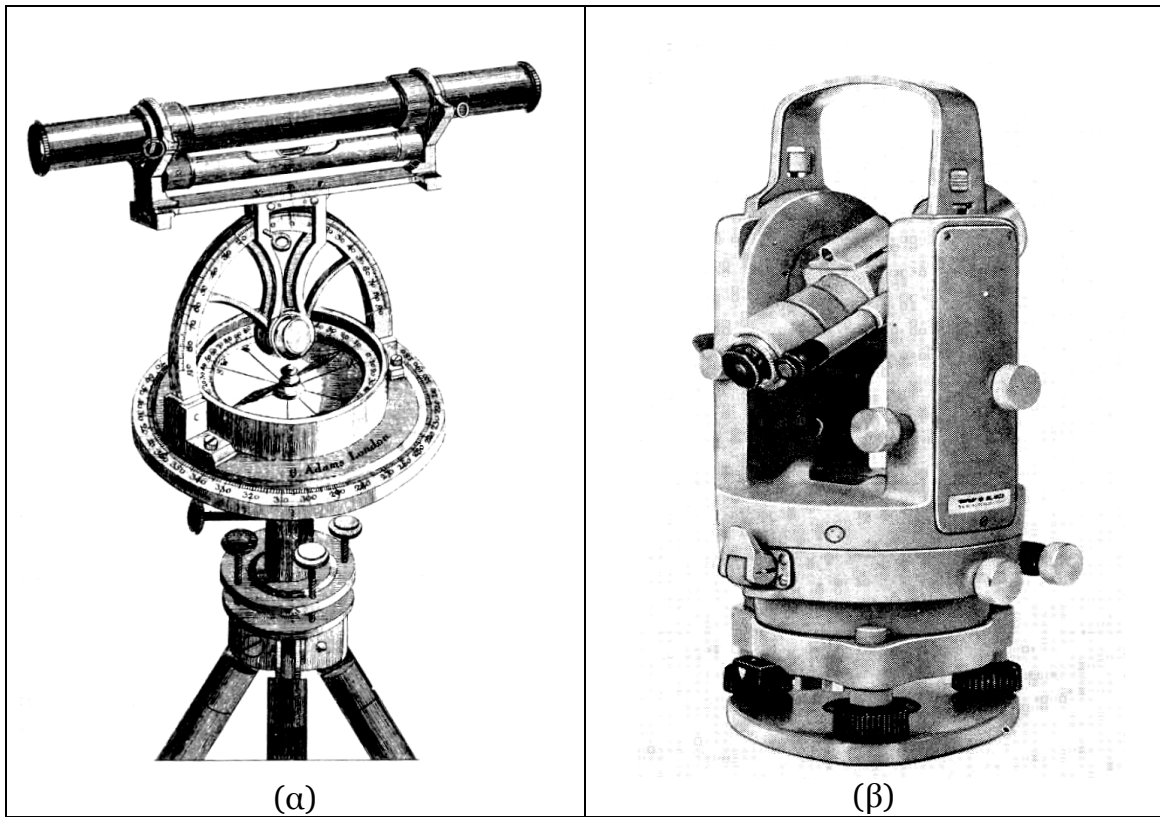
όπου d είναι η διάμετρος του αντικειμενικού συστήματος των φακών σε cm.

- *Σύστημα μέτρησης των γωνιών*

Στα παλαιά θεοδόλιχα η μέτρηση των γωνιών, οριζόντιων και κατακόρυφων, γινόταν πάνω σε *κλίμακες* από ασήμι ή πλατίνα οι οποίες ήταν τοποθετημένες σε υποδοχές κυκλικών δίσκων από ορείχαλκο (εικ. 2.2α). Σε αυτά τα όργανα οι μετρητικές κλίμακες των οριζόντιων και κατακόρυφων γωνιών ήταν εμφανείς με αποτέλεσμα να μην υπάρχει προστασία του συστήματος μέτρησης του οργάνου.

Αργότερα στο οπτικό θεοδόλιχο, που κατασκεύασε ο H. Wild, η μέτρηση των οριζόντιων και κατακόρυφων γωνιών γινόταν πάνω σε δυο *διαιρεμένους γυάλινους δίσκους* (οριζόντιο και κατακόρυφο), οι οποίοι ήταν ενσωματωμένοι στο σώμα του

οργάνου (εικ. 2.2β). Στα όργανα μικρής ακρίβειας η χάραξη των διαιρέσεων των γυάλινων δίσκων γινόταν με φωτοχημική μέθοδο. Στα όργανα μεγάλης ακρίβειας η χάραξη γινόταν πάνω στους γυάλινους δίσκους με ειδική διαιρετική μηχανή.



Εικόνα 2.2 Παλαιά θεοδόλιχα [6]

Στα ηλεκτρονικά θεοδόλιχα (εικ. 2.3) και στους γεωδαιτικούς σταθμούς ολοκληρωμένων αποδόσεων, η μέτρηση των γωνιών γίνεται όπως και στα οπτικά θεοδόλιχα σε δυο δίσκους οι οποίοι είναι διαφόρων τύπων με κωδικοποιημένες διαιρέσεις.



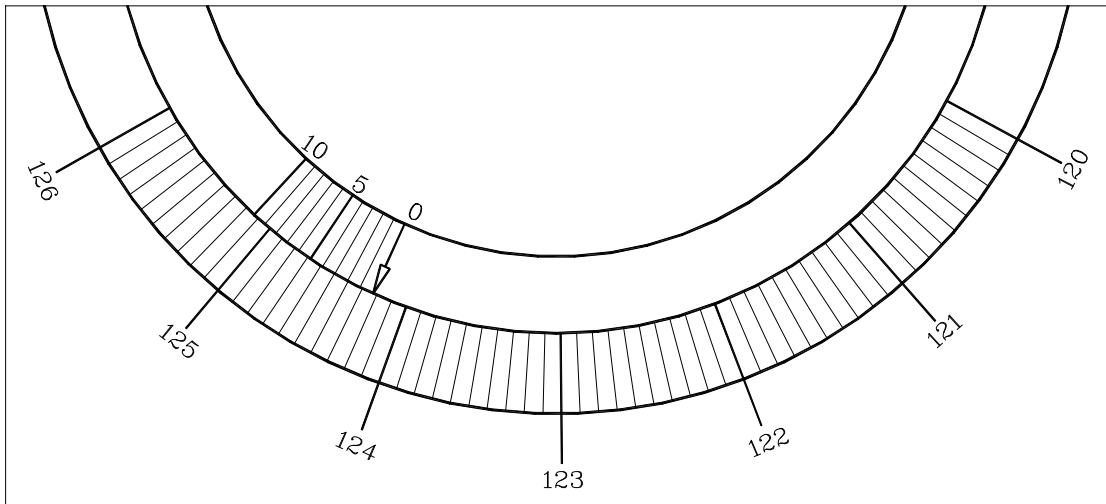
**Εικόνα 2.3** Σύγχρονοι γεωδαιτικοί σταθμοί [17,18]

Η διάμετρος των δίσκων κυμαίνεται από 6cm μέχρι 25cm ανάλογα με την ακρίβεια του οργάνου. Στα όργανα που χρησιμοποιούνται στις τρέχουσες τοπογραφικές εργασίες, η διάμετρος είναι της τάξης των 10cm και οι διαιρέσεις είναι σε βαθμούς.

- *Σύστημα ανάγνωσης των μετρήσεων*

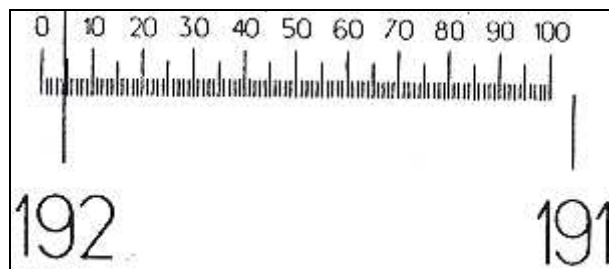
Στα παλαιά θεοδόλιχα η μέτρηση των γωνιών γινόταν πάνω στις εξωτερικές μετρητικές κλίμακες του οργάνου με την βοήθεια ειδικής διάταξης που λέγεται *βερνιέρος* (σχ. 2.8). Ο βερνιέρος χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά σε μετρητικά όργανα το 1631. Ο βερνιέρος βασίζεται στην αρχή ότι το ανθρώπινο μάτι μπορεί να εκτιμήσει με μεγάλη ακρίβεια την σύμπτωση δυο γραμμών. Αποτελείται από μια βοηθητική κλίμακα που κινείται κατά μήκος της κυρίας κλίμακας πάνω στην οποία γίνεται η μέτρηση.

Στο οπτικό θεοδόλιχο και στο ταχύμετρο για την μέτρηση των γωνιών χρησιμοποιήθηκε το *μικροσκόπιο με κλίμακα* (σχ. 2.9).



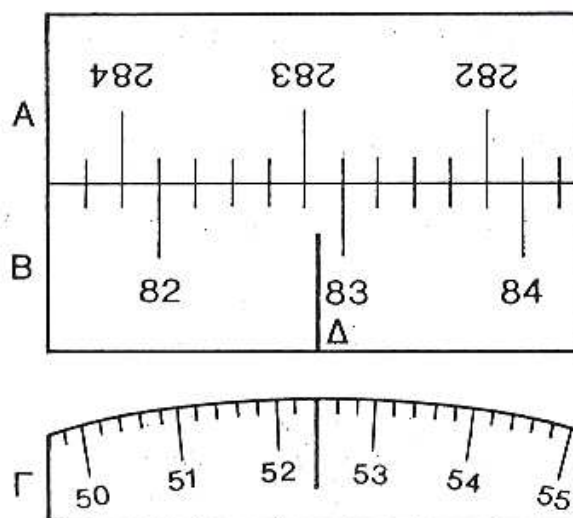
**Σχήμα 2.8** Βερνιέρος, σύστημα μέτρησης (ανάγνωση  $124.23^\circ$ )

Με το μικροσκόπιο μεγεθύνεται η απόσταση μεταξύ των χαραγών των μετρητικών κλιμάκων των δίσκων του οργάνου και ενδιάμεσα σε αυτές παρεμβάλλεται μια βοηθητική κλίμακα με υποδιαιρέσεις. Έτσι, αν η μετρητική κλίμακα είναι διαιρεμένη ανά  $1^\circ$  τότε η βοηθητική κλίμακα διαιρείται ανά  $1'$ . Σε αυτή την περίπτωση είναι δυνατό να διαβασθούν τα πρώτα λεπτά του βαθμού ( $\epsilon$ ) και να εκτιμηθούν τα  $10\epsilon$ .



**Σχήμα 2.9** Μικροσκόπιο με κλίμακα (ανάγνωση  $192.045^\circ$ ) [5]

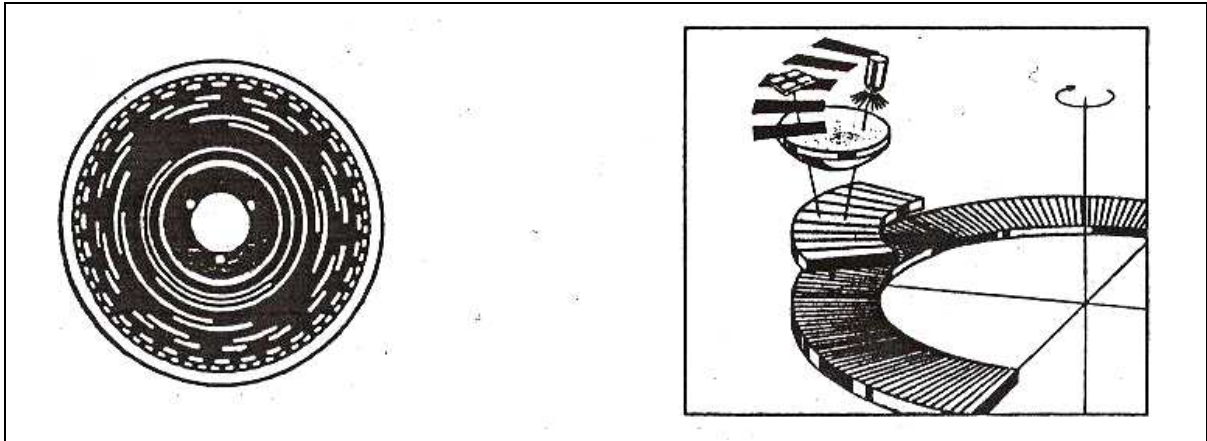
Από το 1924 στα θεοδολίχα χρησιμοποιήθηκε το *οπτικό μικρόμετρο* (σχ. 2.10), για την καλύτερη εκτίμηση των μετρήσεων των γωνιών πάνω στους διαιρεμένους γυάλινους δίσκους.



**Σχήμα 2.10** Οπτικό μικρόμετρο (ανάγνωση  $82.9524^\circ$ ) [5]

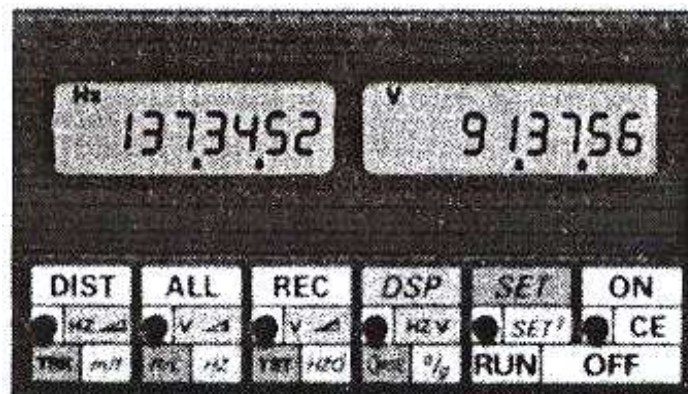
Με βάση το οπτικό μικρόμετρο ο H. Wild επινόησε μια νέα μέθοδο αναγνώσεων που ονομάστηκε *οπτικό μικρόμετρο Wild*. Με αυτό λαμβάνονται υπόψη οι δυο αντιδιαμετρικές θέσεις του διαιρεμένου δίσκου και τελικά γίνεται απ' ευθείας ανάγνωση του μέσου όρου των δυο αναγνώσεων.

Στα ηλεκτρονικά θεοδόλιχα και στους γεωδαιτικούς σταθμούς ολοκληρωμένων αποδόσεων, η ανάγνωση των μετρήσεων των γωνιών γίνεται πάνω σε ειδικά χαραγμένους δίσκους (σχ. 2.11). Υπάρχουν δυο βασικά συστήματα μέτρησης γωνιών. Σε αυτά τα συστήματα οι δίσκοι είναι είτε διαιρεμένοι ακτινικά (Incremental method), είτε κωδικοποιημένοι (Code method).



Σχήμα 2.11 Διαιρεμένοι δίσκοι ηλεκτρονικών θεοδολίων [5]

Σε κάθε μια περίπτωση με την χρήση φωτοδιόδων, που είναι δίοδοι οι οποίες χρησιμοποιούνται για την ανίχνευση του φωτός, είναι δυνατή η ανάγνωση της ένδειξης της γωνίας πάνω στους δίσκους και το τελικό αποτέλεσμα παρουσιάζεται ψηφιακά στην οθόνη του οργάνου (εικ. 2.4). Με αυτό τον τρόπο δεν απαιτείται να γίνει εκτίμηση των μετρήσεων από τον παρατηρητή πάνω στις κλίμακες, όπως στα παλαιά θεοδόλιχα. Οπότε εξαλείφονται οι πιθανοί κίνδυνοι του σφάλματος της εκτίμησης αλλά και του χονδροειδούς λάθους της ανάγνωσης. Επίσης με την δυνατότητα των σύγχρονων οργάνων να αποθηκεύουν τις μετρήσεις κατά τις εργασίες στο πεδίο αποφεύγεται και το σφάλμα της λανθασμένης γραφής. Τέλος οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν με την βοήθεια προγραμμάτων ηλεκτρονικού υπολογιστή.



Εικόνα 2.4 Οθόνη ενδείξεων ηλεκτρονικού θεοδολίου [5]

- Σύστημα κέντρωσης και οριζοντίωσης του οργάνου

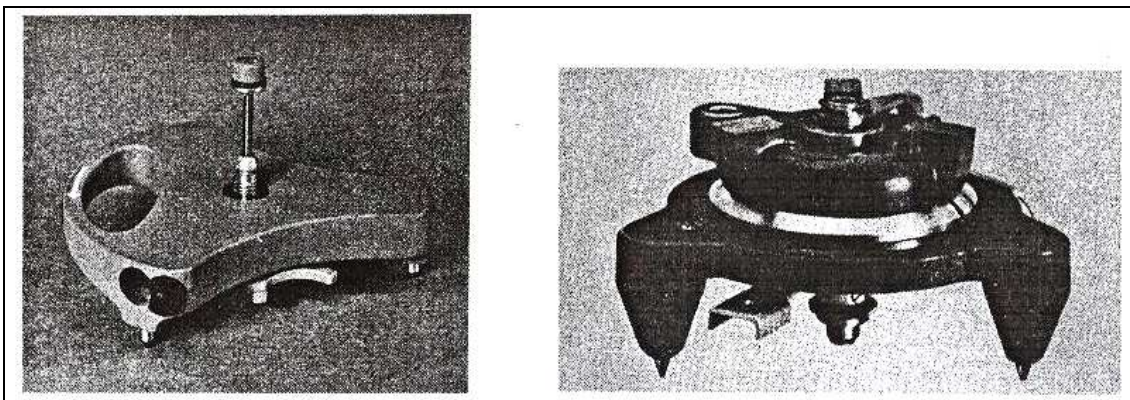
Για την σωστή μέτρηση της οριζόντιας γωνίας (ΒΑΓ), το θεοδόλιχο πρέπει να κεντρωθεί και να οριζοντιωθεί πάνω στο σημείο Α που είναι η κορυφή της γωνίας. Με την κέντρωση επιτυγχάνεται το κέντρο του δίσκου μέτρησης των οριζόντιων γωνιών να προβάλλεται στο σημείο Α. Με την οριζοντίωση εξασφαλίζεται η κατακορυφότητα του πρωτεύοντα άξονα (ΠΠ΄) του θεοδόλιχου.

Στα παλαιά θεοδόλιχα για την κέντρωση ήταν σε χρήση η λιναίη (νήμα της στάθμης). Η λιναίη στερεωνόταν σε ειδική υποδοχή του κοχλία σύνδεσης του θεοδόλιχου με τον τρίποδα πάνω στον οποίο τοποθετείται το όργανο. Με την λιναίη η ακρίβεια κέντρωσης μπορούσε να φθάσει το  $\pm 1\text{mm}$  ανά μέτρο ύψους οργάνου, κάτω από ευνοϊκές συνθήκες ανέμου.

Στα νεότερα θεοδόλιχα χρησιμοποιείται η οπτική κέντρωση που αποτελείται από ένα πρίσμα με την βοήθεια του οποίου προβάλλεται το κέντρο του οριζόντιου δίσκου στο έδαφος. Η οπτική κέντρωση είναι ανεξάρτητη των συνθηκών ανέμου και η ακρίβεια της μπορεί να είναι καλύτερη της λιναίης φθάνοντας το  $\pm 0.5\text{ mm}$  ανά μέτρο ύψους οργάνου. Στα όργανα είναι απαραίτητο να ελέγχεται η ακρίβεια της οπτικής κέντρωσης γιατί η πιθανή μετακίνηση του πρίσματος, λόγω της μεταφοράς του οργάνου, προκαλεί σφάλμα εκκεντρότητας.

Εκτός της οπτικής κέντρωσης χρησιμοποιείται και η ράβδος κέντρωσης. Η ράβδος κέντρωσης προσαρμόζεται στον τρίποδα. Με την ράβδο κέντρωσης επιτυγχάνεται εύκολα και γρήγορα η κέντρωση του θεοδόλιχου με ακρίβεια της τάξης του  $\pm 0.5\text{ mm}$  ανά μέτρο ύψους οργάνου. Εκτός της κοινής ράβδου κέντρωσης χρησιμοποιείται και ειδική ράβδος με ακρίβεια κέντρωσης της τάξης  $\pm 0.1\text{ mm}$  ανά μέτρο ύψους οργάνου.

Στην περίπτωση που το θεοδόλιχο τοποθετείται πάνω σε βάθρο, για την κέντρωση του οργάνου, χρησιμοποιούνται ειδικές βάσεις με συστήματα κέντρωσης. Αυτές οι βάσεις εδράζονται σε μπρούτζινα σήματα πακτωμένα στην επιφάνεια του βάθρου, παράλληλα η ράβδος κέντρωσης της βάσης εφαρμόζεται σε ειδικό σήμα στο κέντρο του βάθρου που υλοποιεί το σημείο της στάσης του οργάνου (μορφή εξαναγκασμένης κέντρωσης) (εικ. 2.5).



Εικόνα 2.5 Βάσεις κέντρωσης [5]

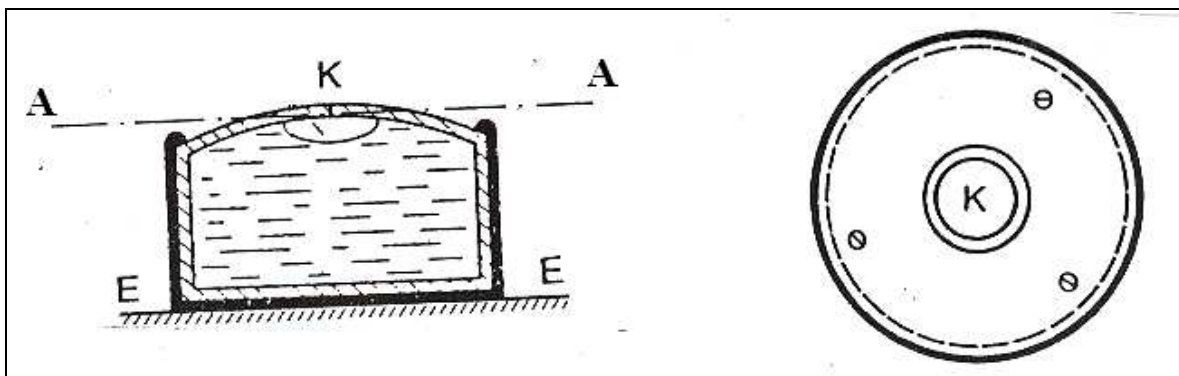
Τέλος στα ηλεκτρονικά όργανα τελευταίας γενεάς για την κέντρωση τους, χρησιμοποιείται μια λεπτή δέσμη ορατού φωτός, η οποία προβάλλεται σημειακά στο έδαφος. Το πλεονέκτημα αυτού του τρόπου κέντρωσης είναι ότι δεν υπάρχει ο κίνδυνος του σφάλματος εκκεντρότητας. Ενώ το μειονέκτημα είναι ο δυσδιάκριτος



εντοπισμός του ίχνους της δέσμης στο έδαφος όταν είναι έντονος ο φωτισμός στο ύπαιθρο.

Η οριζοντίωση του θεοδόλιχου εξασφαλίζεται με την χρήση της *αεροστάθμης*, η οποία είναι το κοινό αλφάδι που χρησιμοποιείται ευρύτατα από τους τεχνίτες. Πάνω στο όργανο, υπάρχουν δυο ενσωματωμένες αεροστάθμες η *σφαιρική* και η *σωληνωτή αεροστάθμη*.

Η *σφαιρική αεροστάθμη* (σχ. 2.12) αποτελείται από ένα γυάλινο κυλινδρικό δοχείο η πάνω έδρα του οποίου είναι διαμορφωμένη σε σφαιρική επιφάνεια. Η κάτω επιφάνεια του δοχείου είναι επίπεδο παράλληλο με το επίπεδο του δίσκου μέτρησης των οριζόντιων γωνιών του οργάνου. Στο δοχείο υπάρχει ένα λεπτόρρευστο υγρό (οινόπνευμα, αιθέρας) και μια πολύ μικρή φυσαλίδα που δημιουργείται από τους ατμούς του. Στο κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας του δοχείου χαράσσονται 2 ή 3 ομόκεντροι κύκλοι, ο μικρότερος από αυτούς έχει διάμετρο  $1 \div 1.5\text{mm}$  μεγαλύτερη από την διάμετρο της φυσαλίδας.

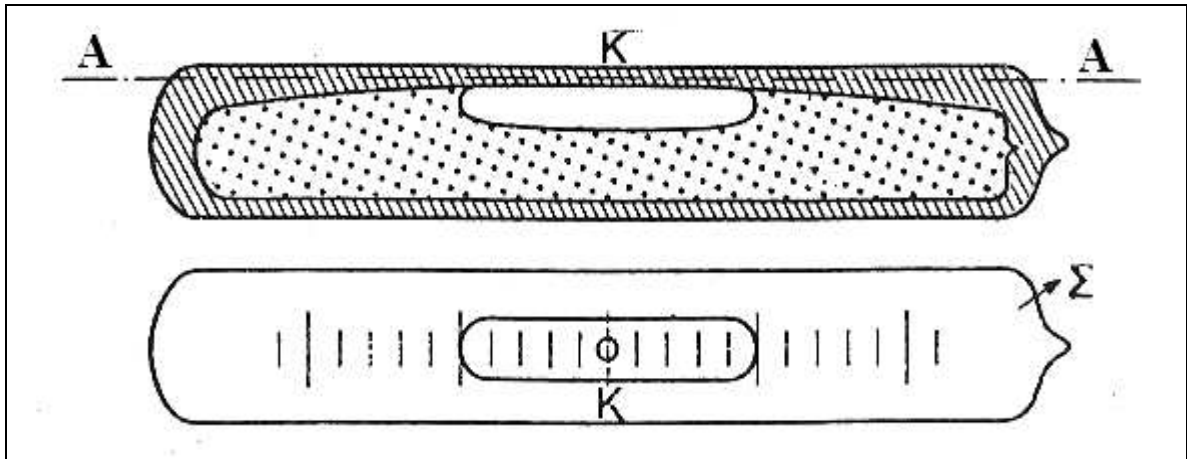


Σχήμα 2.12 Σφαιρική αεροστάθμη [5]

Το κέντρο των ομόκεντρων κύκλων λέγεται *κανονικό σημείο* K της σφαιρικής αεροστάθμης. Αν το κέντρο της φυσαλίδας ταυτισθεί απόλυτα με το κανονικό σημείο της αεροστάθμης, τότε το επίπεδο του δίσκου μέτρησης των οριζόντιων γωνιών έχει οριζοντιωθεί (E E). Επειδή όμως δεν είναι δυνατή η απόλυτη ταύτιση του κανονικού σημείου της αεροστάθμης και του κέντρου της φυσαλίδας, γιατί λέγεται ότι το όργανο είναι χονδρικά οριζοντιωμένο.

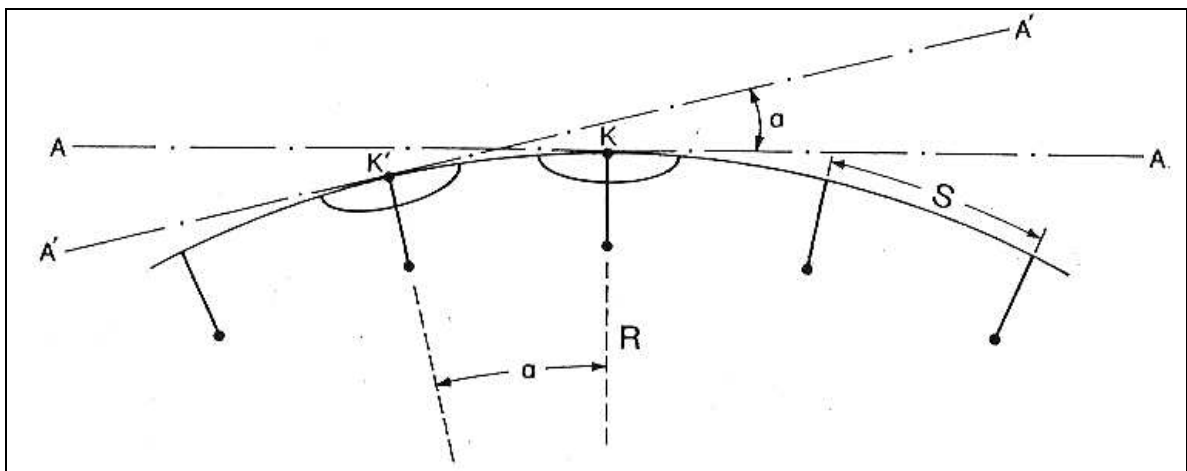
Για την ακριβή οριζοντίωση του θεοδόλιχου χρησιμοποιείται η *σωληνωτή αεροστάθμη* (σχ. 2.13). Η σωληνωτή αεροστάθμη αποτελείται από ένα γυάλινο σωλήνα, που είναι τόξο κύκλου με μεγάλη ακτίνα καμπυλότητας R. Στα θεοδόλιχα που χρησιμοποιούνται σε τρέχουσες τοπογραφικές εργασίες  $R \cong 15\text{m}$ , στα θεοδόλιχα μεγάλης ακρίβειας  $R \cong 20\text{m}$  μέχρι  $R \cong 60\text{m}$ .

Όπως στη σφαιρική αεροστάθμη έτσι και στη σωληνωτή ο σωλήνας είναι γεμάτος από οινόπνευμα ή αιθέρα με μια φυσαλίδα. Πάνω στο σωλήνα έχουν ορισθεί χαραγές σε απόσταση συνήθως 2mm. Το μέσο των χαραγών είναι το κανονικό σημείο της σωληνωτής αεροστάθμης. Όταν το μέσο της φυσαλίδας ταυτισθεί με το κανονικό σημείο της αεροστάθμης, τότε η επαπτομένη της φυσαλίδας είναι οριζόντια και λέγεται *άξονας της αεροστάθμης* (AA).



Σχήμα 2.13 Σωληνωτή αεροστάθμη [5]

Εναισθησία ή γωνιώδης τιμή ( $S$ ) λέγεται η επίκεντρη γωνία  $\alpha$  κατά την οποία πρέπει να στραφεί η γωνιακή αεροστάθμη για να μετακινηθεί κατά μια χαραγή. Όσο μικρότερη είναι η γωνιώδης τιμή τόσο η ακτίνα καμπυλότητας της αεροστάθμης είναι μεγαλύτερη και η ακρίβεια της να αυξάνει (σχ. 2.14).



Σχήμα 2.14 Εναισθησία σωληνωτής αεροστάθμης [5]

Στην πράξη πολύ μεγάλη εναισθησία της αεροστάθμης είναι δυνατό να δημιουργήσει προβλήματα, λόγω της ευαίσθητης ισορροπίας της στο κανονικό σημείο. Γιαυτό τον λόγο υπάρχει ένα όριο εναισθησίας πάνω από το οποίο η αεροστάθμη δεν είναι εύχρηστη. Η εναισθησία των σωληνωτών αεροσταθμών στα απλά θεοδόλια είναι από  $10^{\circ\circ}$  μέχρι  $1^{\circ\circ}$ . Στα θεοδόλια μεγάλης ακρίβειας η αντίστοιχη γωνιώδης τιμή μπορεί να φθάσει τα  $2^{\circ\circ}$ .

Στα σύγχρονα ηλεκτρονικά θεοδόλια και στους γεωδαιτικούς σταθμούς χρησιμοποιούνται ηλεκτρονικές αεροστάθμες διαφόρων τύπων (π.χ. αεροστάθμη "Talysel", ηλεκτρολυτική αεροστάθμη κ.λπ.) με μεγάλη εναισθησία που μπορεί να φθάσει μέχρι και  $0.5^{\circ\circ}$ .

#### 2.4.1γ Συνθήκες λειτουργίας του θεοδόλιου

Οι βασικοί άξονες του θεοδόλιου είναι ο πρωτεύον (ΠΠ'), ο δευτερεύον (ΔΔ') και ο σκοπευτικός (ΣΣ'). Εκτός από αυτούς υπάρχει και ο άξονας της αεροστάθμης (ΑΑ'). Αυτοί οι άξονες, οι οποίοι ήδη έχουν περιγραφεί, πρέπει να

πληρούν ορισμένες βασικές συνθήκες, που σχετίζονται με την θέση τους στο χώρο, προκειμένου οι γωνιομετρήσεις που γίνονται με το συγκεκριμένο όργανο, να είναι αξιόπιστες

Οι βασικές συνθήκες, οι οποίες σχετίζονται με την γεωμετρία του θεοδόλιχου, είναι οι επόμενες:

1. Ο πρωτεύων άξονας ( $\Pi\Pi'$ ) πρέπει να είναι κατακόρυφος, δηλαδή ο ( $\Pi\Pi'$ ) πρέπει να είναι κάθετος με τον άξονα της αεροστάθμης ( $ΑΑ'$ ).
2. Ο δευτερεύων άξονας ( $\Delta\Delta'$ ) πρέπει να είναι κάθετος με τον πρωτεύοντα άξονα ( $\Pi\Pi'$ ).
3. Ο σκοπευτικός άξονας ( $\Sigma\Sigma'$ ) πρέπει να είναι κάθετος με τον δευτερεύοντα άξονα ( $\Delta\Delta'$ ).

Κατά τις μετρήσεις στο ύπαιθρο το σφάλμα, που προκύπτει από την μη ισχύ των συνθηκών  $\Delta\Delta' \perp \Pi\Pi'$  και  $\Sigma\Sigma' \perp \Delta\Delta'$ , μπορεί να εξαλειφθεί με σκοπεύσεις σε δύο θέσεις τηλεσκοπίου (I και II). Ενώ το σφάλμα που προκύπτει από την μη ισχύ της πρώτης συνθήκης ( $\Pi\Pi'$  κατακόρυφος) δεν είναι δυνατό να εξαλειφθεί. Γιαυτό τον λόγο, κατά τις μετρήσεις στο ύπαιθρο, η κατακορύφωση του  $\Pi\Pi'$  πρέπει να γίνεται με ακρίβεια.

Εκτός από αυτές τις βασικές συνθήκες πρέπει να ισχύουν και οι επόμενες:

1. Το «κατακόρυφο» και το «οριζόντιο» νήμα του σταυρονήματος πρέπει να είναι κατακόρυφο και οριζόντιο αντίστοιχα.
2. Το επίπεδο του οριζόντιου δίσκου μέτρησης των γωνιών πρέπει να είναι κάθετο στον άξονα ( $\Pi\Pi'$ ). Αντίστοιχα το επίπεδο του κατακόρυφου δίσκου μέτρησης των γωνιών πρέπει να είναι κάθετο στον άξονα ( $\Delta\Delta'$ ).
3. Ο άξονας ( $\Pi\Pi'$ ) πρέπει να περνά από το κέντρο του οριζόντιου δίσκου μέτρησης. Αντίστοιχα ο άξονας ( $\Delta\Delta'$ ) πρέπει να περνά από το κέντρο του κατακόρυφου δίσκου μέτρησης.
4. Οι υποδιαίρεσεις των δίσκων μέτρησης πρέπει να είναι ακριβείς.
5. Για όργανο που μετρά ζενίθιες γωνίες, ο δείκτης στον κατακόρυφο δίσκο μέτρησης των ζενίθιων γωνιών πρέπει να δείχνει  $100^\circ$  όταν ο σκοπευτικός άξονας είναι οριζόντιος. Αντίστοιχα για όργανο που μετρά γωνίες ύψους ο δείκτης στον κατακόρυφο δίσκο μέτρησης των γωνιών ύψους πρέπει να δείχνει  $0^\circ$  όταν ο σκοπευτικός άξονας είναι οριζόντιος.
6. Οι άξονες ( $\Pi\Pi'$ ), ( $\Delta\Delta'$ ) και ( $\Sigma\Sigma'$ ) πρέπει να τέμνονται στο ίδιο σημείο.
7. Ο σκοπευτικός άξονας του θεοδόλιχου δεν πρέπει να μεταβάλλεται όταν αλλάζει η εστίαση του τηλεσκόπιου.

Πριν από την έναρξη των γωνιομετρήσεων είναι σκόπιμο να γίνεται ο έλεγχος για την ισχύ των συνθηκών λειτουργίας του οργάνου, έτσι ώστε οι μετρήσεις να είναι αξιόπιστες. Αν από τον έλεγχο διαπιστωθεί ότι δεν ισχύουν οι συνθήκες τότε, εφόσον είναι δυνατόν, επιχειρείται η αποκατάσταση τους στο ύπαιθρο. Σε περίπτωση αδυναμίας απαιτείται να γίνει ο έλεγχος και η αποκατάσταση τους στο εργαστήριο. Τέλος στην περίπτωση που δεν ισχύουν οι συνθήκες θα πρέπει να εκτιμηθεί το μέγεθος του σφάλματος, για να διαπιστωθεί αν βρίσκεται, ή όχι, μέσα στην αβεβαιότητα των μετρήσεων.

Στο παράρτημα παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο ελέγχεται στο ύπαιθρο και αποκαθίσταται, αν χρειάζεται, κάθε μια από τις βασικές συνθήκες λειτουργίας του θεοδόλιχου.

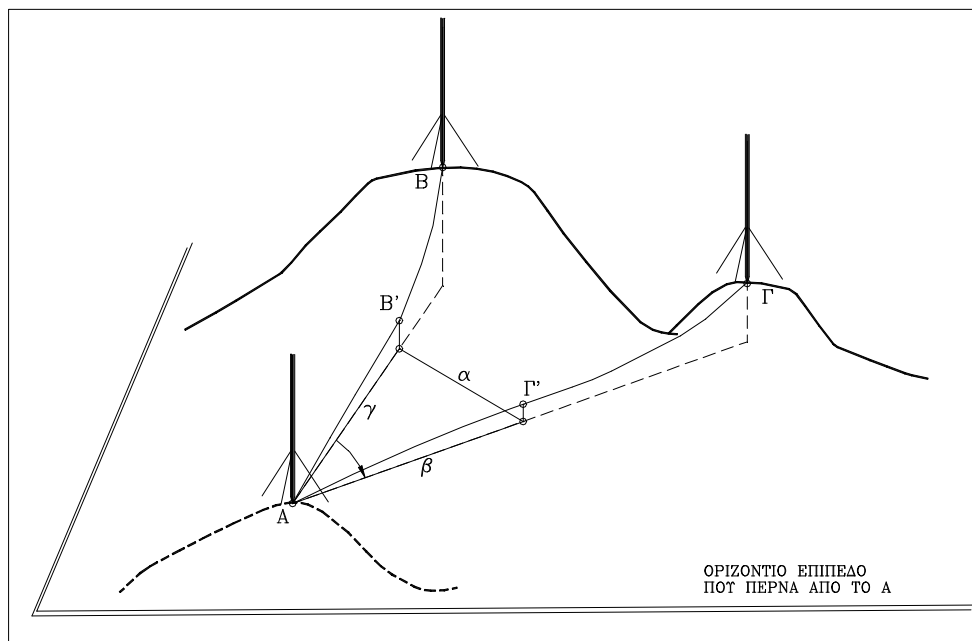
### 2.4.2 Άλλα όργανα μέτρησης γωνιών

Στην πράξη, εκτός από το θεοδόλιχο, χρησιμοποιούνται και άλλα όργανα για την μέτρηση των γωνιών. Πρέπει όμως να αναφερθεί ότι η ακρίβεια της μέτρησης με αυτά τα όργανα είναι μικρότερη από την ακρίβεια της μέτρησης με το θεοδόλιχο. Στην ενότητα που ακολουθεί περιγράφεται η μέτρηση της οριζόντιας γωνίας με την μετροταινία, η οποία αναλύεται στην ενότητα 3.2.1. Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται άλλα όργανα που χρησιμοποιούνται στις μετρήσεις των γωνιών.

#### 2.4.2α Μετροταινία

Για τον υπολογισμό της οριζόντιας γωνίας (BAΓ), μεταξύ δυο ευθυγραμμίων AB και AΓ (σχ. 2.15), ορίζεται το τρίγωνο (AB' Γ') με τα σημεία B' και Γ' πάνω στις ευθυγραμμίες (AB) και (AΓ) αντίστοιχα. Στο τρίγωνο αυτό μετρούνται με μετροταινία τα μήκη των πλευρών του β, γ και α. Με βάση τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο ισχύει:

$$(BA\Gamma) = \arccos\left(\frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2 \cdot \beta \cdot \gamma}\right) \quad (2.12)$$



Σχήμα 2.15 Μέτρηση της οριζόντιας γωνίας (BAΓ) με μετροταινία

Στην πράξη συνήθως τα σημεία B' και Γ' ορίζονται έτσι ώστε  $\beta = \gamma$ , οπότε απλοποιείται η σχέση (2.12).

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Για να προσδιορισθεί η οριζόντια γωνία μεταξύ των ευθυγραμμίων (AB) και (AΓ) μετρήθηκαν οι πλευρές  $\beta = \gamma = 15\text{m}$  και  $\alpha = 19.36\text{m}$  με σφάλμα μέτρησης

$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \pm 5\text{mm}$ . Να υπολογισθεί η οριζόντια γωνία (ΒΑΓ) και το σφάλμα  $\sigma_{\text{ΒΑΓ}}$  που γίνεται στον υπολογισμό της.

Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο (ΑΒΓ) ισχύει:

$$(\text{ΒΑΓ}) = \arccos\left(\frac{2 \cdot 15^2 - 19 \cdot 36^2}{2 \cdot 15^2}\right) \Rightarrow (\text{ΒΑΓ}) = 89.31^\circ .$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο μετάδοσης σφαλμάτων στη ίδια σχέση υπολογίζεται το  $\sigma_{\text{ΒΑΓ}} \cong \pm 4^c$ .

Παρατηρείται ότι με αυτή τη μέθοδο απαιτούνται μετρήσεις πλευρών με σφάλμα της τάξης των μερικών mm για τον υπολογισμό της γωνίας με σφάλμα της τάξης των μερικών πρώτων λεπτών (c) του βαθμού.

#### 2.4.2β Γωνιομετρική Πυξίδα

Όπως έχει αναφερθεί η μαγνητική βελόνα της πυξίδας ορίζει την διεύθυνση του μαγνητικού βορρά. Με βάση αυτή την διεύθυνση είναι δυνατό να μετρηθούν μαγνητικά αζιμουθια προς διάφορες διευθύνσεις. Οι οριζόντιες γωνίες μεταξύ αυτών των διευθύνσεων προκύπτουν με αφαίρεση των αντίστοιχων μαγνητικών αζιμουθίων τους.

Για να είναι δυνατή η μέτρηση των μαγνητικών αζιμουθίων η γωνιομετρική πυξίδα έχει ενσωματωμένη σκοπευτική διάταξη (εικ. 2.6) και περιμετρικά της φέρει περιστρεφόμενη μετρητική διάταξη με διαιρέσεις σε μοίρες ( $0 \div 359^\circ$ ) με χαραγές ανά μισή μοίρα ή σε βαθμούς ( $0 \div 399^\circ$ ) με χαραγές ανά μισό βαθμό. Η αρίθμηση των χαραγών γίνεται κατά την αντίθετη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

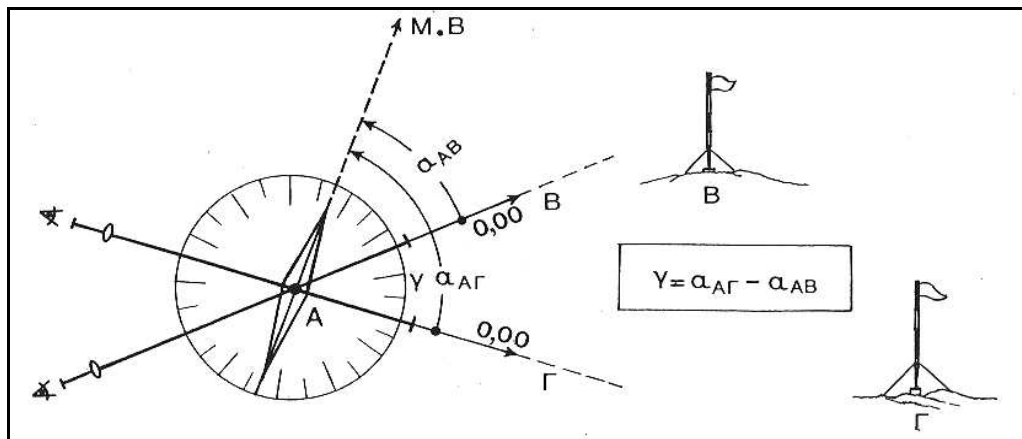


Εικόνα 2.6 Γωνιομετρική πυξίδα [5]

Η μέτρηση του μαγνητικού αζιμουθίου  $\alpha_{\text{AB}}$  της ευθυγραμμίας ΑΒ γίνεται ως εξής:

- Η πυξίδα τοποθετείται στο σημείο A και οριζοντιώνεται.
- Με την διάμετρο ( $0 \div 180^\circ$ ) ή ( $0 \div 200^g$ ), ως σκοπευτική γραμμή, σκοπεύεται η διεύθυνση AB.
- Διαβάζεται το μαγνητικό αζιμούθιο  $\alpha_{AB}$  από την ένδειξη της μαγνητικής βελόνας πάνω στην μετρητική διάταξη.

Με τον ίδιο τρόπο μετριέται το μαγνητικό αζιμούθιο  $\alpha_{AG}$  της ευθυγραμμίας AG. Η οριζόντια γωνία  $(BA\Gamma) = \alpha_{AG} - \alpha_{AB}$  (σχ. 2.16).



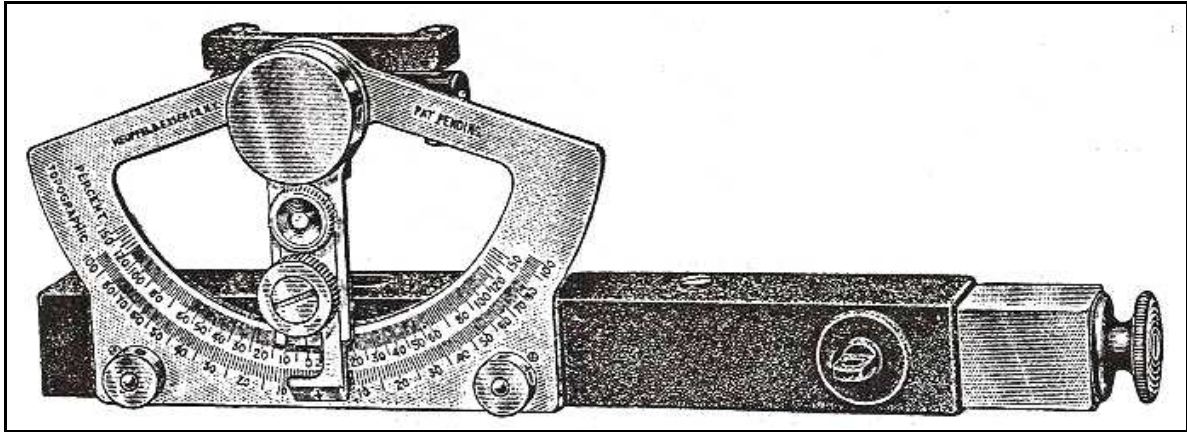
Σχήμα 2.16 Μέτρηση με γωνιομετρική πυξίδα [5]

Στο εμπόριο υπάρχουν διάφορα είδη γωνιομετρικών πυξίδων για διαφορετικούς σκοπούς. Συγκεκριμένα, υπάρχουν απλές πυξίδες, οι οποίες τοποθετούνται πάνω σε τοπογραφικά όργανα, πυξίδες ανάρτησης που χρησιμοποιούνται στα μεταλλεία, τοπογραφικές πυξίδες και ταχυμετρικές πυξίδες που τα αποτελέσματα τους είναι ακριβέστερα.

Οι ακρίβειες μέτρησης των μαγνητικών αζιμουθίων κυμαίνονται, ανάλογα με τον τύπο της πυξίδας, από μερικά πρώτα του βαθμού ( $c$ ) μέχρι  $20^c$ . Αντίστοιχα οι ακρίβειες μέτρησης της οριζόντιας γωνίας είναι από  $10^c$  μέχρι  $30^c$ . Ωστόσο σοβαρό μειονέκτημα, που επηρεάζει την ακρίβεια στις μετρήσεις, είναι η επίδραση των μεταλλικών αντικειμένων που βρίσκονται κοντά στη μαγνητική βελόνα. Γιαυτό το λόγο η πυξίδα χρησιμοποιείται σε τοπογραφικές εργασίες που δεν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια, όπως είναι οι αναγνωριστικές εργασίες υπαίθρου.

#### 2.4.2γ Κλισίμετρο

Το κλισίμετρο (εικ. 2.7) είναι ένα απλό τοπογραφικό όργανο που χρησιμοποιείται για την μέτρηση της γωνίας ύψους και της κλίσης μιας πλευράς στο ύπαιθρο. Για τον σκοπό αυτό φέρει απλή σκοπευτική διάταξη και διπλή κλίμακα για την ανάγνωση της κατακόρυφης γωνίας και της αντίστοιχης κλίσης. Η ακρίβεια ανάγνωσης της κατακόρυφης γωνία είναι της τάξης των  $25^c$ .



Εικόνα 2.7 Κλισίμετρο [12]

Στην πράξη το κλισίμετρο ήταν σε χρήση παλαιότερα, κυρίως σε εργασίες υπαίθρου μικρής ακρίβειας.

#### 2.4.2δ Θεοδόλιχο Πυξίδα

Η βασική αρχή λειτουργίας του είναι ίδια με την λειτουργία του κοινού θεοδόλιχου. Η διαφορά του είναι ότι στο επίπεδο του δίσκου μέτρησης των οριζόντιων γωνιών έχει ενσωματωμένη πυξίδα. Με την βοήθεια της πυξίδας είναι δυνατό να μετρηθούν μαγνητικά αζιμούθια των πλευρών με ακρίβεια της τάξης των  $\pm 20^{\text{cc}}$ .

#### 2.4.2ε Γυροσκοπικό Θεοδόλιχο

Αποτελείται από ένα κοινό θεοδόλιχο και ένα γυροσκόπιο τοποθετημένο πάνω από αυτό. Με την βοήθεια του γυροσκοπίου είναι δυνατό να μετρούνται τα πραγματικά (αστρονομικά) αζιμούθια των πλευρών με ακρίβεια της τάξης των  $\pm 20^{\text{cc}}$ . Στα νεώτερα όργανα έχει βελτιωθεί η ακρίβεια και έχει φθάσει τα  $\pm 10^{\text{cc}}$ .

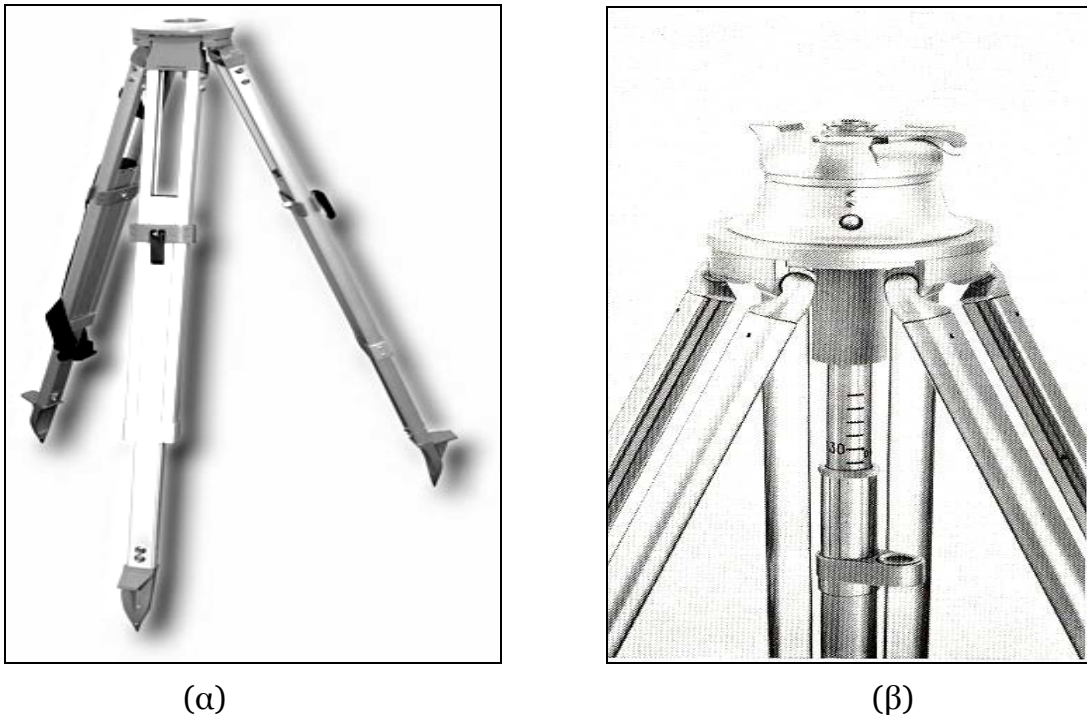
#### 2.4.3 Βοηθητικά Όργανα

Κατά τις γωνιομετρήσεις στο ύπαιθρο, εκτός των οργάνων μέτρησης των γωνιών που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες ενότητες, χρησιμοποιούνται και βοηθητικά όργανα. Η συμβολή αυτών των οργάνων στην ακρίβεια μέτρησης των γωνιών είναι σημαντική και γιαυτό τον λόγο απαιτείται να επιλέγονται με προσοχή και να ελέγχονται πριν αρχίσουν οι μετρήσεις. Τα βασικά βοηθητικά όργανα παρουσιάζονται στις επόμενες ενότητες.

#### 2.4.3α Τρίποδες

Οι τρίποδες είναι κατασκευασμένοι από ξύλο ή μέταλλο, συνήθως αλουμίνιο, έχουν σταθερού ή συνηθέστερα μεταβλητού μήκους μέλη. Οι τρίποδες χρησιμοποιούνται όταν τα σημεία από τα οποία γίνονται οι μετρήσεις έχουν σημανθεί με κατασκευές μικρού ύψους (π.χ. πάσσαλος, βάθρο μικρού ύψους). Τα όργανα τοποθετούνται πάνω στο επίπεδο φορείο του τρίποδα και σταθεροποιούνται με τον ενσωματωμένο κοχλία (εικ. 2.8α). Τα όργανα που παλαιότερα στη θέση του τρικόχλιου είχαν σφαιρική άρθρωση τοποθετούνται σε

τρίποδες, οι οποίοι επίσης φέρουν άρθρωση και κάτω από αυτή ράβδο κέντρωσης (εικ. 2.8β).



Εικόνα 2.8 Τρίποδες οργάνων

Βασικά στοιχεία του τρίποδα είναι η ευστάθεια και η ακαμψία του. Αυτά τα στοιχεία πρέπει να εξασφαλίζονται σε όλη την διάρκεια των μετρήσεων, γιατί τον λόγο ο τρίποδας πρέπει να έχει καλή έδραση (οι άκρες των μελών του να δημιουργούν ισόπλευρο τρίγωνο στο έδαφος) και να πακτώνεται όσο το δυνατό καλύτερα στο έδαφος.

#### 2.4.3β Βάσεις

Οι βάσεις είναι βαριές μεταλλικές κατασκευές (εικ. 2.5). Τα όργανα τοποθετούνται πάνω σε αυτές όταν τα σημεία από τα οποία γίνονται οι γωνιομετρήσεις έχουν σημανθεί με μόνιμες κατασκευές που συνήθως είναι βάθρα ύψους  $h \approx 1m$ . Οι βάσεις έχουν ενσωματωμένες διατάξεις οι οποίες εξασφαλίζουν την ακριβή τοποθέτησή τους πάνω στο σημείο από το οποίο θα γίνουν οι γωνιομετρήσεις (εξαναγκασμένη κέντρωση).

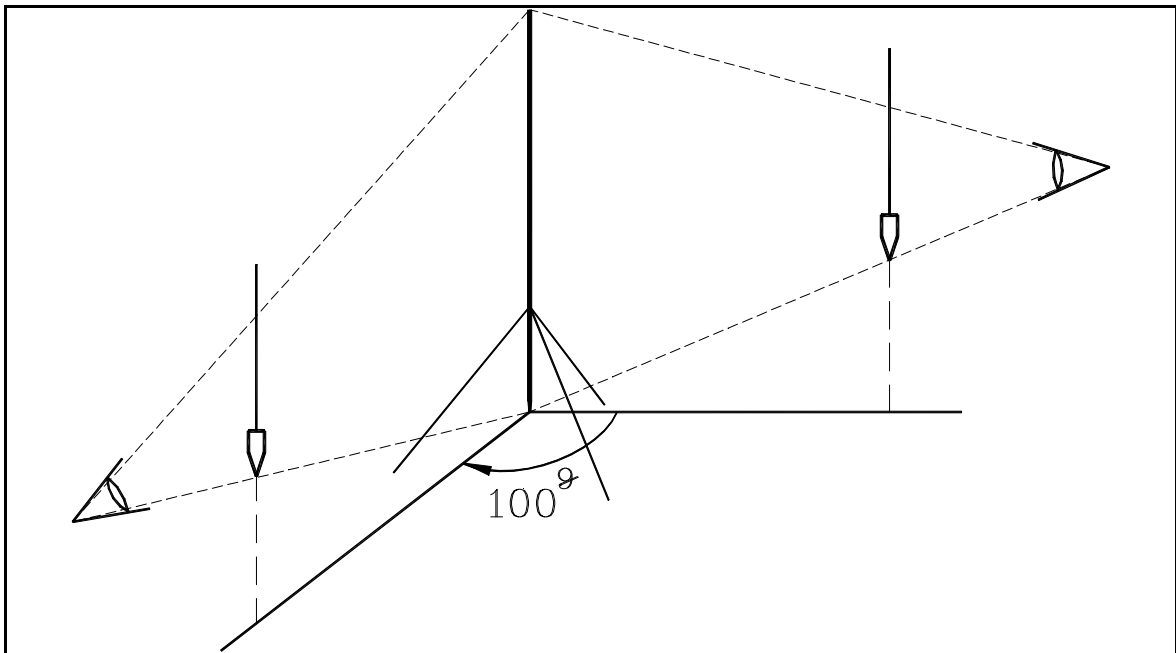
#### 2.4.3γ Στόχοι

Οι στόχοι είναι ειδικά σήματα που τοποθετούνται πάνω από τα σημεία προς τα οποία γίνονται οι γωνιομετρήσεις. Για την τοποθέτηση των στόχων χρησιμοποιούνται, κατά περίπτωση, τρίποδες ή βάσεις. Με τους στόχους επισημαίνονται τα σημεία έτσι ώστε να είναι ορατά από απόσταση, η οποία μπορεί να είναι από μερικές δεκάδες μέτρα μέχρι μερικά χιλιόμετρα.

Στις τρέχουσες τοπογραφικές εργασίες ως βασικός στόχος για τις γωνιομετρήσεις χρησιμοποιείται συνήθως το *ακόντιο*, το οποίο τοποθετείται πάνω από το σημείο με την βοήθεια ενός απλού τρίποδα (σχ. 2.17). Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να

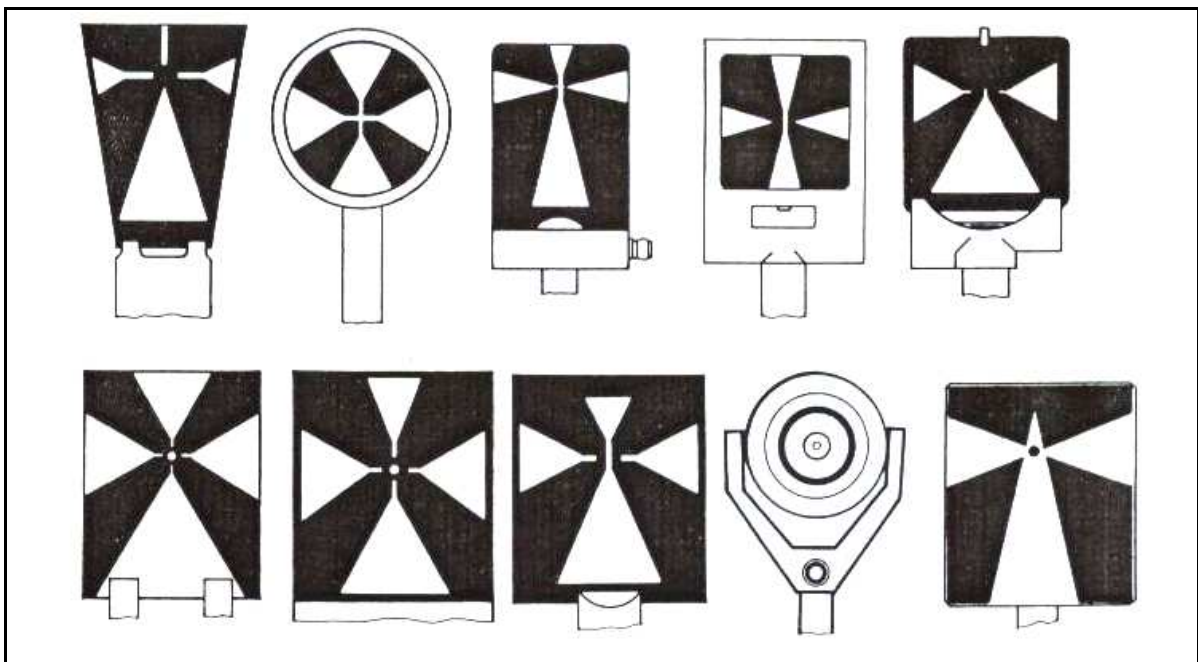


δίνεται στην κατακορύφωση του ακοντίου (σχ. 2.17), διαφορετικά οι σκοπεύσεις είναι έκκεντρες με αποτέλεσμα οι γωνιομετρήσεις να έχουν σφάλμα.



Σχήμα 3.17 Κατακορύφωση ακοντίου

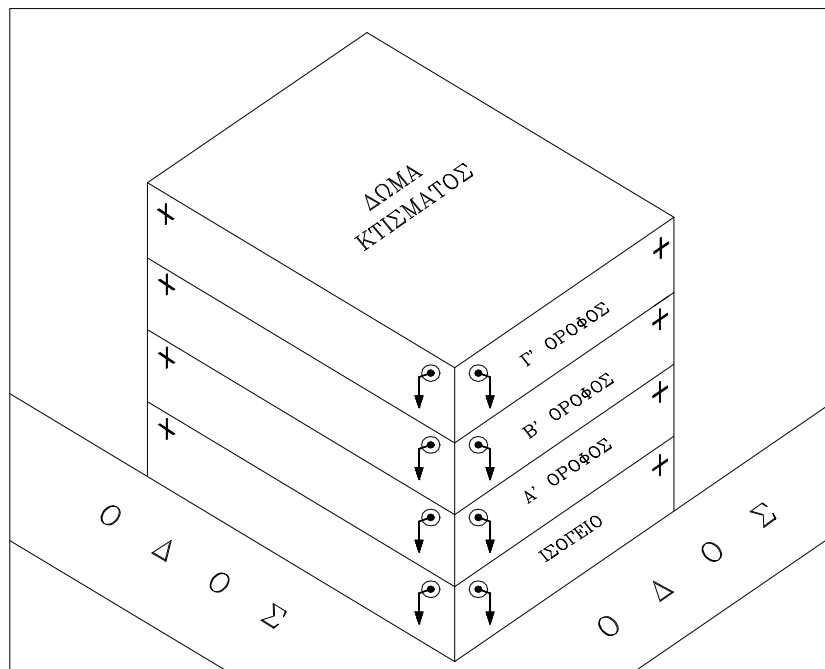
Σε εργασίες μεγαλύτερης ακρίβειας χρησιμοποιούνται στόχοι, οι οποίοι τοποθετούνται πάνω σε τρικόχλιο το οποίο στερεώνεται σε τρίποδα ή σε βάση ανάλογα με τον τρόπο σήμανσης του σημείου. Συνήθως οι στόχοι είναι επίπεδοι, το σχήμα τους περιλαμβάνει τριγωνικά σχήματα ή ομόκεντρους κύκλους (σχ. 2.18). Σημαντικό ρόλο στην ευκρίνεια του στόχου, εκτός από το μέγεθος του, παίζει και το χρώμα του. Στην πράξη έχει βρεθεί ότι οι χρωματικές αντιθέσεις (π.χ. μαύρο - άσπρο ή μαύρο - κίτρινο) πάνω στο στόχο εξυπηρετούν την ακριβή σκόπευση, ως καλύτερη έχει εντοπισθεί η αντίθεση μαύρο - κίτρινο.



Σχήμα 2.18 Στόχοι για τις γωνιομετρήσεις

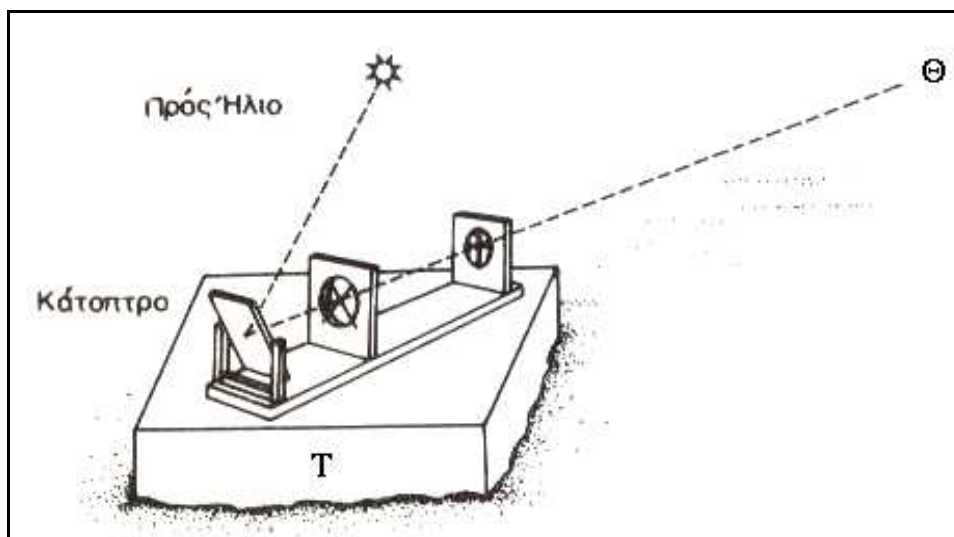
Σε ειδικές περιπτώσεις (π.χ. παρακολούθηση παραμορφώσεων κατασκευών), όπου οι σκοπεύσεις είναι κοντινές, οι στόχοι πακτώνονται πάνω στα σημεία προς τα οποία γίνονται οι μετρήσεις (σημεία ελέγχου) και ταυτίζονται με αυτά. Όπως προηγουμένως, έτσι και σε αυτή την περίπτωση, το σχήμα και το χρώμα τους είναι τα βασικά στοιχεία για να είναι ευδιάκριτοι ανάλογα με τη θέση τους σε σχέση με το γωνιομετρικό όργανο.

Οι στόχοι είναι δυνατό να είναι επίπεδοι (π.χ. σταυρός πάνω στην κατασκευή) ή τρισδιάστατοι (π.χ. ορθός ή ανεστραμμένος κώνος πακτωμένος στην κατασκευή) (σχ. 2.19), με κατάλληλο χρώμα (π.χ. μαύρο ή κίτρινο) για να είναι ευκρινείς. Σε αυτές τις περιπτώσεις εκτός από το χρώμα του στόχου σημαντικό ρόλο παίζουν το χρώμα του υποβάθρου, πάνω στο οποίο προβάλλεται ο στόχος, και η θέση του ήλιου η οποία μεταβάλλεται κατά την διάρκεια των μετρήσεων. Η διαφορετική θέση του ήλιου δημιουργεί ασύμμετρες σκιερές περιοχές πάνω στους τρισδιάστατους στόχους με συνέπεια να είναι αμφίβολη η διχοτόμηση τους. Η χρωματική αντίθεση μαύρο – κίτρινο φαίνεται ότι διευκολύνει σημαντικά και σε αυτές τις περιπτώσεις.



**Σχήμα 2.19** Στόχοι πάνω σε κατασκευή

Παλαιότερα για σκοπεύσεις σε πολύ μεγάλες αποστάσεις (αρκετά km) ήταν σε χρήση το ηλιοτρόπιο (σχήμα 2.20), το οποίο κεντρωνόταν ως στόχος πάνω στο σημείο T. Το ηλιοτρόπιο είναι μια απλή διάταξη η οποία με την χρήση ενός επίπεδου κατόπτρου (καθρέπτη) ανακλά τις ακτίνες του ήλιου από την θέση του στόχου προς την θέση του σημείου Θ όπου βρίσκεται το γωνιομετρικό όργανο.

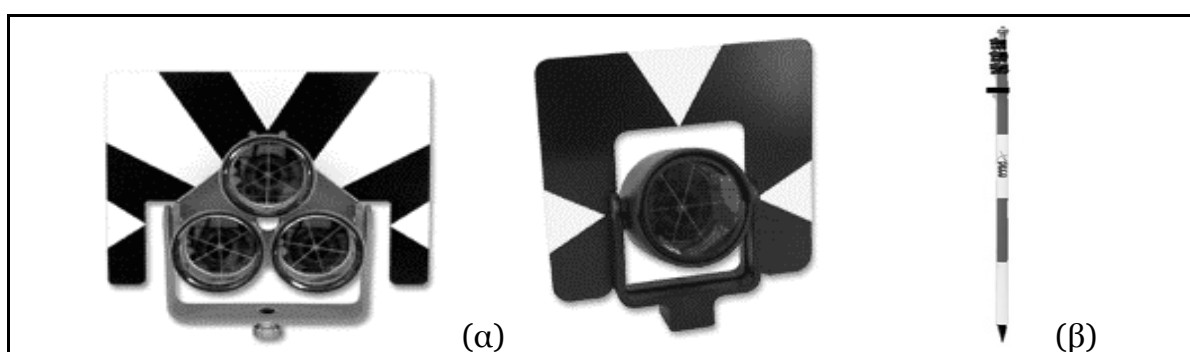


Σχήμα 2.20 Ηλιοτρόπιο [5]

Αν οι μετρήσεις γίνονται κατά τις νυχτερινές ώρες τότε στα σημεία τοποθετούνται, ως στόχοι, φωτεινές πηγές (π.χ. προβολείς) διαφόρων χρωμάτων (π.χ. κόκκινο). Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει αυτές οι φωτεινές πηγές να βρίσκονται μακριά από τα φώτα της πόλης για να αποφεύγονται προβλήματα ορατότητας.

Σήμερα με τους σύγχρονους γεωδαιτικούς σταθμούς ο στόχος των γωνιομετρήσεων και των πλευρομετρήσεων (κατάφωτο) είναι κοινός και ομοαξονικός (εικ. 2.9α), σε αντίθεση με τα όργανα παλαιότερης γενεάς, στα οποία επειδή το όργανο μέτρησης αποστάσεων ήταν τοποθετημένο πάνω στο θεοδόλιχο, ο κοινός στόχος ήταν έκκεντρος κατά την κατακόρυφη έννοια.

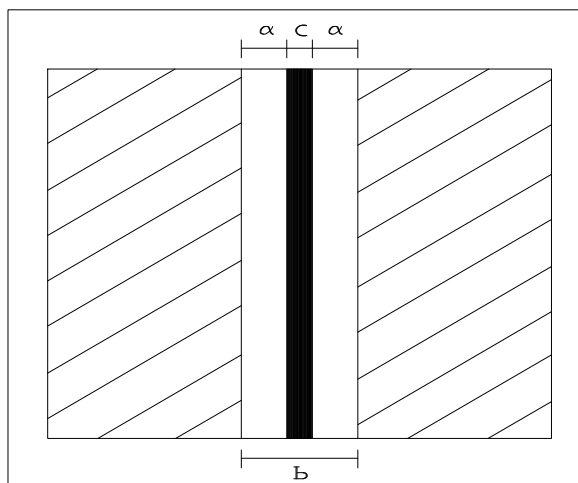
Ο στόχος τοποθετείται είτε πάνω σε τρίποδα ή βάση η οποία κεντρώνεται στο σημείο, είτε σε ειδικό ακόντιο, το οποίο λέγεται *στυλεός* (εικ. 2.9β). Το μήκος του στυλεού είναι αυξομειούμενο, έχει σφαιρική αεροστάθμη για την κατακορύφωση του και μετρητική διάταξη για την απευθείας μέτρηση του ύψους του στόχου. Ο στυλεός τοποθετείται πάνω στο σημείο με την βοήθεια ενός απλού τρίποδα και κατακορυφώνεται όπως το ακόντιο.



Εικόνα 2.9 Στόχοι σύγχρονων γεωδαιτικών σταθμών, στυλεός

Εκτός από το μέγεθος, το σχήμα και το χρώμα του στόχου, σημαντικό στοιχείο για την καλή σκόπευση είναι και το πλάτος του σταυρονήματος που προβάλλεται πάνω στον στόχο. Είναι φανερό ότι αν το σταυρόνημα υπερκαλύπτει τον στόχο τότε παρουσιάζεται ασάφεια στην διχοτόμηση του με αποτέλεσμα την αβέβαιη σκόπευση. Ενώ στην αντίθετη περίπτωση η σκόπευση είναι περισσότερο ασφαλής.

Εμπειρικά έχει αποδειχθεί ότι το σταυρόνημα προβάλλεται με πλάτος  $c$  της τάξης  $c \cong \frac{\rho^{cc} \cdot D}{\rho^{cc}}$ , όπου  $D$  η απόσταση οργάνου – στόχου. Έτσι για  $D=1000m$ , το πλάτος της προβολής του σταυρονήματος στο στόχο προκύπτει ότι είναι  $c \cong 1.5cm$ . Επομένως τα γραμμικά στοιχεία (οριζόντια ή κατακόρυφα) του στόχου θα πρέπει να έχουν πλάτος  $b$  μεγαλύτερο από αυτό (σχ. 2.21). Έχει βρεθεί ότι το πλάτος  $b \cong 2 \cdot a + c$  όπου  $a = \frac{360 \cdot D}{\rho^{cc} \cdot M}$  και  $M$  η μεγέθυνση του τηλεσκοπίου του οργάνου, έτσι για  $D = 1000m$  προκύπτει  $b \cong 5cm$ .



Σχήμα 2.21 Γραμμικά στοιχεία στόχου

Αν αποκλείσουμε τα προβλήματα ορατότητας, τις έντονες θερμοκρασιακές μεταβολές στην ατμόσφαιρα και το σφάλμα εστίασης, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο καλύτερος στόχος είναι η φωτεινή πηγή, ή ο στόχος της μορφής του σχήματος (2.21) ή ο στόχος σχήματος V. Τέλος έχει διαπιστωθεί ότι πρέπει να προτιμώνται οι επίπεδοι στόχοι και να αποφεύγονται οι στόχοι κυλινδρικής ή σφαιρικής μορφής.

## 2.5 ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

### 2.5.1 Ρυθμίσεις στάσης

Πριν αρχίσει η διαδικασία μέτρησης μιας γωνίας (ΒΑΓ) είναι απαραίτητο να γίνουν οι ρυθμίσεις στάσης, τόσο στο γωνιομετρικό όργανο που τοποθετείται πάνω σε τρίποδα (ή βάση) στην κορυφή της γωνίας Α, όσο και στους στόχους οι οποίοι τοποθετούνται πάνω σε τρίποδα (ή βάση) στα σημεία Β, Γ.

Αυτές οι ρυθμίσεις είναι η *κέντρωση* και η *οριζοντίωση* του οργάνου πάνω από το σημείο Α. Με τον όρο κέντρωση εννοείται η διαδικασία που γίνεται για να περάσει ο πρωτεύων άξονας (ΠΠ') του οργάνου από το σημείο Α. Ενώ με τον όρο οριζοντίωση εννοείται η κατακορύφωση του άξονα (ΠΠ'). Αυτές οι δυο ρυθμίσεις, αν και είναι διαφορετικές, γίνονται συγχρόνως με την διαδικασία που περιγράφεται σε βήματα.

### Βήμα 1<sup>ο</sup>

Τοποθετείται ο τρίποδας με το όργανο πάνω, έτσι ώστε το σταυρόνημα της οπτικής κέντρωσης (ή το στίγμα της φωτεινής δέσμης) να βρίσκεται σε μικρή απόσταση (τάξης 1cm) από το σημείο A.

### Βήμα 2<sup>ο</sup>

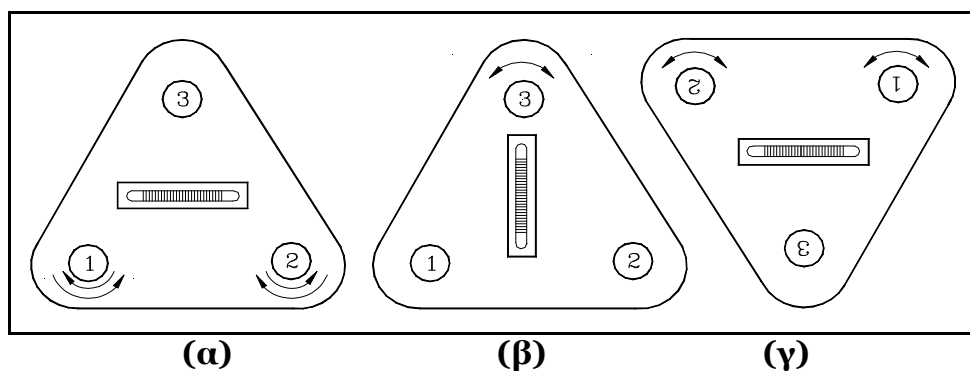
Με την βοήθεια των κοχλιών του τρικόχλιου μετακινείται το σταυρόνημα της οπτικής κέντρωσης (ή το στίγμα της φωτεινής δέσμης) έτσι ώστε να σκοπεύει το σημείο A.

### Βήμα 3<sup>ο</sup>

Αυξομειώνοντας το μήκος των μελών του τρίποδα μετακινείται η φυσαλίδα της σφαιρικής αεροστάθμης του οργάνου στο κανονικό σημείο της.

### Βήμα 4<sup>ο</sup>

Περιστρέφεται το όργανο περί τον (ΠΠ') έτσι ώστε ο άξονας της σωληνωτής αεροστάθμης του οργάνου να γίνει παράλληλη προς τον άξονα δυο κοχλιών του τρικόχλιου. Στρέφονται οι κοχλίες όπως δείχνουν τα βέλη για να μετακινηθεί η φυσαλίδα της σωληνωτής αεροστάθμης στο κανονικό σημείο της (σχ. 2.22α).



Σχήμα 2.22 Οριζοντίωση οργάνου [5]

Στην συνέχεια περιστρέφεται το όργανο κατά 100 g και με τον τρίτο κοχλία μετακινείται η φυσαλίδα της σωληνωτής αεροστάθμης στο κανονικό σημείο της (σχήμα 2.22β). Για τον έλεγχο του σφάλματος του πρωτεύοντα άξονα (ΠΠ') περιστρέφεται το όργανο κατά 100g, αν η φυσαλίδα της σωληνωτής αεροστάθμης παραμείνει στο κανονικό σημείο της τότε δεν υπάρχει σφάλμα (σχ. 2.22γ).

### Βήμα 5<sup>ο</sup>

Ελέγχεται η κέντρωση του οργάνου, αν έχει χαλάσει τότε επαναλαμβάνεται η διαδικασία από το 2<sup>ο</sup> βήμα και κάτω.

Οι ρυθμίσεις στάσης είναι πολύ σημαντικό να ισχύουν σε όλη την διάρκεια των μετρήσεων. Γιαυτό τον λόγο πρέπει να ελέγχονται ως προς την πληρότητα τους όσο διαρκούν οι μετρήσεις. Παράλληλα πρέπει να παίρνονται τα απαραίτητα μέτρα προστασίας του οργάνου από τις καιρικές συνθήκες (π.χ. προστασία του οργάνου από την έντονη ηλιοφάνεια), οι οποίες είναι πιθανό να ευθύνονται για την πλασματική μετακίνηση της αεροστάθμης κατά την διάρκεια των μετρήσεων, χωρίς να έχει χαλάσει η κέντρωση του οργάνου.

### 2.5.2 Μέτρηση οριζόντιας γωνίας

Για να μετρηθεί η οριζόντια γωνία (ΒΑΓ), γίνονται οι ρυθμίσεις στάσης του οργάνου στο σημείο Α. Παράλληλα ρυθμίσεις στάσης γίνονται και στους στόχους στα σημεία Β και Γ, έτσι ώστε ο άξονας του ακοντίου ή ο άξονας του στόχου να είναι κατακόρυφος και να περνά από το αντίστοιχο σημείο.

Εκτός από τις ρυθμίσεις στάσης, κατά τις σκοπεύσεις από το σημείο Α προς τα σημεία Β και Γ, πρέπει να εξαλείφεται και η παράλλαξη, έτσι ώστε το είδωλο του στόχου να παρουσιάζεται ευκρινές πάνω στο επίπεδο του σταυρονήματος του τηλεσκοπίου του οργάνου.

Η διαδικασία της μέτρησης της οριζόντιας γωνίας (ΒΑΓ) περιγράφεται στα επόμενα με βήματα.

#### *Βήμα 1<sup>ο</sup>*

Με τον σκοπευτικό άξονα του τηλεσκοπίου του οργάνου σκοπεύεται ο στόχος στο σημείο Β, έστω Β<sub>I</sub> η ανάγνωση του οριζόντιου δίσκου του οργάνου.

#### *Βήμα 2<sup>ο</sup>*

Περιστρέφεται το όργανο περί τον (ΠΠ΄) και σκοπεύεται ο στόχος στο σημείο Γ, έστω Γ<sub>I</sub> η ανάγνωση του οριζόντιου δίσκου του οργάνου.

#### *Βήμα 3<sup>ο</sup>*

Αναστρέφεται το τηλεσκόπιο του οργάνου περί τον δευτερεύοντα άξονα (ΔΔ΄), περιστρέφεται το όργανο περί τον άξονα (ΠΠ΄) και σκοπεύεται ο στόχος στο σημείο Γ, έστω Γ<sub>II</sub> η ανάγνωση του οριζόντιου δίσκου του οργάνου.

#### *Βήμα 4<sup>ο</sup>*

Περιστρέφεται το όργανο περί τον (ΠΠ΄) και σκοπεύεται ο στόχος στο σημείο Β, έστω Β<sub>II</sub> η ανάγνωση του οριζόντιου δίσκου του οργάνου.

Το σύνολο των βημάτων 1÷4 αποτελούν μια *πλήρη περίοδο* μέτρησης της οριζόντιας γωνίας (ΒΑΓ). Τα βήματα 1 και 2, περιγράφουν την *1<sup>η</sup> ημιπερίοδο* μέτρησης της οριζόντιας γωνίας, αυτά γίνονται σε θέση I τηλεσκοπίου. Με τα βήματα 3 και 4 περιγράφεται η *2<sup>η</sup> ημιπερίοδος* μέτρησης της οριζόντιας γωνίας, αυτά γίνονται σε θέση II τηλεσκοπίου.

Οι οριζόντιες γωνίες μετρούνται σε περισσότερες από μια περιόδους ανάλογα με την επιδιωκόμενη ακρίβεια στις τοπογραφικές εργασίες. Αυτό γίνεται για να υπολογισθεί τελικά η ακριβής τιμή της γωνίας. Συνήθως, χωρίς να είναι απαραίτητο, το πλήθος (ν) των περιόδων είναι άρτιος αριθμός (π.χ. 2, 4, 6, ...).

Στα παλαιά οπτικά θεοδόλιχα η μέτρηση της γωνίας σε περισσότερες από μια περιόδους, περιόριζε το πιθανό σφάλμα διαιρέσεων του οριζόντιου δίσκου. Η αρχή μέτρησης κάθε μιας περιόδου έπρεπε να διαφέρει από την προηγούμενη και την επόμενη περίπου κατά  $(\frac{200}{\nu})^{\circ}$ , όπου ν το πλήθος των περιόδων. Έτσι σε μια

γωνία που είχε προγραμματισθεί να μετρηθεί σε 4 περιόδους, η αρχή μέτρησης έπρεπε να είναι κοντά στους 0<sup>ο</sup>, 50<sup>ο</sup>, 100<sup>ο</sup> και 150<sup>ο</sup> για κάθε μια από αυτές.

Για την καλή σκόπευση των στόχων που βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση (μερικά km) η *ατμοσφαιρική διάθλαση* (Παράρτημα 2) είναι σημαντικός παράγοντας. Εξαιτίας της δημιουργούνται ασαφή είδωλα με κίνηση, κατά συνέπεια η ποιότητα

των μετρήσεων είναι μειωμένη. Η ατμοσφαιρική διάθλαση μεταβάλλεται κατά την διάρκεια της ημέρας, γιαντό το λόγο οι καλύτερες ώρες για τις μετρήσεις των οριζοντίων γωνιών είναι νωρίς το πρωί (ανατολή ÷ ~9 π.μ.) και αργά το απόγευμα (~5 μ.μ. ÷ δύση), επειδή τα είδωλα των στόχων είναι πιο σταθερά. Ειδικότερα προτείνεται οι στόχοι που βρίσκονται δυτικά να σκοπεύονται κατά το πρώτο διάστημα και οι στόχοι που βρίσκονται ανατολικά κατά το δεύτερο διάστημα. Οι δυσκολίες των σκοπεύσεων εξαιτίας της ατμοσφαιρικής διάθλασης αποφεύγονται με νυχτερινές μετρήσεις, οι οποίες όμως απαιτούν ειδικό εξοπλισμό και καλή οργάνωση.

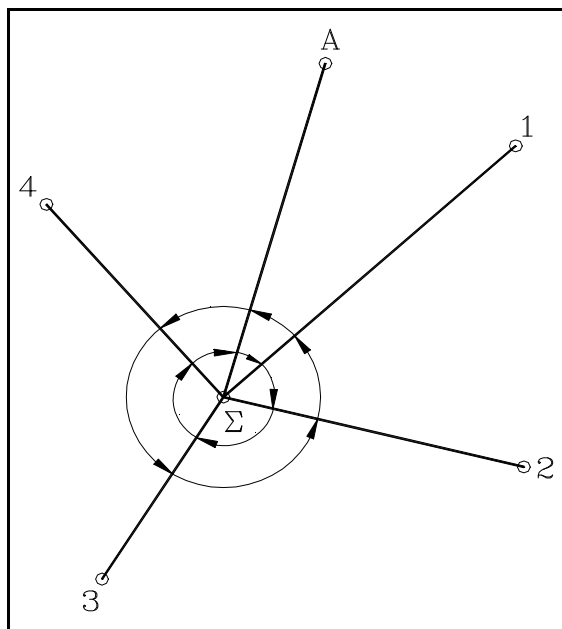
### 2.5.3 Μέτρηση οριζόντιων γωνιών σταθμού

Για την μέτρηση των διαδοχικών γωνιών ενός σταθμού ( $\Sigma$ ), προς περισσότερα των δυο σημεία στο ύπαιθρο, χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι. Στις επόμενες ενότητες περιγράφονται οι κυριότερες από αυτές που χρησιμοποιούνται σήμερα.

#### 2.5.3α Μέθοδος των πλήρων περιστροφών

Με βάση αυτή την μέθοδο επιλέγεται ένα σημείο A, από αυτά που πρόκειται να σκοπευθούν, ως αφετηρία των σκοπεύσεων. Με αρχή το σημείο A σκοπεύονται δεξιόστροφα όλα τα σημεία (1, 2, 3, 4) σε θέση I καθώς επίσης και η αφετηρία A. Αυτή η σειρά των σκοπεύσεων αποτελεί την 1<sup>η</sup> ημιπερίοδο της 1<sup>ης</sup> περιόδου.

Κατά την 2<sup>η</sup> ημιπερίοδο της 1<sup>ης</sup> περιόδου με αρχή το σημείο A σκοπεύονται αριστερόστροφα όλα τα σημεία (1, 2, 3, 4), όπως επίσης και η αφετηρία σε θέση II. Η διαδικασία των μετρήσεων παρουσιάζεται στο (σχ. 2.23).



Σχήμα 2.23 Μέθοδος των πλήρων περιστροφών

Η ίδια εργασία επαναλαμβάνεται για όσες περιόδους πρόκειται να γίνουν οι μετρήσεις των γωνιών του σταθμού.

Όπως γίνεται φανερό από την περιγραφή της μεθόδου, η αφετηρία A σκοπεύεται στην αρχή και στο τέλος κάθε μιας από τις δύο ημιπεριόδους, δηλαδή προκύπτουν

τελικά τέσσερις σκοπεύσεις για κάθε περίοδο προς το σημείο A. Η δεύτερη σκόπευση της 1<sup>ης</sup> ημιπεριόδου και η πρώτη σκόπευση της 2<sup>ης</sup> ημιπεριόδου της αφετηρίας A χρησιμοποιούνται για τον έλεγχο της ποιότητας των μετρήσεων χωρίς να συμμετέχουν στον τελικό υπολογισμό των τελικών τιμών των γωνιών. Με αυτή την μέθοδο η τιμή μιας γωνίας προκύπτει από την αφαίρεση των τελικών μέσων όρων των αναγνώσεων των σκοπεύσεων των δυο διευθύνσεων της γωνίας. Στην ενότητα 2.6.1 δίνεται παράδειγμα υπολογισμού των τελικών τιμών των γωνιών και των τυπικών σφαλμάτων.

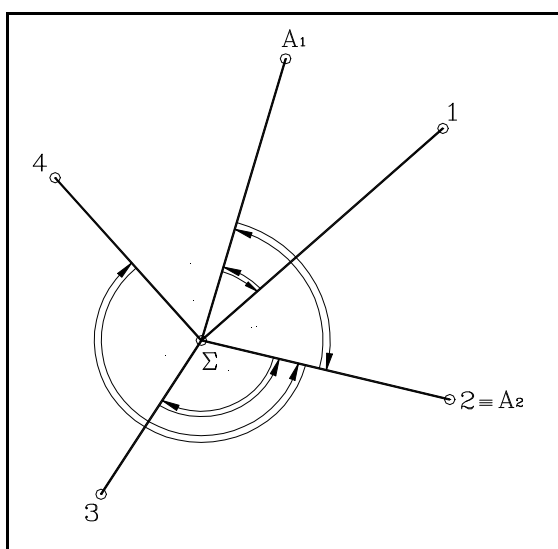
Η μέθοδος των πλήρων περιστροφών προτείνεται να χρησιμοποιείται κατά την διάρκεια καλών καιρικών συνθηκών, έτσι ώστε να υπάρχει καλή ορατότητα από τον σταθμό προς τα σημεία. Επίσης κατά την επιλογή της αφετηρίας A σημαντικό ρόλο παίζει η ευκρίνεια του ειδώλου του A. Γενικά αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται ευρύτατα λόγω της ταχύτητας της.

### 2.5.3β Άλλες μέθοδοι

- *Μέθοδος των διευθύνσεων*

Όπως στην μέθοδο των πλήρων περιστροφών έτσι και στην μέθοδο των διευθύνσεων ορίζεται μια αφετηρία  $A_1$  ως αρχή των μετρήσεων. Με αρχή την διεύθυνση  $\Sigma A_1$  μετριέται ξεχωριστά κάθε γωνία σε θέση I και II προς τα σημεία (1, 2). Αν κατά την διάρκεια των μετρήσεων παρουσιασθούν προβλήματα ορατότητας στην αφετηρία  $A_1$ , τότε υπάρχει δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί και άλλη αφετηρία  $A_2$  ( $A_2 \equiv 2$ ). Στη συνέχεια με αρχή την νέα αφετηρία  $A_2$  μετρώνται σε θέση I και II ξεχωριστά οι γωνίες προς τα υπόλοιπα σημεία (3, 4). Σε αυτή την μέθοδο θα πρέπει να μετρηθεί με αυξημένη ακρίβεια η γωνία μεταξύ των διευθύνσεων  $\Sigma A_1$  και  $\Sigma A_2$ . Η διαδικασία των μετρήσεων παρουσιάζεται στο (σχ. 2.24).

Η μέθοδος των διευθύνσεων απαιτεί σημαντικά περισσότερο χρόνο της μεθόδου που περιγράφηκε στην ενότητα 2.5.3α και εφαρμόζεται όταν υπάρχουν προβλήματα ορατότητας κατά την διάρκεια των μετρήσεων προς τα σημεία.

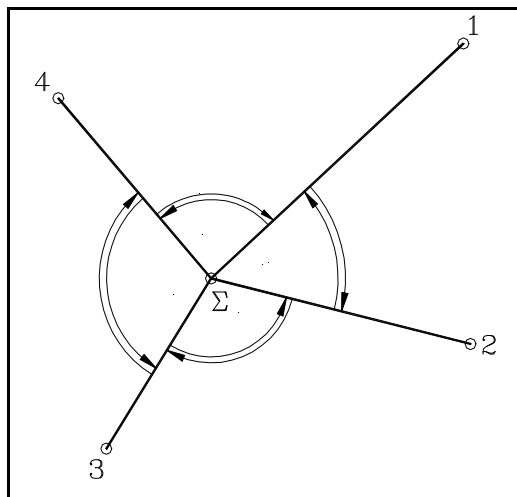


Σχήμα 2.24 Μέθοδος των διευθύνσεων



- Μέθοδος των γωνιών

Κατά την μέθοδο των γωνιών μετρούνται ανεξάρτητα σε θέση I και II όλες οι γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των διαδοχικών διευθύνσεων. Η διαδικασία των μετρήσεων παρουσιάζεται στο (σχ. 2.25).



Σχήμα 2.25 Μέθοδος των γωνιών

Με αυτή την μέθοδο οι γωνίες που είναι μεγαλύτερες από τις μετρούμενες προκύπτουν από το άθροισμα των αντίστοιχων μετρημένων με αποτέλεσμα η ακρίβεια τους να είναι μικρότερη από αυτές.

Η μέθοδος των γωνιών απαιτεί σημαντικά περισσότερο χρόνο από την μεθόδου των πλήρων περιστροφών.

#### 2.5.4 Μέτρηση κατακόρυφης γωνίας

Για να μετρηθεί η κατακόρυφη γωνία  $Z_{AB}$  από το σημείο A προς το σημείο B, της πλευράς (AB), γίνονται οι ρυθμίσεις στάσης του οργάνου στο σημείο A και οι ρυθμίσεις στάσης του στόχου στο σημείο B. Επίσης εξαλείφεται η παράλλαξη όπως και κατά την μέτρηση της οριζόντιας γωνίας.

Σκοπεύεται σε θέση I με τον σκοπευτικό άξονα του οργάνου το σημείο B, έστω  $Z_{ABI}$  η ανάγνωση του κατακόρυφου δίσκου των μετρήσεων. Αυτή η διαδικασία αποτελεί την 1<sup>η</sup> ημιπερίοδο της 1<sup>ης</sup> περιόδου. Για την 2<sup>η</sup> ημιπερίοδο της 1<sup>ης</sup> περιόδου σκοπεύεται σε θέση II με τον σκοπευτικό άξονα του οργάνου το σημείο B έστω  $Z_{ABII}$  η ανάγνωση του κατακόρυφου δίσκου των μετρήσεων.

Με την μέτρηση των κατακόρυφων γωνιών σε δυο θέσεις τηλεσκοπίου εξαλείφεται το σφάλμα δείκτη. Αυτό το σφάλμα προκύπτει όταν η αφετηρία μέτρησης των ζενίθιων γωνιών δεν ταυτίζεται, όπως θα έπρεπε, με τον πρωτεύοντα άξονα (ΠΠ') του οργάνου. Το σφάλμα δείκτη θα υπολογισθεί στην ενότητα 2.6.2.

Αν απαιτηθεί να μετρηθεί η κατακόρυφη γωνία σε περισσότερες περιόδους επαναλαμβάνεται η προηγούμενη διαδικασία. Παρατηρείται ότι κατά την μέτρηση της ζενίθιας γωνίας σε περισσότερες από μια περιόδους δεν είναι δυνατό να αλλάξει η αρχή μέτρησης των γωνιών. Δηλαδή η μέτρηση της κατακόρυφης γωνίας σε πολλές περιόδους ουσιαστικά είναι επαναλαμβανόμενη μέτρηση της γωνίας στο ίδιο τμήμα του κατακόρυφου δίσκου.

Η ατμοσφαιρική διάθλαση επιδρά και στις μετρήσεις των κατακορύφων γωνιών. Το καλύτερο διάστημα της ημέρας για τις μετρήσεις είναι το μεσημέρι, σε αυτό το διάστημα η ατμόσφαιρα παρουσιάζει σχετική σταθερότητα. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται κατά τους καλοκαιρινούς μήνες, κατά την διάρκεια των οποίων οι συνθήκες σκόπευσης το μεσημέρι είναι δύσκολες.

## 2.6 ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

### 2.6.1 Υπολογισμός τιμής οριζόντιας γωνίας

Η τελική τιμή της οριζόντιας γωνίας (ΒΑΓ) υπολογίζεται ως μέσος όρος από τις μετρήσεις στη θέση I και II του οργάνου ως εξής:

Θέση I :  $(BAΓ)_I = (Γ_I - Β_I)$ , αν  $(BAΓ)_I < 0 \Rightarrow (BAΓ)_I = 400^g + (Γ_I - Β_I)$

Θέση II :  $(BAΓ)_{II} = (Γ_{II} - Β_{II})$ , αν  $(BAΓ)_{II} < 0 \Rightarrow (BAΓ)_{II} = 400^g + (Γ_{II} - Β_{II})$

$$(BAΓ) = \frac{(BAΓ)_I + (BAΓ)_{II}}{2}$$

Αν η γωνία (ΒΑΓ) έχει μετρηθεί σε  $n$  περιόδους με μέσους όρους αντίστοιχα  $(BAΓ)_1, (BAΓ)_2, \dots, (BAΓ)_n$ , η τελική τιμή και το τυπικό σφάλμα της προκύπτουν με βάση τις σχέσεις που δίνονται στην ενότητα 1.2.5.

Πρέπει να αναφερθεί ότι οι μετρούμενες γωνίες πρέπει να πληρούν συγκεκριμένους περιορισμούς, που καθορίζονται με βάση τον κανονισμό (ΠΔ 696/74), προκειμένου να χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια στους υπολογισμούς. Σε αντίθετη περίπτωση οι μετρήσεις των γωνιών θα πρέπει να επαναληφθούν.

Για την καταγραφή των γωνιομετρήσεων στο ύπαιθρο και τον υπολογισμό των τελικών τιμών των οριζοντίων γωνιών είναι σε χρήση σχετικό έντυπο. Στον πίνακα (2.1) δίνεται το αντίστοιχο έντυπο με την καταγραφή των μετρήσεων των γωνιών, οι οποίες έχουν γίνει με την μέθοδο των πλήρων περιστροφών, και τον υπολογισμό των τελικών τιμών τους.

Από την συμπλήρωση του εντύπου προκύπτουν οι επόμενες υποδείξεις και παρατηρήσεις:

- Οι αναγνώσεις των σκοπεύσεων στις θέσεις I και II του οργάνου, σε κάθε μια διεύθυνση, διαφέρουν περίπου κατά  $200^g$ .
- Η μέση τιμή μεταξύ των αναγνώσεων των σκοπεύσεων στις θέσεις I και II προκύπτει ως μέσος όρος μεταξύ των τιμών της I και της  $(II-200)$ . Αν  $(II-200) < 0$ , τότε η μέση τιμή προκύπτει ως μέσος όρος μεταξύ των τιμών  $(400+I)$  και  $[400+(II-200)]$ .
- Προτείνεται η πρώτη περίοδος των μετρήσεων να μην αρχίζει ακριβώς από το  $0^g$  αλλά από μια ανάγνωση κοντά στους  $0^g$  (π.χ.  $1^g$ ).
- Η μέση ανηγμένη τιμή της ανάγνωσης σε μια οποιαδήποτε διεύθυνση είναι το μέτρο της γωνίας που σχηματίζεται από την αρχική και την συγκεκριμένη διεύθυνση.
- Ο γενικός μέσος όρος (ΓΜΟ) προκύπτει ως μέσος όρος των μέσων ανηγμένων τιμών κάθε μιας διεύθυνσης.
- Για να υπολογισθεί μια οποιαδήποτε γωνία που σχηματίζεται από διευθύνσεις εκτός της αρχικής, αφαιρούνται οι αντίστοιχες αναγνώσεις του γενικού μέσου

όρου (ΓΜΟ) αυτών των διευθύνσεων (τελική – αρχική). Αν από την αφαίρεση προκύψει αρνητική γωνία τότε προστίθενται σε αυτή 400°. Η αβεβαιότητα μιας γωνίας μεταξύ των σκοπευόμενων διευθύνσεων υπολογίζεται από τις αβεβαιότητες των αντίστοιχων σκοπεύσεων ( $\sigma_X$ ), οι οποίες υπολογίζονται κατά τα γνωστά (Ενότητα 1.2.5).

Ημερομηνία :		Παρατηρητής:				Όργανο :		
Καιρικές Συνθήκες :								
ΣΤΑΣΗ	ΣΚΟΠΕΥΣΗ ΠΡΟΣ	ΘΕΣΗ I	ΘΕΣΗ II	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ	ΜΕΣΗ ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΤΙΜΗ	(ΓΜΟ)	$\sigma_0^{cc}$	$\sigma_X^{cc}$
Σ2	Σ3	0.0060	199.9995	0.0028	0.0000	0.0000	-	-
	Σ4	53.3245	253.3225	53.3235	53.3207	53.3224	17	8
	Σ5	121.6905	321.6915	121.6910	121.6882	121.6896	16	8
	Σ6	152.9580	352.9585	152.9583	152.9555	152.9554	8	4
	Σ3	0.0020	200.0030	0.0025	-			
Σ2	Σ3	50.0020	250.0030	50.0025	0.0000			
	Σ4	103.3250	303.3230	103.3240	53.3215			
	Σ5	171.6920	371.6930	171.6925	121.6900			
	Σ6	202.9575	2.9585	202.9580	152.9555			
	Σ3	50.0025	250.0050	50.0038	-			
Σ2	Σ3	100.0025	300.0020	100.0023	0.0000			
	Σ4	153.3260	353.3275	153.3268	53.3245			
	Σ5	221.6935	21.6945	221.6940	121.6917			
	Σ6	252.9580	52.9590	252.9585	152.9562			
	Σ3	100.0035	300.0015	100.0025	-			
Σ2	Σ3	150.0040	350.0035	150.0038	0.0000			
	Σ4	203.3270	3.3265	203.3268	53.3230			
	Σ5	271.6925	71.6920	271.6923	121.6885			
	Σ6	302.9575	102.9585	302.9580	152.9542			
	Σ3	150.0035	350.0030	150.0033	-			

**Πίνακας 2.1** Υπολογισμός τελικών τιμών των οριζόντιων γωνιών και των αβεβαιοτήτων τους

### 2.6.2 Υπολογισμός τιμής κατακόρυφης γωνίας

Όπως έχει ήδη αναφερθεί η ζενίθια γωνία θα πρέπει να μετριέται σε δυο θέσεις τηλεσκοπίου για να εξαλειφθεί το σφάλμα δείκτη. Αν  $Z_{AB}^I$  και  $Z_{AB}^{II}$  οι μετρήσεις των ζενίθιων γωνιών της διεύθυνσης AB σε θέση I και II αντίστοιχα, τότε αν δεν υπάρχει σφάλμα στη μέτρηση της γωνίας θα πρέπει να ισχύει :

$$Z_{AB}^I + Z_{AB}^{II} = 400^g \Leftrightarrow Z_{AB}^I = 400^g - Z_{AB}^{II}$$

Δηλαδή οι γωνίες  $Z_{AB}^I$  και  $(400^g - Z_{AB}^{II})$  αποτελούν δυο παρατηρήσεις της ίδιας κατακόρυφης γωνίας  $Z_{AB}$ . Έτσι, η τελική τιμή της ζενίθιας γωνίας  $Z_{AB}$  υπολογίζεται ως μέσος όρος αυτών. Τελικά ισχύει:

$$Z_{AB} = \frac{Z_{AB}^I + 400^g - Z_{AB}^{II}}{2} \quad (2.13)$$

Για να υπολογισθεί η διόρθωση εξαιτίας της ύπαρξης του σφάλματος δείκτη ( $\delta$ ), αν υπάρχει, μετριέται σε μια διεύθυνση η ζενίθια γωνία σε δυο θέσεις  $Z^I$  και  $Z^{II}$ . Σε αυτή την περίπτωση, σε κάθε μια από τις μετρήσεις των κατακόρυφων γωνιών στις θέσεις I και II, ισχύει:

$$(Z^I + \delta) + (Z^{II} + \delta) = 400^g \Rightarrow \delta = \frac{400^g - (Z^I + Z^{II})}{2} \quad (2.14)$$

$$\text{άρα } Z = Z^I + \delta = \frac{2 \cdot Z^I + 400^g - (Z^I + Z^{II})}{2} \Rightarrow Z = \frac{Z^I + 400^g - Z^{II}}{2} \quad (2.15)$$

Στους σύγχρονους γεωδαιτικούς σταθμούς, όπου υπάρχει ισοσταθμικό σύστημα ρύθμισης του δείκτη μέτρησης των κατακόρυφων γωνιών, δεν χρειάζεται να γίνεται διόρθωση. Ωστόσο όμως οι κατακόρυφες γωνίες θα πρέπει να μετρούνται σε θέσεις I και II για να υπολογίζεται η τελική τιμή της γωνίας ως μέσος όρος απαλλαγμένος από τα σφάλματα σκόπευσης λόγω του παρατηρητή ή της ποιότητας του ειδώλου.

Για την καταγραφή των μετρήσεων των κατακόρυφων γωνιών στο ύπαιθρο και τον υπολογισμό των τελικών τιμών τους ήταν σε χρήση σχετικό έντυπο. Στον πίνακα (2.2) δίνεται το αντίστοιχο έντυπο με την καταγραφή των μετρήσεων των κατακόρυφων γωνιών και τον υπολογισμό των τελικών τιμών των γωνιών.

Από την συμπλήρωση του εντύπου προκύπτουν οι επόμενες παρατηρήσεις:

- Οι αναγνώσεις των σκοπεύσεων στις θέσεις I και II του τηλεσκοπίου, στη διεύθυνση, έχουν άθροισμα περίπου  $400^g$ .
- Η μέση τιμή μεταξύ των αναγνώσεων των σκοπεύσεων στις θέσεις I και II προκύπτει ως μέσος όρος μεταξύ των τιμών I και  $(400^g - II)$ .
- Είναι φανερό ότι μέση ανηγμένη τιμή δεν υπάρχει στις κατακόρυφες γωνίες.
- Ο γενικός μέσος όρος (ΓΜΟ) προκύπτει ως μέσος όρος των μέσων τιμών κάθε μιας διεύθυνσης. Η αβεβαιότητα μιας κατακόρυφης γωνίας ( $\sigma_x$ ) υπολογίζεται κατά τα γνωστά (Ενότητα 1.2.5).

Ημερομηνία :		Παρατηρητής:				Όργανο :		
Καιρικές Συνθήκες :								
ΣΤΑΣΗ	ΣΚΟΠΕΥΣΗ ΠΡΟΣ	ΘΕΣΗ Ι	ΘΕΣΗ ΙΙ	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ	ΜΕΣΗ ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΤΙΜΗ	(ΓΜΟ)	Σ <sub>0</sub> <sup>cc</sup>	Σ <sub>χ</sub> <sup>cc</sup>
Σ2	Σ3	99.8840	300.1185	99.8828		99.8834	21	10
	Σ4	103.0765	296.9215	103.0775		103.0778	7	3
	Σ5	104.9365	295.0615	104.9375		104.9373	8	4
	Σ6	108.1430	291.8515	108.1458		108.1433	20	10
Σ2	Σ3	99.8880	300.1200	99.8810				
	Σ4	103.0760	296.9185	103.0788				
	Σ5	104.9355	295.0625	104.9365				
	Σ6	108.1365	291.8535	108.1415				
Σ2	Σ3	99.8850	300.1130	99.8860				
	Σ4	103.0750	296.9200	103.0775				
	Σ5	104.9370	295.0605	104.9383				
	Σ6	108.1405	291.8525	108.1440				
Σ2	Σ3	99.8865	300.1190	99.8838				
	Σ4	103.0740	296.9195	103.0773				
	Σ5	104.9345	295.0610	104.9368				
	Σ6	108.1385	291.8545	108.1420				

**Πίνακας 2.2** Υπολογισμός τελικών τιμών των κατακόρυφων γωνιών και των αβεβαιότητων τους

## 2.7 ΑΝΑΓΩΓΕΣ - ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

Οι γωνίες, οριζόντιες και κατακόρυφες, που μετρούνται στο ύπαιθρο απαιτείται να αναχθούν και να διορθωθούν πριν χρησιμοποιηθούν στους υπολογισμούς για τον προσδιορισμό της θέσης των σημείων. Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζονται οι αναγωγές και διορθώσεις, οι τιμές των οποίων στις τρέχουσες τοπογραφικές εργασίες είναι πιθανό να είναι μικρότερες από την ακρίβεια μέτρησης των γωνιών οπότε δεν απαιτείται να ληφθούν υπόψη.

### 2.7.1 Αναγωγή οριζόντιας και κατακόρυφης γωνίας κατά την κάθετη στο ελλειψοειδές

Όπως έχει αναφερθεί για να μετρηθούν οι οριζόντιες και κατακόρυφες γωνίες, κατά τις εργασίες υπαίθρου, πρέπει το θεοδόλιχο να κεντρωθεί και να κατακορυφωθεί πάνω από την κορυφή της γωνίας (Ενότητα 2.4.1). Επομένως οι γωνίες στο ύπαιθρο μετρούνται με το θεοδόλιχο τοποθετημένο πάνω στην διεύθυνση της κατακορύφου. Γιαυτό τον λόγο, οι γωνίες πρέπει να αναχθούν κατά την κάθετη πάνω στην επιφάνεια αναφοράς πριν χρησιμοποιηθούν στους υπολογισμούς.

Η αναγωγή των μετρουμένων γωνιών μπορεί να γίνει μόνο αν είναι γνωστή η απόκλιση της κατακορύφου, στο σημείο από το οποίο γίνονται οι μετρήσεις (Ενότητα 4.2). Ειδικότερα, πρέπει να είναι γνωστές οι συνιστώσες της απόκλισης, ξ και η, κατά τον μεσημβρινό του σημείου και κατά τον παράλληλο αντίστοιχα.

Για την οριζόντια γωνία  $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ , όπου  $\alpha_1$  και  $\alpha_2$  τα αζιμούθια των πλευρών της γωνίας, η διόρθωση  $\delta\beta$  δίνεται από την σχέση:

$$\delta\beta = (\xi \cdot \sin \alpha_2 - \eta \cdot \cos \alpha_2) \cdot \cot Z_2 - (\xi \cdot \sin \alpha_1 - \eta \cdot \cos \alpha_1) \cdot \cot Z_1 \quad (2.16)$$

όπου  $Z_1, Z_2$  οι ζενίθιες γωνίες των διευθύνσεων των πλευρών της γωνίας.

Για την κατακόρυφη γωνία  $Z$  η διόρθωση  $\delta Z$  δίνεται από την σχέση:

$$\delta Z = \xi \cdot \cos \alpha + \eta \cdot \sin \alpha \quad (2.17)$$

όπου  $\alpha$  το αζιμούθιο της σκοπευόμενης διεύθυνσης.

Η διόρθωση στις οριζόντιες γωνίες, σε περιοχές μεγάλων αποκλίσεων και μεγάλων κατακορύφων γωνιών, μεταξύ των σκοπευόμενων σημείων, μπορεί να είναι αρκετά δευτερόλεπτα βαθμού. Στις κατακόρυφες γωνίες η αντίστοιχη διόρθωση μπορεί να είναι μερικές δεκάδες δευτερολέπτων βαθμού επομένως είναι σημαντική και δεν πρέπει να αγνοείται.

### 2.7.2 Αναγωγή οριζόντιας γωνίας λόγω της χαρτογραφικής προβολής του ΕΓΣΑ '87

Οι οριζόντιες γωνίες, που μετρούνται κατά τις εργασίες στο ύπαιθρο, όπως αναφέρθηκε, πρέπει να αναχθούν αρχικά στην επιφάνεια αναφοράς. Στη συνέχεια ανάγονται στην επιφάνεια προβολής του ΕΓΣΑ '87 (Ενότητα 1.3.4). Η αναγωγή των οριζόντιων γωνιών στην επιφάνεια προβολής λέγεται *αναγωγή λόγω χαρτογραφικής προβολής*.

Οι πλευρές των οριζόντιων γωνιών που μετρούνται στο ύπαιθρο είναι ευθείες γραμμές στο χώρο. Αυτές προβάλλονται αρχικά στην επιφάνεια αναφοράς ως καμπύλες και στη συνέχεια στην επιφάνεια προβολής επίσης ως καμπύλες γραμμές (σχ. 2.26). Γι' αυτό τον λόγο, εξαιτίας της χαρτογραφικής προβολής του ΕΓΣΑ '87, προκύπτει αναγωγή, από την εφραπτόμενη της καμπύλης στην επιφάνεια αναφοράς, στην χορδή της καμπύλης στην επιφάνεια προβολής.

Η αναγωγή  $\delta_{AB}$  κατά την διεύθυνση (AB), δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$\delta_{AB}^{cc} = -7.836^{cc} \cdot \Delta y_{AB} \cdot (x_{AB/3} - 0.5) \quad (2.18)$$

όπου :  $\Delta y_{AB} = y_B - y_A$  η διαφορά των τεταγμένων των σημείων A και B σε Km,

$x_{AB/3} = \frac{2x_A + x_B}{3}$  σε εκατομμύρια μέτρα [μεγάμετρα (Mm)],  $x_A, x_B, y_A, y_B$  οι

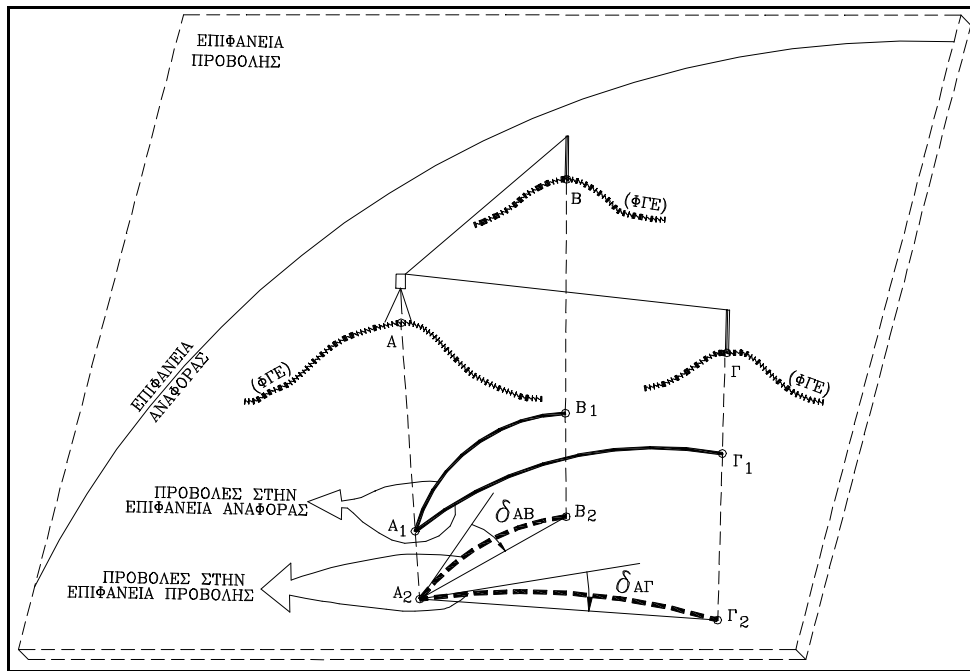
συντεταγμένες των σημείων A, B στο ελληνικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (ΕΓΣΑ '87)

Αντίστοιχα η αναγωγή  $\delta_{BA\Gamma}$  σε μια οριζόντια γωνία (BAΓ) δίνεται ως διαφορά των αναγωγών των διευθύνσεων της από την σχέση:

$$\delta_{BA\Gamma}^{cc} = -7.836^{cc} \cdot [\Delta y_{A\Gamma} \cdot (x_{A\Gamma/3} - 0.5) - \Delta y_{AB} \cdot (x_{AB/3} - 0.5)] \quad (2.19)$$

όπου :  $x, y$  οι συντεταγμένες των σημείων στο (ΕΓΣΑ '87),  $\Delta y_{AB} = y_B - y_A$  και

$\Delta y_{A\Gamma} = y_\Gamma - y_A$  σε Km,  $x_{AB/3} = \frac{2x_A + x_B}{3}$  και  $x_{A\Gamma/3} = \frac{2x_A + x_\Gamma}{3}$  σε Mm.



Σχήμα 2.26 Αναγωγή λόγω χαρτογραφικής προβολής

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

• Δίνονται οι προσεγγιστικές συντεταγμένες των σημείων B, A και Γ της οριζόντιας γωνίας  $\beta=(BA\Gamma)$ ,  $x_B=139343m$ ,  $y_B=4405159m$ ,  $x_A=135841m$ ,  $y_A=4408654m$ ,  $x_\Gamma=139245m$  και  $y_\Gamma=4402143m$ . Να υπολογισθεί η αναγωγή  $\delta_{BA\Gamma}$  της οριζόντιας γωνίας (BAΓ).

Από την σχέση (2.19) που δίνει την αναγωγή ( $\delta_{BA\Gamma}$ ) της γωνίας (BAΓ) υπολογίζεται:

$$\delta_{BA\Gamma} = -7.836^{cc} \cdot \left[ -6.5 \cdot \left( \frac{2 \cdot 0.136 + 0.139}{3} - 0.5 \right) - 3.5 \cdot \left( \frac{2 \cdot 0.136 + 0.139}{3} - 0.5 \right) \right]$$

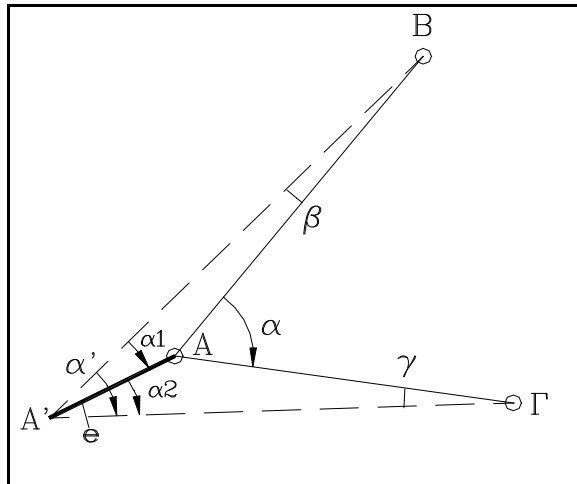
άρα  $\delta_{BA\Gamma} \cong -9^{cc}$

Επομένως η τιμή της γωνίας (BAΓ) που μετρήθηκε στο ύπαιθρο, μετά την αναγωγή της στην επιφάνεια αναφοράς, για να αναχθεί στην επιφάνεια προβολής θα πρέπει να μειωθεί κατά  $9^{cc}$ , δηλαδή  $\beta' = \beta - 9^{cc}$ .

### 2.7.3 Αναγωγή οριζόντιας γωνίας λόγω έκκεντρης στάσης

Πολλές φορές ζητείται να υπολογισθεί η οριζόντια γωνία  $\alpha=(BA\Gamma)$ , αλλά επειδή δεν είναι δυνατή η κέντρωση – οριζοντίωση του οργάνου στην κορυφή της γωνίας A, μετριέται η γωνία  $\alpha'=(BA'A)$  από ένα σημείο A' το οποίο βρίσκεται σε μικρή απόσταση e από το σημείο A (σχ. 2.27).

Σε αυτές τις περιπτώσεις μετριέται η εκκενρότητα  $e=AA'$  και οι οριζόντιες γωνίες  $\alpha_1=(BA'A)$ ,  $\alpha_2=(AA'\Gamma)$ . Οι αποστάσεις  $D_{AB}=AB$  και  $D_{A\Gamma}=A\Gamma$  είναι γνωστές (αν τα A, B, και Γ είναι γνωστά) ή μπορούν να μετρηθούν ή τέλος μπορούν να εκτιμηθούν από ένα χάρτη.



**Σχήμα 2.27** Μέτρηση οριζόντιας γωνίας με έκκεντρη στάση

Από το σχήμα 2.27 με βάση και την σχετική θέση των σημείων A, A', B και Γ είναι φανερό ότι η διόρθωση δ που πρέπει να γίνει στην μέτρηση της γωνίας (BA'Γ) είναι  $\delta = \beta + \gamma$ .

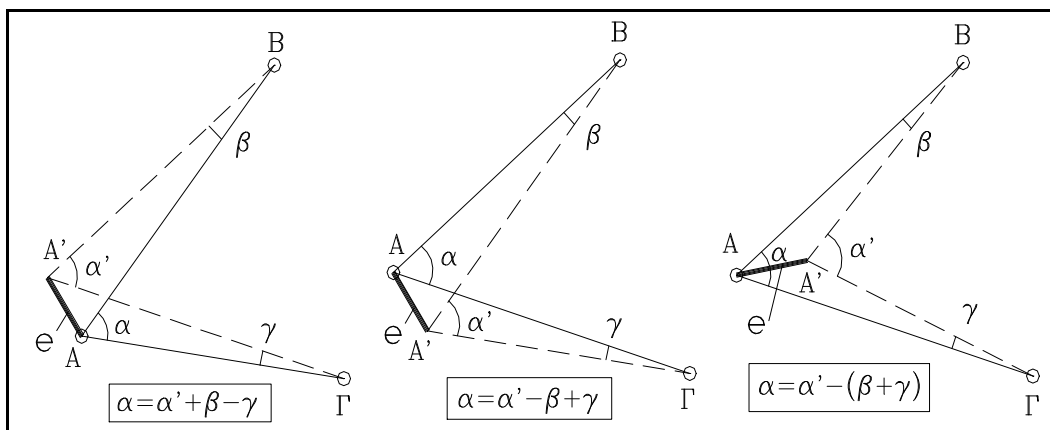
Δηλαδή ισχύει  $\alpha = \alpha' + \delta$ , οι μικρές γωνίες β και γ προσδιορίζονται από τις επόμενες σχέσεις :

$$\beta^{cc} = \frac{e \cdot \sin \alpha_1}{D_{AB}} \cdot \rho^{cc} \quad \text{και} \quad \gamma^{cc} = \frac{e \cdot \sin \alpha_2}{D_{A\Gamma}} \cdot \rho^{cc} \quad (2.20)$$

Αν A' βρίσκεται πάνω στη διχοτόμο της γωνίας BA'Γ τότε η διόρθωση δ γίνεται μέγιστη. Σε αυτή την περίπτωση  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha'}{2}$  και η  $\max \delta$  δίνεται από την σχέση:

$$\max \delta^{cc} = e \cdot \sin \frac{\alpha'}{2} \cdot \left( \frac{D_{AB} + D_{A\Gamma}}{D_{AB} \cdot D_{A\Gamma}} \right) \cdot \rho^{cc} \quad (2.21)$$

Γενικά από την σχετική θέση του A' ως προς το A εξαρτάται το πρόσημο των μικρών γωνιών β και γ, για τον τελικό υπολογισμό της διόρθωσης δ. Σύμφωνα με το επόμενο σχ. 2.28 ισχύει :



**Σχήμα 2.28** Περιπτώσεις έκκεντρης στάσης



## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

• Η οριζόντια γωνία (BAΓ), λόγω αδυναμίας κέντρωσης – οριζοντίωσης του οργάνου στην κορυφή Α, πρόκειται να μετρηθεί με έκκεντρη στάση, όπως φαίνεται στο (σχ. 2.29). Γιαυτό τον λόγο ορίσθηκε το σημείο Α' πάνω στην διεύθυνση της διχοτόμου της (BAΓ), όπως φαίνεται στο (σχ. 2.27). Μετρήθηκε η εκκεντρότητα σκόπευσης  $e=AA'=1\text{m}$  και προσδιορίσθηκε το μέτρο της (BA'Γ)=136.284<sup>s</sup>. Αν έχει εκτιμηθεί ότι  $D_{AB} \cong D_{AG} = D \cong 2000\text{m}$ . Ζητείται να προσδιορισθούν το μέτρο της (BAΓ) και η ακρίβεια με την οποία θα πρέπει να είναι μετρημένα (ή εκτιμημένα) τα μήκη των πλευρών AB και AG της γωνίας (BAΓ) αν η αβεβαιότητα  $\sigma_{\max\delta}=\pm 50^{\text{cc}}$ .

Από την σχέση (2.21) υπολογίζεται το  $\max\delta$ :

$$\max\delta = e \cdot \sin \frac{\alpha'}{2} \cdot \frac{2}{D} \cdot \rho^{\text{cc}} \Rightarrow \max\delta = 559^{\text{cc}}$$

Με βάση την σχετική θέση των Α και Α', το μέτρο της γωνίας είναι: (BAΓ)=136.284+0.056=136.340<sup>s</sup>

$$\text{Από την ίδια σχέση προκύπτει } \sigma_D = \pm \left( \frac{2 \cdot e}{\max\delta^2} \cdot \sin \frac{\alpha'}{2} \right) \cdot \sigma_{\max\delta} \cdot \rho^{\text{cc}} = \pm 179\text{m}$$

Επομένως το μήκος των πλευρών της γωνίας είναι δυνατό να εκτιμηθεί από ένα χάρτη κλίμακας 1:50000, στον οποίο η εκτίμηση μπορεί να φθάσει τα  $\pm 50\text{m}$ .

### 2.7.4 Διόρθωση κατακόρυφης γωνίας λόγω ατμοσφαιρικής διάθλασης και καμπυλότητας της γης

Λόγω της ατμοσφαιρικής διάθλασης και της καμπυλότητας της γης, απαιτείται να γίνει διόρθωση της κατακόρυφης γωνίας που μετριέται στο ύπαιθρο. Επειδή αυτή η διόρθωση έχει, κατά κύριο λόγο, σημαντική επίδραση στον υπολογισμό των υψομετρικών διαφορών, γι' αυτό τον λόγο αυτή εξετάζεται στο κεφάλαιο της υψομετρίας στις ενότητες 4.13.1 και 4.13.2.

## 2.8 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

Η ακρίβεια της μέτρησης μιας οριζόντιας γωνίας εξαρτάται από σφάλματα που οφείλονται στα γωνιομετρικά όργανα, στα βοηθητικά όργανα (στόχοι, τρίποδες κ.λπ.) που χρησιμοποιούνται κατά τις μετρήσεις, στον παρατηρητή και στην ατμόσφαιρα που παρεμβάλλεται μεταξύ οργάνου και στόχων.

Σε αυτή την ενότητα δεν θα γίνει αναφορά στο σφάλμα που οφείλεται στον παρατηρητή λόγω της προσωπικής εξίσωσης. Αυτό το σφάλμα είναι εντελώς υποκειμενικό και δεν είναι εύκολο ούτε να προβλεφθεί, με κάποιο τρόπο, ούτε να μειωθεί με διάφορες τεχνικές μετρήσεων. Σε κάθε περίπτωση ως σφάλμα παρατηρητή δεν εννοείται το σφάλμα εξαιτίας της άγνοιας χρήσης των οργάνων (χονδροειδές σφάλμα).

### 2.8.1 Σφάλμα γεωμετρίας των αξόνων του οργάνου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί οι άξονες του οργάνου (πρωτεύων ΠΠ', δευτερεύων ΔΔ' και σκοπευτικός ΣΣ') θα πρέπει να πληρούν τις συνθήκες καθετότητας. Δηλαδή, πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες  $\Pi\Pi' \perp \Delta\Delta'$  και  $\Delta\Delta' \perp \Sigma\Sigma'$ .

Η πιθανή μη πλήρωση αυτών των συνθηκών κατά τις μετρήσεις στο ύπαιθρο εξαλείφεται με σκοπεύσεις σε δυο θέσεις I και II, και εξαγωγή του μέσου όρου. Με σκοπεύσεις σε δυο θέσεις I και II εξαλείφεται επίσης και η πιθανή εκκεντρότητα των οριζόντιων δίσκων μέτρησης στα οπτικά θεοδόλια.

### 2.8.2 Σφάλμα κέντρωσης οργάνου - στόχων

Αν το σφάλμα κέντρωσης των στόχων είναι  $\sigma_{C_1}$  και  $\sigma_{C_2}$ , το σφάλμα κέντρωσης του οργάνου είναι  $\sigma_{C_3}$  και οι αποστάσεις του οργάνου από τους στόχους είναι  $D_1$  και  $D_2$ . Τότε το σφάλμα  $(\sigma_{\beta_C})^{cc}$  στη μέτρηση της οριζόντιας γωνίας  $\beta$  δίνεται από την σχέση :

$$\sigma_{\beta_C}^{cc} = \pm \sqrt{\left[ \frac{\sigma_{c_1}^2}{D_1^2} + \frac{\sigma_{c_2}^2}{D_2^2} + \frac{\sigma_{c_3}^2}{D_1 \cdot D_2} \cdot (D_1^2 + D_2^2 - 2D_1 \cdot D_2 \cdot \cos\beta) \right]} \cdot \rho^{cc} \quad (2.22)$$

όπου  $\rho^{cc} = 636620$

Αν θεωρήσουμε ότι  $\sigma_{C_1} \cong \sigma_{C_2} \cong \sigma_{C_3} = \sigma_C$  και  $D_1 \cong D_2 = D$  τότε το σφάλμα  $(\sigma_{\beta_C})^{cc}$  της οριζόντιας γωνίας ( $\beta$ ) δίνεται από την προσεγγιστική σχέση :

$$\sigma_{\beta_C} \cong \pm \frac{2\sigma_C}{D} \cdot \rho^{cc} \quad (2.23)$$

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Αν το σφάλμα κέντρωσης των στόχων είναι  $\sigma_{C_1} = \sigma_{C_2} = 2\text{mm}$ , το σφάλμα κέντρωσης του οργάνου είναι  $\sigma_{C_3} = 3\text{mm}$ , οι αποστάσεις των πλευρών της γωνίας είναι  $D_1 = 300\text{m}$ ,  $D_2 = 400\text{m}$  και η γωνία  $\beta = 120^\circ$ , να προσδιορισθεί το σφάλμα  $(\sigma_{\beta_C})^{cc}$  στη μέτρηση της οριζόντιας γωνίας  $\beta$  λόγω της εκκεντρότητας του οργάνου και των στόχων.

Από την σχέση (3.22) προκύπτει:

$$\sigma_{\beta_C} = \pm \rho^{cc} \cdot \sqrt{\left[ \frac{0.002^2}{300^2} + \frac{0.002^2}{400^2} + \frac{0.003^2}{300^2 \cdot 400^2} \cdot (300^2 + 400^2 - 2 \cdot 300 \cdot 400 \cdot \cos 120^\circ) \right]}$$

τελικά  $\sigma_{\beta_C} \cong \pm 11^{cc}$

Παρατηρείται ότι η συμβολή της εκκεντρότητας του γωνιομετρικού οργάνου στο σφάλμα της οριζόντιας γωνίας είναι αρκετά σημαντική. Αν γινόταν χρήση της προσεγγιστικής σχέσης (2.23) τότε  $\sigma_{\beta_C} \cong \pm 9^{cc}$ , που διαφέρει ελάχιστα από την τιμή που υπολογίσθηκε.

### 2.8.3 Σφάλμα οριζοντίωσης οργάνου

Αν η ευαισθησία της σωληνωτής αεροστάθμης του γωνιομετρικού οργάνου είναι  $\varepsilon^{cc}$ , οι ζενίθιες γωνίες που έχουν μετρηθεί από την στάση προς τους στόχους είναι  $Z_1$  και  $Z_2$ , τότε το σφάλμα  $(\sigma_{\beta_L})^{cc}$  της μετρημένης οριζόντιας γωνίας  $\beta$ , μετά από καλή οριζοντίωση του οργάνου και προσεκτικές παρατηρήσεις, δίνεται από την επόμενη σχέση :

$$\sigma_{\beta_L} = \pm 0.2 \cdot \varepsilon \cdot \sqrt{\cot^2 Z_1 + \cot^2 Z_2} \quad (2.24)$$

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

• Αν η ευαισθησία της σωληνωτής αεροστάθμης του οργάνου είναι  $\varepsilon = 100^{cc}$ , οι ζενίθιες γωνίες από την στάση προς τους στόχους είναι  $Z_1 = 85^g$  και  $Z_2 = 110^g$  να υπολογισθεί το σφάλμα  $(\sigma_{\beta_L})^{cc}$  στη μέτρηση της οριζόντιας γωνίας  $\beta$ , λόγω του σφάλματος της οριζοντίωσης του οργάνου.

Από την σχέση (2.24) υπολογίζεται:

$$\sigma_{\beta_L} = \pm 0.2 \cdot 100 \cdot \sqrt{\cot^2 85 + \cot^2 110} \Rightarrow \sigma_{\beta_L} \cong \pm 6^{cc}$$

### 2.8.4 Σφάλμα σκόπευσης στόχων

Έχει προσδιορισθεί ότι το σφάλμα  $\sigma_p$  κατά τη σκόπευση ενός στόχου σε μια διεύθυνση εξαρτάται από την μεγέθυνση  $M$  του τηλεσκοπίου του οργάνου. Σε μέσης ή μεγάλης ακρίβειας όργανα το σφάλμα, λόγω της σκόπευσης, δίνεται από την σχέση  $\sigma_p = \pm \frac{30^{cc}}{M}$ . Γενικά για αποστάσεις οργάνου – στόχου πάνω από μερικές εκατοντάδες μέτρα, το σφάλμα σε μια διεύθυνση είναι τάξης μεγέθους:

$$\sigma_p \cong \pm \frac{150^{cc}}{M} \quad (2.25)$$

Αν η οριζόντια γωνία  $\beta$  έχει μετρηθεί σε  $n$  περιόδους και θεωρηθεί ότι το σφάλμα σε κάθε μια από τις δυο διευθύνσεις της είναι  $\sigma_p$ , τότε το σφάλμα της οριζόντιας γωνίας  $\sigma_{\beta_p}$  λόγω των σκοπεύσεων στους στόχους δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$\sigma_{\beta_p} = \pm \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} \quad (2.26)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι το σφάλμα  $\sigma_{\beta_p}$  δεν οφείλεται στην πιθανή εκκεντρότητα των στόχων, που εξετάζεται στην ενότητα 2.8.2, αλλά στην αδυναμία καλής σκόπευσης των στόχων λόγω της μεγέθυνσης του τηλεσκοπίου του οργάνου μέτρησης.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Η οριζόντια γωνία  $\beta$ , με πλευρές της τάξης των μερικών εκατοντάδων μέτρων, μετριέται σε  $n=4$  περιόδους με όργανο μεγέθυνσης  $M=30$ . Να υπολογισθεί το σφάλμα στη μέτρηση της γωνίας  $\beta$  λόγω της σκόπευσης των στόχων.

Από τις σχέσεις (2.25) και (2.26) προκύπτει:

$$\sigma_p \cong \pm \frac{150^{cc}}{M} \Rightarrow \sigma_p \cong \pm \frac{150}{30} = \pm 5^{cc}$$

$$\sigma_{\beta_p} = \pm \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma_{\beta_p} = \pm \frac{5}{\sqrt{4}} \cong \pm 3^{cc}$$

### 2.8.5 Σφάλμα ανάγνωσης

Το σφάλμα ανάγνωσης  $\sigma_r$  εξαρτάται από την απόδοση  $A$  του γωνιομετρικού οργάνου. Δηλαδή από την μικρότερη γωνία που είναι δυνατό άμεσα να αναγνωσθεί στο όργανο. Συγκεκριμένα, για όργανα απόδοσης της τάξης των μερικών δευτερολέπτων του βαθμού (cc) ισχύει:

$$\sigma_r = \pm 2.5 \cdot A^{cc} \quad (2.27)$$

Για όργανα απόδοσης της τάξης λεπτού του βαθμού (c) ισχύει:

$$\sigma_r = \pm 0.3 \cdot A^c \quad (2.28)$$

Αν η οριζόντια γωνία  $\beta$  μετρηθεί σε  $n$  περιόδους τότε το σφάλμα  $\sigma_{\beta_r}$  της γωνίας λόγω της ανάγνωσης δίνεται από την σχέση :

$$\sigma_{\beta_r} = \pm \frac{\sigma_r}{\sqrt{n}} \quad (2.29)$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Με όργανο απόδοσης δυο δευτερολέπτων μετριέται η οριζόντια γωνία  $\beta$  σε 4 περιόδους. Να υπολογισθεί το σφάλμα ανάγνωσης.

Από την σχέση (2.29) ισχύει:

$$\sigma_{\beta_r} = \pm \frac{\sigma_r}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sigma_{\beta_r} = \pm \frac{2.5 \cdot 2^{cc}}{\sqrt{4}} \cong \pm 3^{cc}$$

### 2.8.6 Σφάλμα λόγω αστάθειας του τρίποδα

Η αύξηση της θερμοκρασίας λόγω της ηλιοφάνειας ή άλλης αιτίας επιφέρει στροφή στον τρίποδα με αποτέλεσμα να προκαλείται συστηματικό σφάλμα της τάξης των αρκετών δευτερολέπτων. Επίσης σφάλμα προκαλείται λόγω της μετακίνησης των μελών του τρίποδα όταν δεν έχει γίνει καλή έδραση από την αρχή των μετρήσεων ή όταν ο τρίποδας εδράζεται σε ασταθές έδαφος (π.χ. άσφαλτος) ή εξαιτίας των καιρικών συνθηκών (π.χ. άνεμος).

Για την μείωση του σφάλματος λόγω αύξησης της θερμοκρασίας απαιτείται η προστασία του οργάνου από τον ήλιο ιδιαίτερα στις μετρήσεις που γίνονται κατά την διάρκεια του καλοκαιριού.

### 2.8.7 Σφάλμα λόγω διάθλασης

Η διάθλαση στην ατμόσφαιρα προκαλεί ασάφεια στα είδωλα των παρατηρούμενων στόχων με αποτέλεσμα να προκύπτει σφάλμα στις μετρήσεις των γωνιών στο ύπαιθρο. Γενικά δεν υπάρχει, μέχρι σήμερα, μέθοδος προσδιορισμού του μεγέθους του σφάλματος. Γιαντό τον λόγο, στις ενότητες 2.5.2 και 2.5.4, προτείνονται συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα, κατά την διάρκεια της ημέρας, μέσα στα οποία μπορούν να γίνουν με μεγαλύτερη ασφάλεια οι μετρήσεις των οριζοντίων και κατακόρυφων γωνιών.

Η διάθλαση εξαρτάται από την μεταβολή της θερμοκρασίας κατά μήκος της γραμμής σκόπευσης. Έτσι σφάλμα λόγω της διάθλασης παρουσιάζεται στις οριζόντιες γωνίες, που μετρούνται σε αστικό περιβάλλον, όταν οι σκοπεύσεις περνούν σε μικρή απόσταση από επιφάνειες κτιρίων εκτεθειμένες στον ήλιο. Επίσης σφάλμα οφειλόμενο στην διάθλαση, προκύπτει σε έντονα κεκλιμένες σκοπεύσεις ή σκοπεύσεις πάνω από θάλασσα. Καλές συνθήκες για τις μετρήσεις των οριζόντιων γωνιών δημιουργούνται κατά την διάρκεια της ημέρας όταν υπάρχει συννεφιά, οπότε ο φωτισμός είναι ομοιόμορφος.

### 2.8.8 Προεκτίμηση ακριβείας μέτρησης οριζόντιας γωνίας

Με βάση τα σφάλματα που αναφέρονται στις προηγούμενες ενότητες 2.8.2, 2.8.3, 2.8.4 και 2.8.5, είναι δυνατό να γίνει εκτίμηση της ακριβείας της οριζόντιας γωνίας πριν γίνουν οι μετρήσεις στο ύπαιθρο. Η προεκτίμηση της ακριβείας της μέτρησης των γωνιών είναι σημαντικός παράγοντας του σχεδιασμού μιας τοπογραφικής εργασίας, αφού δίνει την δυνατότητα επιλογής των οργάνων μέτρησης με βάση τις επιδιωκόμενες ακρίβειες. Επίσης υπάρχει η δυνατότητα προεκτίμησης της ακριβείας μέτρησης των γωνιών με δεδομένες τις ακρίβειες των οργάνων που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν.

Σε αυτό το πλαίσιο δίνεται ένα παράδειγμα για την καλύτερη κατανόηση της προεκτίμησης της μέτρησης μιας οριζόντιας γωνίας στο επίπεδο του σχεδιασμού των τοπογραφικών εργασιών.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

• Η οριζόντια γωνία με μέτρο τάξης μεγέθους (ΒΑΓ)  $\cong 125^s$  και με μήκη πλευρών της τάξης των  $D_{AB} \cong 800m$  και  $D_{AG} \cong 1200m$ , πρόκειται να μετρηθεί σε  $n = 2$  περιόδους. Για την μέτρηση της θα χρησιμοποιηθεί γωνιομετρικό όργανο με τεχνικά χαρακτηριστικά μεγέθυνση  $M = 30X$ , ευαισθησία σωληνωτής αεροστάθμης  $\varepsilon = 60^{cc}$ , απόδοση  $A = 1^{cc}$ . Οι στόχοι στα σημεία Β και Γ πρόκειται να σκοπευθούν με ζενίθιες γωνίες της τάξης  $Z_{AB} \cong 80^s$  και  $Z_{AG} \cong 115^s$ . Εκτιμάται ότι η εκκεντρότητα των στόχων και του οργάνου είναι της τάξης  $\sigma_{c_1} = \sigma_{c_2} \cong 5mm$  και  $\sigma_{c_3} \cong 3mm$  αντίστοιχα.

Ζητείται να εκτιμηθεί η ακρίβεια  $\sigma_\beta$  της μέτρησης της γωνίας  $\beta=(\text{ΒΑΓ})$ . Τι παρατηρείται, ως προς την τελική ακρίβεια της γωνίας, αν διπλασιασθούν οι περίοδοι μέτρησης της.

Η ακρίβεια της μέτρησης της οριζόντιας γωνίας  $\sigma_\beta$  δίνεται ως συνάρτηση των ανεξάρτητων σφαλμάτων των ενοτήτων 2.8.2, 2.8.3, 2.8.4 και 2.8.5 από την επόμενη σχέση που προκύπτει από τον νόμο μετάδοσης σφαλμάτων :

$$\sigma_\beta = \pm \sqrt{\sigma_{\beta_C}^2 + \sigma_{\beta_L}^2 + \sigma_{\beta_P}^2 + \sigma_{\beta_r}^2}$$

Με βάση τις σχέσεις που έχουν δοθεί στις προηγούμενες ενότητες έχουμε :

$$\sigma_{\beta_C} = \pm \rho^{cc} \cdot \sqrt{\left[ \frac{0.005^2}{800^2} + \frac{0.005^2}{1200^2} + \frac{0.003^2}{800^2 \cdot 1200^2} \cdot (800^2 + 1200^2 - 2 \cdot 800 \cdot 1200 \cdot \cos 125) \right]}$$

$$\sigma_{\beta_C} = \pm 5.83^{cc}$$

$$\sigma_{\beta_L} = \pm 0.2 \cdot S \cdot \sqrt{\cot^2 80 + \cot^2 115} \Rightarrow \sigma_{\beta_L} = \pm 4.85^{cc}$$

$$\sigma_{\beta_P} = \pm \frac{\sigma_P}{\sqrt{2}} = \pm \frac{150^{cc}}{30 \cdot \sqrt{2}} \Rightarrow \sigma_{\beta_P} = \pm 3.54^{cc}$$

$$\sigma_{\beta_r} = \pm \frac{\sigma_r}{\sqrt{2}} = \pm \frac{2.5 \cdot 1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma_{\beta_r} = \pm 1.77^{cc}$$

$$\sigma_\beta = \pm \sqrt{5.83^2 + 4.85^2 + 3.54^2 + 1.77^2} \Rightarrow \sigma_\beta \cong \pm 9^{cc}$$

Αν διπλασιασθούν οι περίοδοι μέτρησης της γωνίας ( $n=4$ ) τα σφάλματα της κέντρωσης και της οριζοντίωσης δεν μεταβάλλονται. Ενώ τα σφάλματα της σκόπευσης και της ανάγνωσης υπολογίζονται ότι είναι  $\sigma_{\beta_P} = \pm 2.5^{cc}$  και

$\sigma_{\beta_r} = \pm 1.25^{cc}$  αντίστοιχα. Οπότε

$$\sigma_\beta = \pm \sqrt{5.83^2 + 4.85^2 + 2.5^2 + 1.25^2} \Rightarrow \sigma_\beta = \pm 8^{cc}$$

Παρατηρείται δηλαδή ότι διπλασιάζοντας τις περιόδους μέτρησης της γωνίας η ακρίβεια της  $\sigma_\beta$  δεν μεταβάλλεται σημαντικά.

## 2.9 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δώστε τους ορισμούς των εννοιών : οριζόντια γωνία (ΒΑΓ), αζιμούθιο της πλευράς (ΑΒ), μαγνητικό αζιμούθιο της πλευράς (ΑΒ), γωνία διεύθυνσης της πλευράς (ΑΒ).

**2.** Δώστε τους ορισμούς των εννοιών : ζενίθια γωνία  $Z_{AB}$ , γωνία ύψους  $\nu_{AB}$ , κλίση της πλευράς (ΑΒ). Πως συσχετίζονται οι προηγούμενες έννοιες.

- 3.** Δίνεται η απόσταση δυο σημείων A, B  $D_{AB} = 422.96\text{m}$  και τα υψόμετρα τους  $H_A = 125.26\text{m}$  και  $H_B = 99.88\text{m}$ . Μεταξύ των σημείων A και B πρόκειται να τοποθετηθεί αγωγός αποχέτευσης. Στο σημείο A ο αγωγός θα τοποθετηθεί σε βάθος 2m και η κλίση του μέχρι το μέσον M της πρέπει να είναι 7%, να υπολογισθεί η κλίση του αγωγού στο τμήμα MB όταν δίνεται ότι στο σημείο B πρέπει ο αγωγός να τοποθετηθεί σε βάθος 3m. (Απάντηση: 5.5%)
- 4.** Για να προσδιορισθεί η οριζόντια γωνία μεταξύ των ευθυγραμμίων AB και AG μετρήθηκαν οι πλευρές  $\beta = \gamma = 20.000\text{m}$  και  $\alpha = 28.644\text{m}$  με σφάλμα μέτρησης  $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = \sigma_\gamma = \pm 2\text{mm}$ . Να υπολογισθεί η οριζόντια γωνία BAG και το σφάλμα  $\sigma_{BAG}$  που γίνεται στον υπολογισμό της. (Απάντηση:  $BAG = 101.630^g$ ,  $\sigma_{BAG} = \pm 1.6^c$ )
- 5.** Ποιες είναι οι βασικές συνθήκες λειτουργίας του θεοδολίχου. Πως γίνεται ο έλεγχος και η εξάλειψη τους στο ύπαιθρο. Ποιες από αυτές μπορούν να αποκατασταθούν.
- 6.** Ποιες είναι οι ρυθμίσεις στάσης που γίνονται σε ένα γωνιομετρικό όργανο. Πότε γίνονται αυτές οι ρυθμίσεις και με ποιο τρόπο.
- 7.** Περιγράψτε την διαδικασία μέτρησης σε μια περίοδο μιας οριζόντιας γωνίας και μιας κατακόρυφης γωνίας.
- 8.** Περιγράψτε τις μεθόδους μέτρησης των οριζόντιων γωνιών ενός σταθμού. Αναφέρατε τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα κάθε μιας. Πότε είναι το κατάλληλο χρονικό διάστημα για την οριζόντιων και κατακόρυφων γωνιών.
- 9.** Να υπολογισθούν ο γενικός μέσος όρος (ΓΜΟ) και η τυπική απόκλιση  $s_x$  των γωνιών (οριζόντιων και κατακόρυφων) που δίνονται στο επόμενο έντυπο.

Ημερομηνία : 25.9.08 Παρατηρητής: Κ.Δ. Όργανο : DKM2 Ώρα : 8<sup>00</sup> - 12<sup>00</sup>  
 Καιρικές Συνθήκες : Συννεφιά, άνεμος μέτριος, ορατότητα καλή, Θ=25 °C, P=760 mmHg

ΣΤΑΣΗ	ΣΚΟΠ. ΣΗΜ.	ΘΕΣΗ I	ΘΕΣΗ II	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ	ΜΕΣΗ ΑΝΗΓΜΕΝΗ ΤΙΜΗ	(ΓΜΟ)	σ <sub>0</sub> <sup>cc</sup>	σ <sub>χ</sub> <sup>cc</sup>
Σ	1	0.0000	199.9974					
	2	332.0643	132.0620					
	3	343.2009	143.1984					
Σ	1	50.0000	250.0013					
	2	382.0592	182.0647					
	3	393.1998	193.2024					
Σ	1	100.0000	299.9999					
	2	32.0600	232.0648					
	3	43.2001	243.2015					
Σ	1	150.0000	349.9993					
	2	82.0588	282.0596					
	3	93.2014	293.1985					
Σ	1	108.5969	291.4072					
	2	105.8586	294.1446					
	3	103.7650	296.2402					
Σ	1	108.5977	291.4065					
	2	105.8563	294.1476					
	3	103.7639	296.2427					
Σ	1	108.5984	291.4074					
	2	105.8568	294.1454					
	3	103.7617	296.2409					
Σ	1	108.5977	291.4070					
	2	105.8568	294.1471					
	3	103.7633	296.2418					

**10.** Η οριζόντια γωνία (ΒΑΓ) μετρήθηκε με έκκεντρη στάση από το Α', πάνω στην διχοτόμο της γωνίας, μπροστά από τη κορυφή Α προς την πλευρά των σημείων Β και Γ και βρέθηκε (ΒΑ'Γ)=85.457%. Η εκκεντρότητα μέτρησης e=1.5m, επίσης έχει εκτιμηθεί ότι  $D_{AB} \cong D_{AG} = D = 3000m$ . Ζητούνται να υπολογισθούν η διόρθωση  $max\delta^{cc}$  και η τιμή της γωνίας (ΒΑΓ). Αν η αβεβαιότητα  $\sigma_{max\delta} = \pm 30^{cc}$  να διαπιστωθεί αν είναι δυνατό να εκτιμηθούν τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΑΓ από ένα χάρτη με κλίμακα 1:50000. (Απάντηση:  $max\delta^{cc} = 396^{cc}$ , (ΒΑΓ)=85.417%,  $\sigma_D \cong \pm 230m$ ).



**11.** Δίνονται οι προσεγγιστικές συντεταγμένες των σημείων Β, Α και Γ της οριζόντιας γωνίας  $\beta=(\text{ΒΑΓ})$ ,  $x_B=140376\text{m}$ ,  $y_B=4405159\text{m}$ ,  $x_A=136832\text{m}$ ,  $y_A=4408654\text{m}$ ,  $x_\Gamma=140236\text{m}$  και  $y_\Gamma=4402284\text{m}$ . Να υπολογισθεί η αναγωγή  $\delta_{\text{ΒΑΓ}}$  της οριζόντιας γωνίας (ΒΑΓ). (Απάντηση:  $\delta_{\text{ΒΑΓ}}=-8^{\text{cc}}$ )

**12.** Να αναφέρετε τα σφάλματα από τα οποία εξαρτάται η ακρίβεια της μέτρησης μιας οριζόντιας γωνίας. Ποια από αυτά είναι τα σημαντικότερα.

**13.** Η οριζόντια γωνία με μέτρο τάξης μεγέθους  $\beta \cong 120^{\text{s}}$  και με μήκη πλευρών της τάξης των  $D_{\text{ΑΒ}} \cong 1000\text{m}$  και  $D_{\text{ΑΓ}} \cong 1500\text{m}$ , πρόκειται να μετρηθεί σε  $n=2$  περιόδους. Για την μέτρηση της θα χρησιμοποιηθεί γωνιομετρικό όργανο με τεχνικά χαρακτηριστικά: μεγέθυνση  $M=30X$ , ευαισθησία σωληνωτής αεροστάθμης  $\varepsilon=100^{\text{cc}}$ , απόδοση  $A=2^{\text{cc}}$ . Οι στόχοι στα σημεία Β και Γ πρόκειται να σκοπευθούν με ζενίθιες γωνίες τάξης μεγέθους  $Z_{\text{ΑΒ}} \cong 85^{\text{s}}$  και  $Z_{\text{ΑΓ}} \cong 110^{\text{s}}$ . Εκτιμάται ότι η εκκεντρότητα των στόχων και του οργάνου είναι της τάξης  $\sigma_{\text{C}_1}=\sigma_{\text{C}_2} \cong 5\text{mm}$  και  $\sigma_{\text{C}_3} \cong 7\text{mm}$  αντίστοιχα. Ζητείται να εκτιμηθεί η ακρίβεια  $\sigma_\beta$  της μέτρησης της γωνίας  $\beta=(\text{ΒΑΓ})$ , η ακρίβεια να δοθεί και σε ppm. (Απάντηση:  $\sigma_\beta \cong 10^{\text{cc}}$  ή  $\sigma_\beta \cong 16 \text{ ppm}$ )

### **3. ΜΗΚΗ – ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ**

#### **3.1 ΓΕΝΙΚΑ**

Τα μήκη αποτελούν στην Τοπογραφία βασικά μετρούμενα μεγέθη. Στο ύπαιθρο συνήθως μετρούνται κεκλιμένα μήκη. Ανάλογα με τις ιδιαίτερες ανάγκες κάθε τοπογραφικής εργασίας στα μετρημένα μήκη επιβάλλονται κατάλληλες διορθώσεις και αναγωγές προκειμένου να χρησιμοποιηθούν για τον οριζοντιογραφικό και υψομετρικό προσδιορισμό σημείων σε εφαρμογές αποτυπώσεων και χαράξεων. Μήκη μπορεί να μετρηθούν ή να υπολογιστούν με τέσσερις βασικούς τρόπους: με απευθείας μέτρηση του μήκους με μηχανικό τρόπο, μέσω γεωμετρικών υπολογισμών, με οπτικές μεθόδους και με ηλεκτρομαγνητικές μεθόδους. Σε αυτό το κεφάλαιο περιλαμβάνονται οι βασικές μέθοδοι και τα όργανα μέτρησης μηκών στην Τοπογραφία, οι διορθώσεις και οι αναγωγές τους καθώς και η εκτίμηση της ακρίβειάς τους.

#### **3.2 ΑΜΕΣΗ ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΗΚΟΥΣ – ΜΕΤΡΟΤΑΙΝΙΕΣ**

Ο προσδιορισμός ενός μήκους με άμεσο τρόπο απορρέει με απ' ευθείας μέτρηση του μήκους μέσω μιας μετρητικής διάταξης που διατρέχει τη ζητούμενη απόσταση από το ένα της άκρο στο άλλο. Ο υπολογισμός της τιμής ενός μήκους με αυτό τον τρόπο προκύπτει ως διαφορά των αναγνώσεων στην αρχή και το τέλος της απόστασης οι οποίες αντιστοιχούν σε υποδιαίρεσεις γνωστού μήκους που φέρει το μετρητικό σύστημα. Τα κύρια όργανα άμεσης μέτρησης μηκών είναι ο *κανόνας*, ο *διαβήτης υπαίθρου*, ο *μετρητικός τροχός* και η *μετροταινία*. Με αυτά τα όργανα είναι δυνατή η μέτρηση κεκλιμένων είτε οριζόντιων μηκών. Ωστόσο, δεδομένου ότι στην Τοπογραφία δεν χρησιμοποιούνται άμεσα τα κεκλιμένα μήκη γενικά, επιδιώκεται η απ' ευθείας μέτρηση οριζόντιων μηκών. Εξαιρεση αποτελεί ο μετρητικός τροχός με την βοήθεια του οποίου υπολογίζεται το ανάπτυγμα της τροχιάς που διαγράφει το όργανο στο χώρο κατά την κίνησή του. Επισημαίνεται ότι για κλασσικές τοπογραφικές εργασίες το βασικό όργανο που εξακολουθεί να χρησιμοποιείται σήμερα για την μέτρηση μηκών με άμεσο τρόπο είναι η μετροταινία.

##### **3.2.1 Μετροταινίες και σύρματα invar – είδη και παρελκόμενα**

###### **3.2.1α Πλαστικές και λινές μετροταινίες**

Οι μετροταινίες αυτής της κατηγορίας χρησιμοποιούνται για τρέχουσες τοπογραφικές εργασίες και γενικότερα για μετρήσεις χωρίς ιδιαίτερες απαιτήσεις ακρίβειας. Παλαιότερα κατασκευάζονταν από λινό υψηλής ποιότητας που σε ορισμένες περιπτώσεις ήταν κατάλληλα ενισχυμένο από μεταλλικές ίνες. Σήμερα κατασκευάζονται κυρίως από πλαστικό υλικό. Ανάλογα με τον τύπο της μετροταινίας είναι τοποθετημένες σε περίβλημα ή φέρουν χειρολαβή (εικ. 3.1). Τα μήκη στα οποία διατίθενται συνήθως είναι 20m, 30m και 50m και φέρουν υποδιαίρεσεις ανά 1cm ή 0.5cm. Δεδομένης της χαμηλής τους ακρίβειας, οι μετρήσεις που λαμβάνονται με πλαστικές μετροταινίες γίνονται χωρίς την επιβολή διορθώσεων λόγω διαστολής και ελαστικότητας της μετροταινίας. Η ακρίβεια που επιτυγχάνεται με λινές / πλαστικές μετροταινίες κυμαίνεται από 1:1000 έως 1:3000.



**Εικόνα 3.1** Πλαστικές μετροταινίες

### **3.2.1β Μεταλλικές μετροταινίες**

Οι μεταλλικές μετροταινίες χρησιμοποιούνται κυρίως σε εργασίες υψηλής ακρίβειας. Τυπικές εφαρμογές αποτελούν η διαστασιολόγηση αντικειμένων, η μέτρηση βάσεων μικρού μήκους σε μικροτριγωνομετρικά δίκτυα καθώς και για μετρολογικούς ελέγχους. Επίσης, χρησιμοποιούνται ευρέως σε κατασκευαστικά έργα απαιτήσεων υψηλής ακρίβειας, όπως έργα σηράγγων, σιδηροδρομικά έργα, κ.α. Οι μεταλλικές μετροταινίες μπορεί να χρησιμοποιηθούν ελεύθερα, καθώς και αναρτημένες σε κατάλληλους υποδοχείς (τρίποδες, πασσάλους, κ.α.) σε απόσταση από το έδαφος / αντικείμενο (εικ. 3.2). Οι μεταλλικές μετροταινίες βαθμονομούνται σε συγκεκριμένες συνθήκες θερμοκρασίας περιβάλλοντος και εφαρμοζόμενης τάσης στα άκρα τους ελεύθερες ή υπό τάση (συνήθως 20C° και 50N ή 80N).



**Εικόνα 3.2** Μεταλλικές μετροταινίες

Ανάλογα με την εφαρμογή διατίθενται δύο βασικοί τύποι μεταλλικών μετροταινιών των οποίων η διατομή έχει διαστάσεις της τάξης των 8mm × 0.45mm και 6mm × 0.30mm. Το μικρό μέγεθος διατομής αποσκοπεί σε μειωμένο βάρος έτσι ώστε για μεγάλα μήκη το βέλος κάμψης της μετροταινίας να περιορίζεται στο ελάχιστο δυνατό. Κατασκευάζονται από ατσάλι και διατίθενται συνήθως σε μήκη των 20m, 30m, 50m και σε ορισμένες περιπτώσεις 100m. Φέρουν υποδιαιρέσεις ανά 1mm, ενώ ταινίες μικρού μήκους μπορεί να έχουν υποδιαιρέσεις ανά 0.5mm. Η ακρίβεια που επιτυγχάνεται εξαρτάται από την τεχνική μέτρησης, τις επιβαλλόμενες διορθώσεις και αναγωγές καθώς και από το μέγεθος της μετρούμενης απόστασης. Σε μικρές βάσεις όταν εφαρμόζονται όλες οι διορθώσεις μπορεί να φτάσει έως 1:50000.

#### **3.2.1γ Ταινίες και σύρματα invar**

Για την μέτρηση μηκών με υψηλές απαιτήσεις ακριβείας είναι δυνατή η χρήση μεταλλικών ταινιών ή συρμάτων από κράμα σιδήρου (65%) και νικελίου (35%)

γνωστές ως ταινίες / σύρματα invar. Βασικό πλεονέκτημα αυτής της κατηγορίας ταινιών είναι ο μικρός συντελεστής θερμικής διαστολής ( $3.6 \times 10^{-7}$  έως  $5.5 \times 10^{-7} / ^\circ\text{C}$ ) με αποτέλεσμα οι μεταβολές στη θερμοκρασία του περιβάλλοντος να επηρεάζουν ελάχιστα την εκτίμηση του μήκους (περίπου 10 φορές λιγότερο συγκριτικά με τις μεταλλικές μετροταινίες). Η ακρίβεια των διατάξεων invar μπορεί να φτάσει 1:500000 ή καλύτερη. Ωστόσο, βασικό μειονέκτημα των διατάξεων αυτών είναι το υψηλό κόστος. Επίσης, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή κατά τη χρήση τους δεδομένου ότι το υλικό κατασκευής τους είναι ευάλωτο σε χτυπήματα. Παλαιότερα, τα συστήματα invar χρησιμοποιούνταν σε μετρήσεις μικρών βάσεων και για μετρολογικούς σκοπούς – όπως, ίδρυση πεδίων ελέγχου ηλεκτρομαγνητικών οργάνων. Σήμερα, η χρήση τους έχει πρακτικά αντικατασταθεί από ηλεκτρομαγνητικά όργανα μέτρησης αποστάσεων.

### **3.2.1δ Παρελκόμενα όργανα**

Ανάλογα με την επιδιωκόμενη ακρίβεια και τις συνθήκες στο πεδίο των μετρήσεων, η διαδικασία μέτρησης ενός μήκους με μετροταινία προϋποθέτει τη χρήση βασικών βοηθητικών οργάνων. Η υλοποίηση των άκρων μιας απόστασης με ακρίβεια προκύπτει με τη βοήθεια *τοπογραφικών ακοντίων* ή *βελονών* κυρίως όταν η μετροταινία τοποθετείται σε απόσταση από το έδαφος. Τα ίδια όργανα χρησιμεύουν για την *πύκνωση της ευθυγραμμίας* στην περίπτωση μέτρησης αποστάσεων μεγάλου μήκους. Η μέτρηση οριζόντιων μηκών σε κεκλιμένο έδαφος απαιτεί την χρήση *αεροστάθμης* μέσω της οποίας εξασφαλίζεται η οριζοντίωση της μετροταινίας. Επίσης, αεροστάθμες χρησιμοποιούνται για την κατακόρυφωση τοπογραφικών ακοντίων στα άκρα ενός μήκους – όπως επίσης, για τον ίδιο σκοπό μπορεί να χρησιμοποιηθεί η *τοπογραφική λιναίη*. Τέλος, όταν πρωτογενώς μετρούνται κεκλιμένες αποστάσεις είναι δυνατή η αναγωγή τους στις αντίστοιχες οριζόντιες αν μετρηθεί η κατακόρυφη γωνία που ορίζεται από το κεκλιμένο μήκος με τη βοήθεια *κλισιμέτρου*. Ωστόσο, δεδομένου ότι η μέτρηση γωνιών με κλισιμέτρα είναι περιορισμένης ακρίβειας ( $\sim 10'$ ), τα ανηγμένα οριζόντια μήκη επηρεάζονται αντίστοιχα.

Η μέτρηση μηκών με μεγάλη ακρίβεια προϋποθέτει τη χρήση επιπλέον οργάνων όπως *δυναμόμετρα* και *θερμόμετρα*. Η χρήση δυναμόμετρου στο ένα άκρο της μεταλλικής μετροταινίας εξασφαλίζει την εφαρμογή κατάλληλης τάσης έτσι ώστε είναι δυνατή η αναγωγή του μετρημένου μήκους λόγω διαστολής και βέλους κάμψης της μετροταινίας. Αντίστοιχα, η μέτρηση της θερμοκρασίας επιτρέπει την επιβολή της κατάλληλης διόρθωσης λόγω διαφοράς από την θερμοκρασία βαθμονόμησης της μετροταινίας.

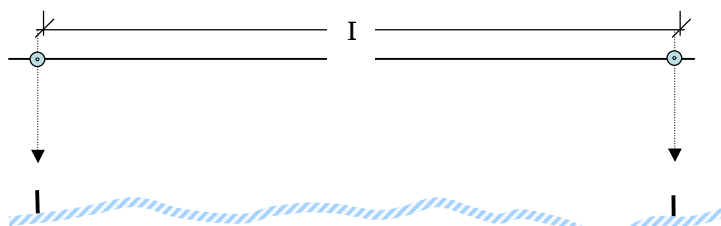
### **3.2.2 Τεχνικές μέτρησης μήκους**

Η τεχνική μέτρησης ενός μήκους ποικίλει κυρίως με τον τρόπο χρήσης, την μορφολογία του εδάφους, και την απόσταση. Για συνήθεις μετρήσεις μηκών απαιτούνται δύο παρατηρητές που χειρίζονται την μετροταινία στα δύο άκρα του μετρούμενου μήκους.

#### **3.2.2α Ανάλογα με τον τρόπο στήριξης της μετροταινίας**

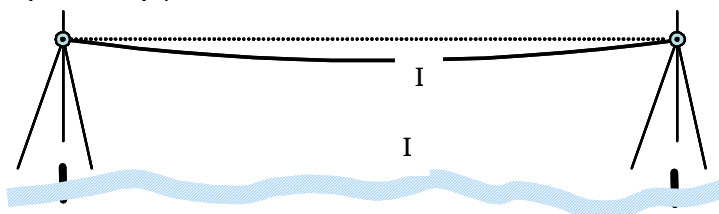
Για μετρήσεις συνήθους ακριβείας η μετροταινία τοποθετείται σε μικρή απόσταση από το έδαφος με απλή κράτηση σε οριζόντια θέση από τους δύο παρατηρητές (σχ. 3.1). Η εκτίμηση του μήκους προκύπτει από την διαφορά των αναγνώσεων

στα δύο άκρα του μήκους. Εναλλακτικά, τοποθετείται το μηδενικό σημείο της μετροταινίας στο ένα άκρο της απόστασης, οπότε το ζητούμενο μήκος προκύπτει από την ανάγνωση της μετροταινίας στο άλλο άκρο. Σε αυτή την περίπτωση ο πρώτος παρατηρητής τοποθετεί και κρατάει σταθερά το μηδενικό σημείο πάνω από το σημείο αρχής της απόστασης ενώ ο δεύτερος τεντώνει και λαμβάνει τη ένδειξη στην μετροταινία πάνω από το σημείο τέλους του μετρούμενου μήκους. Για την επίτευξη μεγαλύτερης ακρίβειας τα σημεία αρχής και τέλους του μήκους επισημαίνονται με ακόντια / τοπογραφικές βελόνες ή με τη βοήθεια λιναίης. Επίσης, ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται ώστε η θέση της μετροταινίας να είναι οριζόντια.



Σχήμα 3.1 Οριζόντια μέτρηση μήκους

Σε περιπτώσεις μέτρησης μηκών μεγάλης ακρίβειας χρησιμοποιείται μεταλλική μετροταινία η οποία αναρτάται κατάλληλα πάνω από την μετρούμενη απόσταση με τη βοήθεια ειδικών τριπόδων οι οποίοι φέρουν κατάλληλη κεφαλή στήριξης της μετροταινίας όπως φαίνεται στο σχήμα 3.2. Με αυτό τον τρόπο όταν η μετροταινία ισορροπήσει καμπυλώνεται και λαμβάνει σχήμα αλυσσοειδούς καμπύλης – οπότε, είναι δυνατός ο υπολογισμός της διόρθωσης λόγω βέλους κάμψης. Παράλληλα, σε αυτές τις περιπτώσεις θα πρέπει να μετράται η ασκούμενη τάση και η θερμοκρασία της μετροταινίας. Επισημαίνεται ότι, στις μέρες μας, η μέτρηση μηκών με ανάρτηση της μετροταινίας έχει αντικατασταθεί με μετρήσεις ηλεκτρομαγνητικών οργάνων.

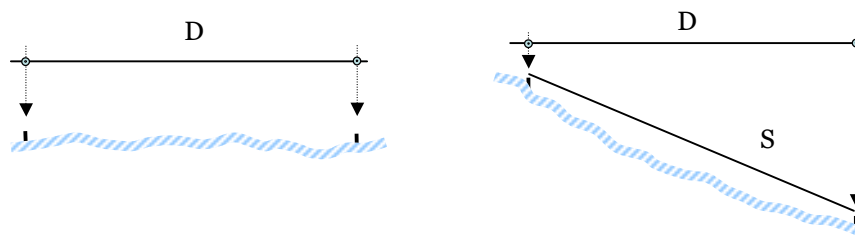


Σχήμα 3.2 Μέτρηση μήκους με χρήση τριπόδων

### 3.2.2β Ανάλογα με τη μορφολογία του εδάφους

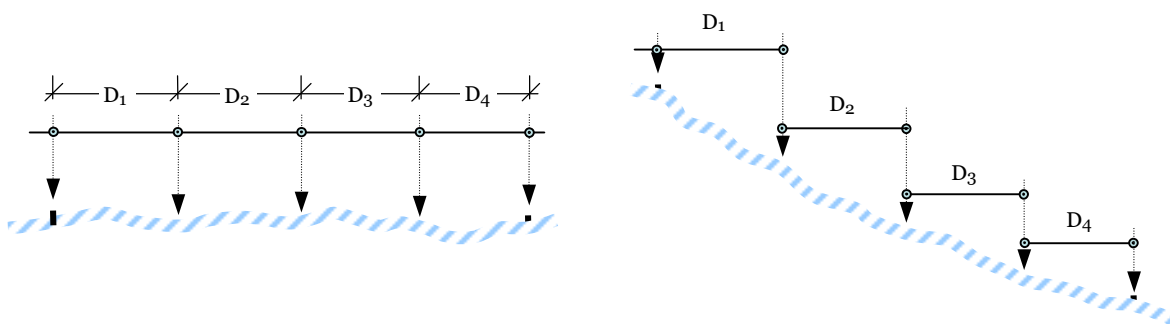
Διακρίνονται δύο βασικές περιπτώσεις - μετρήσεις σε οριζόντιο έδαφος (D) και μετρήσεις σε κεκλιμένο έδαφος (L). Η μέτρηση μήκους σε οριζόντιο έδαφος γίνεται με τον τρόπο που περιγράφηκε στην Ενότητα 3.2.α κρατώντας τη μετροταινία σε οριζόντια θέση κατά το δυνατόν κοντά στο έδαφος. Στην περίπτωση κεκλιμένου εδάφους είναι δυνατόν να μετρηθεί απευθείας η οριζόντια απόσταση ή εάν το έδαφος είναι ομαλό η κεκλιμένη απόσταση που στη συνέχεια ανάγεται σε οριζόντια (σχ. 3.3). Όταν μετράται η οριζόντια απόσταση ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται ώστε η μετροταινία να είναι σε οριζόντια θέση κατά τη λήψη της μέτρησης και οι ενδείξεις να λαμβάνονται πάνω από τα άκρα του ζητούμενου μήκους. Για το σκοπό αυτό απαιτείται η χρήση αεροστάθμης και λιναίης. Όταν μετράται η κεκλιμένη απόσταση είναι απαραίτητη η μέτρηση

της κατακόρυφης γωνίας ή της κλίσης που ορίζεται από τα άκρα της απόστασης. Αυτή η τεχνική γενικά παρέχει μετρήσεις μειωμένης ακρίβειας.



**Σχήμα 3.3** Οριζόντια και κεκλιμένη μέτρηση μήκους

Σε αρκετές περιπτώσεις το μήκος της μετροταινίας δεν επαρκεί ώστε να μετρηθεί δια μιας η ζητούμενη απόσταση. Σε αυτή την περίπτωση η μέτρηση της απόστασης γίνεται σε βήματα (κλιμακωτά) με τοποθέτηση της μετροταινίας σε διαδοχικά τμήματα της απόστασης έως ότου καλυφθεί το ζητούμενο μήκος στο σύνολό του. Ανάλογα με τη μορφολογία του εδάφους η μετροταινία τοποθετείται με έναν από τους τρόπους που φαίνονται στο σχήμα 3.4. Το ζητούμενο μήκος προκύπτει ως άθροισμα των μηκών των επιμέρους τμημάτων (π.χ.  $D = D_1 + D_2 + D_3 + D_4$ ).



**Σχήμα 3.4** Τμηματική μέτρηση μήκους

Σε κάθε περίπτωση, η διαδικασία μέτρησης μιας απόστασης γίνεται τουλάχιστον σε δύο επαναλήψεις για έλεγχο χονδροειδών σφαλμάτων. Η τελική τιμή του μετρούμενου μήκους προκύπτει ως ο μέσος όρος των επιμέρους μετρήσεων.

### 3.2.3 Σφάλματα μετρήσεων

Όπως κάθε μέτρηση στη γεωδαισία οι μετρήσεις μηκών με μετροταινία υπόκεινται σε σφάλματα. Τα χονδροειδή σφάλματα εν γένει είναι δυνατόν να περιοριστούν με προσεκτική μέτρηση σε αντίθεση με σφάλματα τυχαίου χαρακτήρα τα οποία είναι αδύνατο να εξαλειφθούν – ωστόσο, είναι μικρά σε μέγεθος και ακολουθούν τους νόμους της στατιστικής. Η μέτρηση μηκών με μετροταινία επηρεάζεται κυρίως από συστηματικά σφάλματα τα οποία (ανάλογα με την επιδιωκόμενη ακρίβεια) θα πρέπει να αντιμετωπίζονται με ιδιαίτερη προσοχή. Βασικές αιτίες που ευθύνονται για τη δημιουργία συστηματικών σφαλμάτων σχετίζονται με ατέλειες στα χρησιμοποιούμενα όργανα, τις ατμοσφαιρικές συνθήκες και πλημμελή εφαρμογή της τεχνικής μέτρησης.

### 3.2.3α Συστηματικά σφάλματα

- *Σφάλμα στο ονομαστικό μήκος της μετροταινίας*

Κάθε μετροταινία μετά από κάποια περίοδο χρήσης εμφανίζει μια διαφορά στο μήκος της σε σχέση με το ονομαστικό (πρότυπο) μήκος που προδιαγράφεται από τον κατασκευαστή. Αυτή η διαφορά μήκους σχετίζεται κυρίως με το υλικό, την ηλικία και τον τρόπο χρήσης της μετροταινίας. Είναι φανερό ότι το σφάλμα αυτής της κατηγορίας έχει επίδραση συστηματικού χαρακτήρα στις μετρήσεις.

- *Σφάλμα λόγω συστολής / διαστολής μετροταινίας*

Η επίδραση της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος επηρεάζει άμεσα το μήκος, ιδιαίτερα στις μεταλλικές μετροταινίες. Η μεταβολή του μήκους μιας μετροταινίας λόγω μεταβολών της θερμοκρασίας εξαρτάται από το συντελεστή διαστολής του υλικού και το μήκος της μετροταινίας, καθώς και την διαφορά μεταξύ της θερμοκρασίας κατά τη μέτρηση με τη θερμοκρασία ελέγχου. Ενδεικτικά αναφέρεται ότι μεταλλική μετροταινία μήκους 50m μπορεί να εμφανίζει διαφορά 0.012m για μεταβολή 20°C σε σχέση με τη θερμοκρασία ελέγχου.

- *Σφάλμα λόγω ελαστικότητας μετροταινίας*

Εάν η εφαρμοζόμενη τάση στα άκρα της μετροταινίας κατά τη μέτρηση ενός μήκους διαφέρει από την τάση ελέγχου, τότε το μήκος της μετροταινίας θα μεταβληθεί ανάλογα. Συγκεκριμένα, θα εμφανίζει μικρότερο / μεγαλύτερο μήκος για μικρότερη / μεγαλύτερη τάση εφαρμογής σε σχέση με την ονομαστική. Μετροταινίες μικρότερης διατομής εμφανίζουν μεγαλύτερο σφάλμα για την ίδια εφαρμοζόμενη τάση.

- *Σφάλμα λόγω κάμψης μετροταινίας*

Όταν η μέτρηση ενός μήκους γίνεται με ανάρτηση της μετροταινίας από σταθερά σημεία (βλ. Ενότητα 3.2.2), τότε αντί του πραγματικού οριζόντιου μήκους (χορδή) μετράται το μήκος της καμπύλης (τόξο) που ορίζεται από τη μετροταινία λόγω ιδίου βάρους. Το σφάλμα που εισάγεται σε αυτή την περίπτωση είναι συστηματικού χαρακτήρα και η επιβαλλόμενη διόρθωση είναι πάντα αφαιρετική.

### 3.2.3β Τυχαία σφάλματα

- *Σφάλμα προσδιορισμού της αφετηρίας / τέλους του μήκους*

Στην περίπτωση όπου η μέτρηση ενός μήκους γίνεται κλιμακωτά με εφαρμογή της μετροταινίας σε διαδοχικά τμήματα είναι σημαντικό να εξασφαλίζεται ότι η αρχή κάθε τμήματος ταυτίζεται με το τέλος του προηγούμενου ώστε να μην δημιουργούνται κενά ή επικαλύψεις μεταξύ επιμέρους τμημάτων. Για το σκοπό αυτό είναι απαραίτητο τα άκρα κάθε τμήματος να επισημαίνονται κατάλληλα με τη χρήση ακοντίων ή τοπογραφικών βελονών. Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δίνεται σε κεκλιμένα εδάφη όπου η σύνδεση επιμέρους τμημάτων επιβάλλει η χρήση λιναίης. Διευκρινίζεται ότι, στην περίπτωση που σε κάθε μέτρηση τοποθετείται εσφαλμένα το μηδενικό σημείο της μετροταινίας τότε, το σφάλμα στο μετρημένο μήκος έχει συστηματικό χαρακτήρα.

- *Σφάλμα απόκλισης από την ευθυγραμμία*

Όταν η μέτρηση ενός μήκους γίνεται σε τμήματα είναι σημαντικό η πύκνωση της ευθυγραμμίας να γίνεται προσεκτικά ώστε τα ενδιάμεσα σημεία να κείνται στην ευθυγραμμία που ορίζει το μήκος μέτρησης. Είναι προφανές ότι τυχόν αποκλίσεις

των ενδιάμεσων σημείων από την ευθυγραμμία επιβαρύνουν προσθετικά το τελικά μετρούμενο μήκος.

- *Σφάλμα απόκλισης από το οριζόντιο επίπεδο*

Σφάλματα αυτής της κατηγορίας προκύπτουν από εσφαλμένη οριζοντίωση της μετροταινίας. Αν και μικρά σε μέγεθος είναι δυνατόν να περιορισθούν σημαντικά εάν η οριζοντίωση της μετροταινίας γίνεται με τη βοήθεια αεροστάθμης.

### **3.2.3γ Χονδροειδή σφάλματα**

Χονδροειδή σφάλματα κατά την μέτρηση ενός μήκους με μετροταινία προκύπτουν συνήθως λόγω απροσεξίας / κόπωσης των παρατηρητών. Ο σωστός προγραμματισμός και η τυποποίηση της διαδικασίας των μετρήσεων είναι δυνατό να περιορίσει σημαντικά τα χονδροειδή λάθη. Τα πιο συνηθισμένα λάθη αυτής της κατηγορίας είναι:

- *Μέτρηση μήκους μεταξύ εσφαλμένων σημείων*

Αυτό είναι ιδιαίτερα πιθανό σε χώρος κατασκευής τεχνικών έργων (εργοτάξια) όπου απαντάται πληθώρα σημασμένων σημείων σε μικρή έκταση.

- *Εσφαλμένη ανάγνωση της μετροταινίας*

Παρόμοια λάθη είναι δυνατόν να προκύψουν από αναγραμματισμό ψηφίων (π.χ. 34 αντί 43) καθώς και από εσφαλμένη ανάγνωση των ακέραιων μονάδων (μέτρα ή δεκάδες μέτρων) της μέτρησης.

- *Εσφαλμένη καταγραφή της μέτρησης*
- *Εσφαλμένη χρήση της μετροταινίας ως προς το μηδενικό της σημείο*

Η αφετηρία (μηδενικό σημείο) σε κάποιες μετροταινίες ορίζεται στην αρχή ή το τέλος του κρίκου κράτησης, σε άλλες βρίσκεται στο πλαστικό ή μεταλλικό μέρος της μετροταινίας. Εσφαλμένη τοποθέτηση του μηδενικού σημείου της μετροταινίας στο ακραίο σημείο του μήκους μέτρησης θα προκαλέσει χονδροειδές στο εκτιμώμενο μήκος. Προφανώς, η εσφαλμένη τοποθέτηση της μετροταινίας σε διαδοχικά μήκη θα επιφέρει συστηματική επίδραση στο υπολογισμό του συνολικού μήκους.

### **3.2.4 Διορθώσεις – αναγωγές μετρήσεων**

#### **3.2.4α Διορθώσεις μετρημένων μηκών**

Όπως ήδη αναφέρθηκε κατά τη μέτρηση ενός μήκους με μετροταινία προκύπτουν συστηματικά σφάλματα τα οποία θα πρέπει να υπολογίζονται ώστε να διορθώνονται κατάλληλα οι μετρήσεις. Η εκτίμηση του μεγέθους σφαλμάτων για κάθε τύπο σφαλμάτων αυτής της κατηγορίας παρουσιάζεται στη συνέχεια. Επισημαίνεται ότι όλες οι διορθώσεις υπολογίζονται και επιβάλλονται αλγεβρικά.

- *Διόρθωση για διαφορά από το ονομαστικό μήκος*

Για μια μετροταινία με ονομαστικό (πρότυπο) και πραγματικό μήκος  $L_0$  και  $L_{\Pi}$  αντίστοιχα όπως έχει προκύψει από σύγκριση με το πρότυπο μέτρο ή μετροταινία, η διόρθωση για μήκος  $L$  λόγω διαφοράς από το πρότυπο μήκος δίνεται είναι:

$$\delta_{\Pi} = \frac{L_{\Pi} - L_0}{L_0} \cdot L \quad (3.1)$$



- Διόρθωση λόγω διαφοράς από την θερμοκρασία ελέγχου

Σύμφωνα με τον κατασκευαστή οι μεταλλικές μετροταινίες παρέχουν την ορθή τιμή μήκους για θερμοκρασία ελέγχου ( $\Theta_{\text{ΕΛΕΓΧΟΥ}}$ ) συνήθως 20°C. Η διόρθωση που θα πρέπει να επιβάλλεται σε μετρημένο μήκος ( $\Theta_{\text{ΠΕΔΙΟΥ}}$ ) για διαφορά από την θερμοκρασία ελέγχου ίση προς  $\delta_{\Theta}$  είναι:

$$\delta_{\Theta} = K \cdot L \cdot (\Theta_{\text{ΠΕΔΙΟΥ}} - \Theta_{\text{ΕΛΕΓΧΟΥ}}) \quad (3.2)$$

όπου K: ο συντελεστής γραμμικής διαστολής του υλικού της μετροταινίας (για το ατσάλι  $K = 11.2 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ), και L το μήκος που μετρήθηκε.

- Διόρθωση λόγω διαφοράς από την τάση ελέγχου

Εάν κατά τη μέτρηση ενός μήκους εφαρμόσθηκε διαφορετική τάση ( $T_{\text{ΠΕΔΙΟΥ}}$ ) από τη προβλεπόμενη τάση ελέγχου ( $T_{\text{ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ}}$ ) στα άκρα μιας μετροταινίας, τότε η διόρθωση που θα πρέπει να επιβληθεί για διαφορά από την τάση ελέγχου δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_T = L \cdot \frac{T_{\text{ΠΕΔΙΟΥ}} - T_{\text{ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ}}}{A \cdot E} \quad (3.3)$$

όπου,  $\delta_T$  : η διαφορά μεταξύ εφαρμοζόμενης και ονομαστικής τάσης [N]  
 A : το εμβαδόν της διατομής της μετροταινίας [ $\text{mm}^2$ ]  
 E : το μέτρο ελαστικότητας του υλικού [ $\text{N/mm}^2$ ], (για το ατσάλι  $E = 20 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ )  
 L : το μήκος που μετρήθηκε [m]

- Διόρθωση λόγω βέλους κάμψης

Όταν ένα μήκος μετράται με τη μετροταινία αναρτημένη σε υποδοχείς (τρίποδες) θα πρέπει να επιβάλλεται διόρθωση λόγω καμπύλωσης της μετροταινίας λόγω ίδιου βάρους. Όταν η μετροταινία έχει ελεγχθεί στο οριζόντιο επίπεδο η διόρθωση αυτή είναι πάντα αφαιρετική και παρέχεται από τη σχέση:

$$\delta_B = - \frac{w^2 \cdot L^3}{24T^2} \cdot \cos(\theta) = \frac{W^2 \cdot L}{24T^2} \cdot \cos(\theta) \quad (3.4)$$

όπου, w : το βάρος της μετροταινίας ανά μονάδα μήκους [ $\text{N/m}$ ]  
 W : το συνολικό βάρος της μετροταινίας [N]  
 T : η εφαρμοζόμενη τάση [N]  
 L : το ανηρτημένο μήκος της μετροταινίας [m]  
 $\theta$  : η γωνία ύψους μεταξύ των δύο άκρων της μετροταινίας

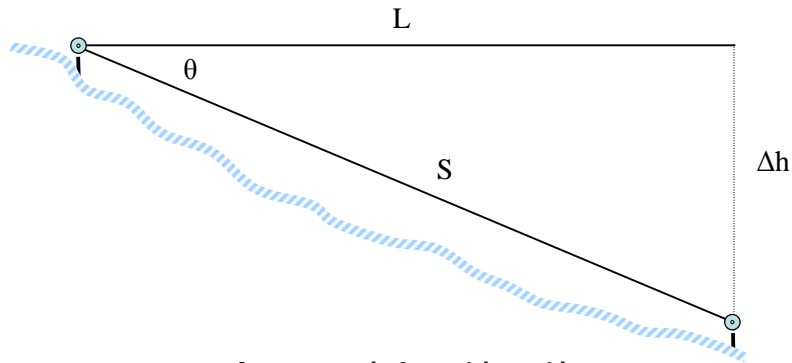
- Διόρθωση λόγω κλίσης

Αν το μήκος που μετρήθηκε είναι κεκλιμένο θα πρέπει να γίνει μια επιπλέον διόρθωση λόγω κλίσης. Σε αυτή την περίπτωση όταν είναι γνωστή η υψομετρική διαφορά  $\Delta H$  μεταξύ των άκρων του μετρημένου μήκους η αναγωγή από το κεκλιμένο μήκος S στο οριζόντιο μήκος D γίνεται με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος (σχ. 3.5) με αφαίρεση της ποσότητας που δίνεται από τη σχέση:

$$\delta_{\kappa} = -\left(S - \sqrt{S^2 - \Delta H^2}\right) = -S \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta H^2}{S^2}}\right) \quad (3.5)$$

Όταν αντί της υψομετρικής διαφοράς μετράται η γωνία ύψους  $\theta$  ή είναι μετρημένη η κλίση της κεκλιμένης απόστασης, τότε η αντίστοιχη διόρθωση υπολογίζεται ως εξής:

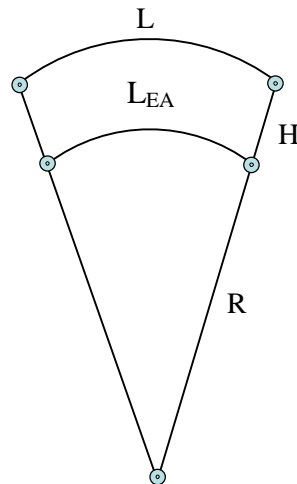
$$\delta_{\kappa} = -S \cdot (1 - \cos(\theta)) \quad (3.6)$$



Σχήμα 3.5 Διόρθωση λόγω κλίσης

### 3.2.4β Αναγωγές μετρημένων μηκών

Εκτός από τις διορθώσεις που επιβάλλονται στα μετρημένα μήκη λόγω συστηματικών σφαλμάτων, ανάλογα με την περίπτωση είναι επιβεβλημένο να εφαρμόζονται γεωμετρικές αναγωγές στα μετρημένα μήκη που σχετίζονται με την επιφάνεια αναφοράς των υπολογισμένων μηκών.



Σχήμα 3.6 Αναγωγή στη μέση στάθμη της θάλασσας

- Αναγωγή στην μέση στάθμη της θάλασσας (ΜΣΘ)

Αυτή η αναγωγή εφαρμόζεται προκειμένου ένα μήκος το οποίο έχει μετρηθεί σε υψόμετρο  $H$  να αναχθεί στο μήκος που αντιστοιχεί στην επιφάνεια αναφοράς (πρακτικά μέση στάθμη της θάλασσας). Η αναγωγή αυτή αποβλέπει στον υπολογισμό μηκών τα οποία αναφέρονται σε κοινή υψομετρική αφετηρία (μέση στάθμη θάλασσα) – ωστόσο, στην περίπτωση μέτρησης μηκών με μετροταινία οι τιμές που προκύπτουν είναι πολύ μικρές και κατά συνέπεια αυτή η αναγωγή εν

γένει δεν λαμβάνεται υπόψη. Από το σχήμα 3.6 προκύπτει ότι η αναγωγή που υπολογίζεται για μετρημένο μήκος  $L$  σε υψόμετρο  $H$  είναι:

$$L_{EA} = \frac{R \cdot L}{R + H} \quad (3.7)$$

όπου  $R$  η ακτίνα της γης.

- *Αναγωγή λόγω χαρτογραφικής απεικόνισης*

Η αναγωγή λόγω χαρτογραφικής απεικόνισης αποσκοπεί στον προσδιορισμό του μετρημένου / υπολογισμένου οριζώντιου μήκους στο προβολικό επίπεδο. Θεωρητικά ως ενδιάμεσο βήμα προηγείται η αναγωγή του μετρημένου μήκους στην επιφάνεια αναφοράς (ΜΣΘ). Ωστόσο, όπως επισημάνθηκε παραπάνω αυτό το βήμα συνήθως παραλείπεται, δεδομένου του μικρού μεγέθους των μηκών που μετρούνται με μετροταινία. Η αναγωγή ενός μήκους  $L$  λόγω χαρτογραφικής προβολής υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L_{PP} = L_{EA} \cdot m \quad (3.8)$$

όπου  $m$  ο συντελεστής χαρτογραφικής παραμόρφωσης στην περιοχή των μετρήσεων. Επισημαίνεται ότι η βαρύτητα αυτής της αναγωγής εξαρτάται από τις ιδιότητες του εκάστοτε χρησιμοποιούμενου προβολικού συστήματος. Έτσι, για την προβολή HATT είναι πρακτικά αμελητέα ( $\sim L/10000$ ), ενώ για την προβολή του ΕΓΣΑ'87 ιδιαίτερα στα δυτικά και ανατολικά άκρα της χώρας μπορεί να παίρνει αρκετά υψηλές τιμές ( $\sim L/2500$ ).

### 3.2.5 Ακρίβεια μέτρησης μήκους

Από τα προηγούμενα είναι φανερό ότι η ακρίβεια μέτρησης ενός μήκους με μετροταινία εξαρτάται από το σύνολο των συστηματικών, των τυχαίων και των χονδροειδών σφαλμάτων που επιδρούν στη διαδικασία της μέτρησης. Επίσης, είναι γνωστό ότι τα συστηματικά και τυχαία σφάλματα μεταδίδονται ευθέως και ανάλογα με την τετραγωνική ρίζα της μετρούμενης απόστασης αντίστοιχα, ενώ τα χονδροειδή είναι ανεξάρτητα του μεγέθους της απόστασης. Κατά συνέπεια προκειμένου να δοθεί μια ακριβής εκτίμηση της αναμενόμενης ποιότητας μέτρησης θα πρέπει να καθοριστούν το είδος της μετροταινίας και οι συνθήκες μέτρησης.

- *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ*

Μία απόσταση μετρήθηκε τμηματικά σε πέντε μέρη, με μεταλλική μετροταινία ονομαστικού μήκους 50m και σε συνθήκες όπως δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Από τη βαθμονόμηση της μετροταινίας με πρότυπη μετροταινία μήκους 50m προέκυψε διαφορά 0.024m σε συνθήκες μέτρησης 20°C και τάση 50N.

Ζητείται να υπολογιστούν οι διορθώσεις λόγω διαφοράς από: (α) το ονομαστικό μήκος, (β) τη θερμοκρασία ελέγχου, (γ) την τάση ελέγχου, καθώς και (δ) λόγω βέλους κάμψης της μετροταινίας και (ε) λόγω κλίσης. Τέλος, ζητείται να υπολογιστεί η συνολική διόρθωση για την μετρημένη απόσταση.

Δίνονται:

1. Το εμβαδόν της διατομής της μετροταινίας  $E = 4 \text{ mm}^2$
2. Ο συντελεστής γραμμικής διαστολής  $K = 11 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

3. Το μέτρο ελαστικότητας του υλικού  $E = 210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$
4. Το βάρος της μετροταινίας ανά μονάδα μήκους  $w = 0.06 \text{ Kg/m}$

τιμήμα (α/α)	μετρημένο μήκος (m)	Θερμοκρασία (°C)	εφαρμοζόμενη τάση (N)	υψομετρική διαφορά (m)
1	28.050	21.4	50	0.750
2	28.097	21.4	50	1.430
3	28.064	24.0	50	0.435
4	28.048	24.0	50	0.400
5	28.041	24.0	70	0.000

### Λύση

(α) Διόρθωση για διαφορά από το ονομαστικό μήκος

$$\delta_{\Pi} = \frac{L_{\Pi} - L_0}{L_0} \cdot L \Rightarrow \delta_{\Pi} = \frac{50.024 - 50}{50} \cdot (28.050 + 28.097 + 28.064 + 28.048 + 28.041) \Rightarrow$$

$$\delta_{\Pi} = \frac{50.024 - 50}{50} \cdot 140.3 = 0.0673 \text{ m}$$

(β) Διόρθωση λόγω διαφοράς από την θερμοκρασία ελέγχου

$$\delta_{\Theta} = K \cdot L \cdot (\Theta_{\text{ΠΕΔΙΟΥ}} - \Theta_{\text{ΕΛΕΓΧΟΥ}}) \Rightarrow \delta_{\Theta} = 11 \times 10^{-6} \cdot (28.050 + 28.097) \cdot (21.4 - 20) +$$

$$+ 11 \times 10^{-6} \cdot (28.064 + 28.048 + 28.041) \cdot (24.0 - 20) \Rightarrow \delta_{\Theta} = 0.0009 + 0.0037 = 0.0046 \text{ m}$$

(γ) Διόρθωση λόγω διαφοράς από την τάση ελέγχου

Διόρθωση λόγω διαφοράς από την τάση ελέγχου υπολογίζεται μόνο για το τμήμα 5

$$\delta_T = L \cdot \frac{T_{\text{ΠΕΔΙΟΥ}} - T_{\text{ΒΑΘΜΟΝΟΜΗΣΗΣ}}}{A \cdot E} \Rightarrow \delta_T = 28.041 \cdot \frac{70 - 50}{4 \cdot 210 \times 10^3} \Rightarrow \delta_T = 0.0007 \text{ m}$$

(δ) Διόρθωση λόγω βέλους κάμψης

$$\delta_B = - \frac{w^2 \cdot L^3}{24 \cdot T^2} \cdot \cos\theta$$

Η γωνία  $\theta$  αναφέρεται στην γωνία ύψους μεταξύ των δύο άκρων της μετροταινίας και υπολογίζεται για κάθε μετρημένο τμήμα ως εξής:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{\text{υψομετρική\_διαφορά}}{\text{μετρημένο\_μήκος}}\right)$$

$$\delta_B = -\frac{w^2 \cdot L^3}{24 \cdot T^2} \cdot \cos\theta \Rightarrow \delta_B = -\frac{0.03^3 \cdot 28.050^3}{24 \cdot 50^2} \cdot \cos 1.7024^g -$$

$$-\frac{0.03^3 \cdot 28.097^3}{24 \cdot 50^2} \cdot \cos 3.2415^g - \frac{0.03^3 \cdot 28.064^3}{24 \cdot 50^2} \cdot \cos 0.9868^g -$$

$$-\frac{0.03^3 \cdot 28.048^3}{24 \cdot 50^2} \cdot \cos 0.9079^g - \frac{0.03^3 \cdot 28.041^3}{24 \cdot 70^2} \cdot \cos 0^g \Rightarrow$$

$$\delta_B = -0.0004\text{m}$$

(ε) Διόρθωση λόγω κλίσης

$$\delta_K = -\left(S - \sqrt{S^2 - \Delta H^2}\right) \Rightarrow \delta_K = -\left(28.050 - \sqrt{28.050^2 - 0.750^2}\right) -$$

$$\left(28.097 - \sqrt{28.097^2 - 1.430^2}\right) - \left(28.064 - \sqrt{28.064^2 - 0.435^2}\right) -$$

$$\left(28.048 - \sqrt{28.048^2 - 0.400^2}\right) - \left(28.0041 - \sqrt{28.041^2 - 0.000^2}\right) \Rightarrow$$

$$\delta_K = -0.0100 - 0.0364 - 0.0033 - 0.0028 - 0.0000 \Rightarrow \delta_K = -0.0525\text{m}$$

Τελικά, η συνολική διόρθωση για την μετρημένη απόσταση προκύπτει ως εξής

$$\delta = \delta_{\Pi} + \delta_{\Theta} + \delta_T + \delta_B + \delta_K \Rightarrow \delta = 0.0673 + 0.0046 + 0.0007 - 0.0004 - 0.0525 \Rightarrow$$

$$\delta = 0.0197\text{m}$$

### 3.3 ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ ΟΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

#### 3.3.1 Γενικά

Ο προσδιορισμός ενός μήκους χωρίς να μετρηθεί η απευθείας απόσταση που ορίζεται μεταξύ των άκρων της ονομάζεται *έμμεση* μέτρηση μήκους. Με την έμμεση μέτρηση μήκους επιτυγχάνεται η μέτρηση αποστάσεων μεταξύ σημείων όπου συνήθως δεν υπάρχει πρόσβαση ή ορατότητα (π.χ. ύπαρξη τεχνητών ή φυσικών εμποδίων, εδαφικές ανωμαλίες).

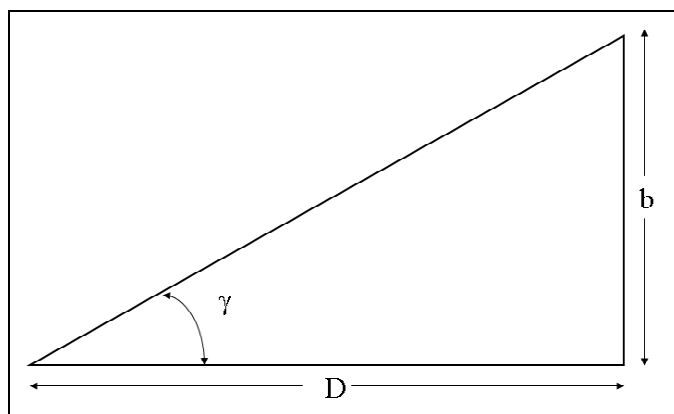
Οι διάφορες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τον έμμεσο προσδιορισμό μιας απόστασης διακρίνονται σε:

- *Οπτικές*, όταν γίνεται χρήση οπτικών οργάνων
- *Γεωμετρικές*, όταν χρησιμοποιούνται ιδιότητες της αναλυτικής γεωμετρίας ή τριγωνομετρίας.

Στις ενότητες που ακολουθούν γίνεται μια σύντομη περιγραφή των οπτικών και γεωμετρικών μεθόδων μέτρησης μήκους μιας απόστασης.

Η θεμελιώδης αρχή για την έμμεση μέτρηση μήκους με οπτική μέθοδο βασίζεται στο *παραλλακτικό τρίγωνο* (σχήμα 3.7), όπου το μήκος  $D$  υπολογίζεται γνωρίζοντας την βάση  $b$  και την παραλλακτική γωνία  $\gamma$ , από την απλή σχέση:

$$D = b \cot \gamma \quad (3.9)$$



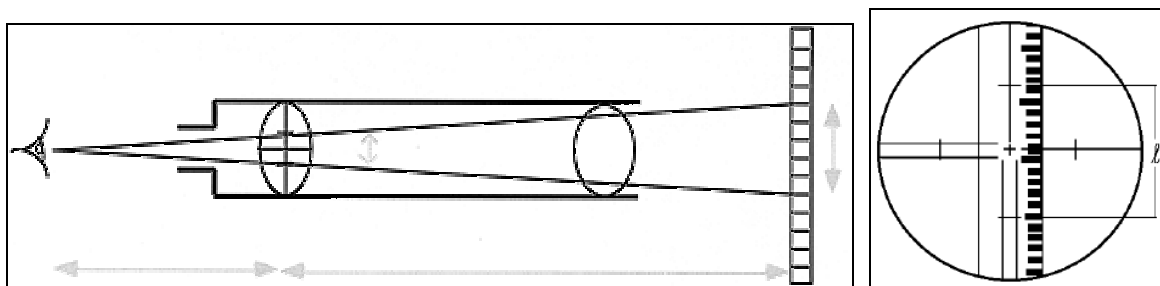
Σχήμα 3.7 Αρχή μεθόδου για την έμμεση μέτρηση μήκους

Η βασική μέθοδος μπορεί να διαφοροποιηθεί ως προς το μέγεθος που παραμένει σταθερό και μπορούν να υπάρξουν οι παρακάτω επιλογές:

- να παραμένει σταθερή η τιμή της γωνίας  $\gamma$  ή της βάσης  $b$  (συνήθως παραμένει σταθερό το  $b$ )
- να μεταβάλλεται η θέση του παρατηρητή ως προς τη γωνία  $\gamma$  ή τη βάση  $b$
- να μεταβάλλεται η θέση της βάσης  $b$  ως προς το χώρο (οριζόντια, κατακόρυφη, πλάγια θέση).

### 3.3.2 Ταχυμετρία

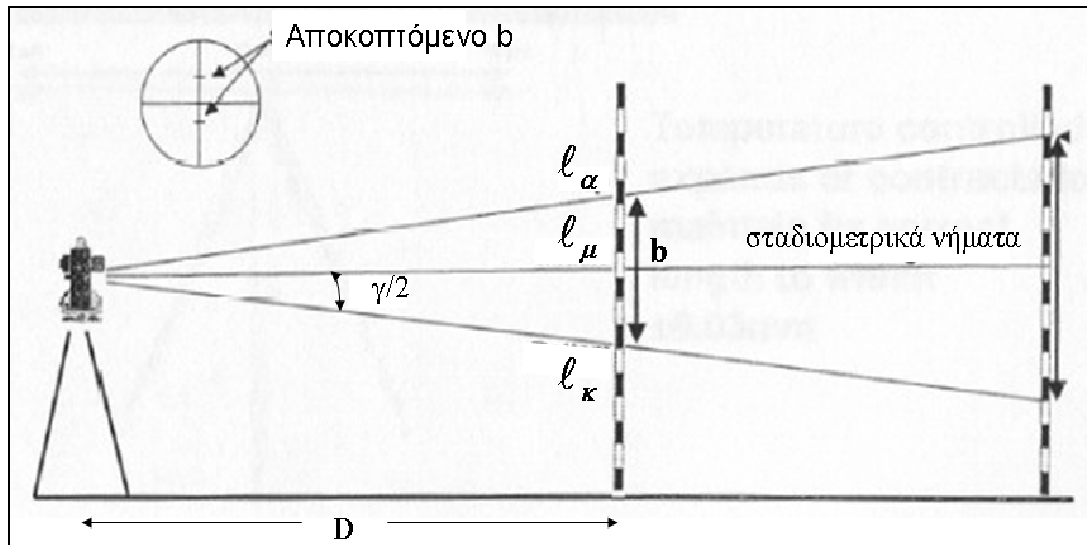
Με τον όρο ταχυμετρία χαρακτηρίζεται η μέθοδος με την οποία μετράται το μήκος έμμεσα διαβάζοντας πάνω σε κατακόρυφο διηρημένο κανόνα (σταδία) το αποκοπτόμενο τμήμα, δηλαδή το τμήμα της σταδίας που περιέχεται μεταξύ των δύο σταδιομετρικών νημάτων που υπάρχουν στο τηλεσκόπιο των οπτικών οργάνων (π.χ. θεοδολίχου, ταχυμέτρου) (σχήμα 3.8). Η μέθοδος έχει πολύ μικρή πρακτική αξία σήμερα με την ευρεία χρήση των ηλεκτρονικών οργάνων καθώς και μειωμένη ακρίβεια (της τάξης των  $\pm 15\text{cm}$ ), αλλά λόγω του γεωμετρικού ενδιαφέροντος που παρουσιάζει, περιγράφεται με συντομία.



Σχήμα 3.8 Αποκοπτόμενο τμήμα

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.9, στην ταχυμετρική μέθοδο συνήθως η παραλλακτική γωνία  $\gamma$  παραμένει σταθερή και μεταβάλλεται η βάση  $b$  (δίνεται από τη σχέση  $b = l_{\alpha} - l_{\kappa}$  ή  $b = l_{\kappa} - l_{\alpha}$ , ανάλογα με την όρθια ή

αντεστραμμένη αρίθμηση της σταδίας). Όπου  $l_\alpha$ ,  $l_\kappa$  είναι οι ενδείξεις του άνω και κάτω νήματος του σταυρονήματος.



Σχήμα 3.9 Ταχυμετρική μέτρηση αποστάσεων [11]

Το αποκοπτόμενο τμήμα  $b$ , δηλαδή το τμήμα της σταδίας που περιλαμβάνεται μεταξύ των δύο σταδιομετρικών νημάτων είναι ένα μέτρο προσδιορισμού της απόστασης  $D$ . Αποδεικνύεται ότι η οριζόντια απόσταση  $D$  δίνεται από τη σχέση:

$$D = k b \quad (3.10)$$

Όπου  $k$  είναι η σταδιομετρική σταθερά και εκλέγεται έτσι ώστε να λαμβάνει τιμή 100.

Όταν οι σκοπεύσεις δεν είναι οριζόντιες, όπως συμβαίνει στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, η οριζόντια απόσταση  $D$  δίνεται από τη σχέση:

$$D = k b \sin^2 z \quad \text{ή} \quad D = k b \cos^2 \nu \quad (3.11)$$

όπου  $z$  είναι η ζενίθια γωνία και  $\nu$  η γωνία ύψους.

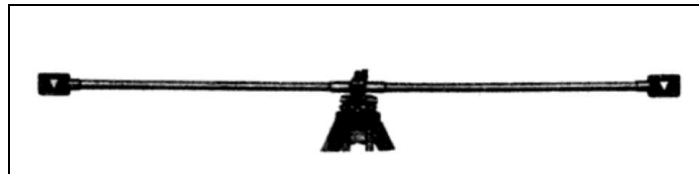
Η υψομετρική διαφορά  $\Delta H$  μεταξύ του σημείου και της στάσης δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta H = \frac{1}{2} k b \sin 2z + Y_0 - Y_\Sigma \quad (3.12)$$

όπου  $Y_0$  είναι το ύψος οργάνου και  $Y_\Sigma$  είναι το ύψος σκόπευσης.

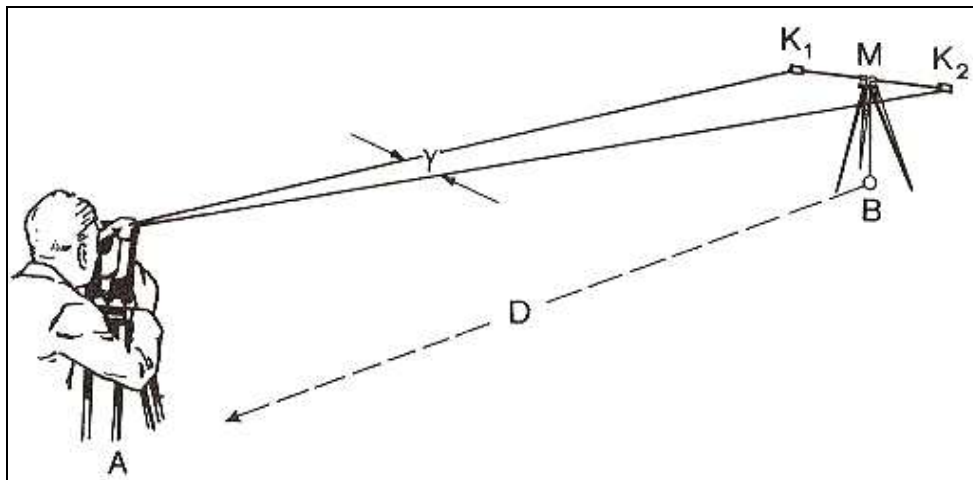
### 3.3.3 Δίμετρη βάση

Η *δίμετρη βάση* είναι ένας κανόνας κατασκευασμένος από Invar ο οποίος προφυλάσσεται μέσα σε μεταλλικό σωλήνα (εικ. 3.3). Στα δύο άκρα του βρίσκονται ειδικοί στόχοι οι οποίοι υλοποιούν το μήκος των δύο μέτρων και απαραίτητες διατάξεις για την σωστή τοποθέτηση του κανόνα σε τρίποδα. Στο μεσοδιάστημα της βάσης υπάρχει ένας ειδικός κεντρικός στόχος για σκοπεύσεις καθώς και μικρό τηλεσκόπιο που επιτρέπει τις διαδικασίες ελέγχου για τον προσανατολισμό, την ευθυγράμμιση και την καθετότητα του συστήματος.



Εικόνα 3.3 Η διμμετρική βάση

Η αρχή της μεθόδου βασίζεται στην επίλυση του ορθογωνίου τριγώνου του σχήματος 3.7 και με τη μέθοδο αυτή επιτυγχάνεται η απευθείας μέτρηση της οριζόντιας απόστασης σημείων με πολύ καλή ακρίβεια. Για την εφαρμογή της μεθόδου αυτής, η παραλλακτική γωνία  $\gamma$  μετράται με θεοδόλιχο υψηλής ακρίβειας και η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων πάνω στη διμμετρική βάση λαμβάνεται απευθείας και με μεγάλη ακρίβεια.



Σχήμα 3.10 Μέτρηση απόστασης με διμμετρική βάση [11]

Όπως φαίνεται στο σχήμα 3.10, αν στο σημείο B της απόστασης AB τοποθετηθεί οριζοντίως ένας κανόνας μήκους  $b$  και στο σημείο A τοποθετηθεί ένα θεοδόλιχο για την μέτρηση της παραλλακτικής γωνίας  $\gamma$ , τότε ισχύει:

$$D = \frac{b}{2} \cot \frac{\gamma}{2} \quad (3.13)$$

και επειδή  $b/2 = 1.0m$ , τότε

$$D = \cot \frac{\gamma}{2} \quad (3.14)$$



### 3.3.4 Ακρίβεια οπτικής μέτρησης

Η ακρίβεια του μήκους και της υψομετρικής διαφοράς που προσδιορίζονται με απλό ταχύμετρο (Ενότητα 2.4.1) επηρεάζεται από :

- το σφάλμα στην μέτρηση του αποκοπτόμενου τμήματος  $b$
- το σφάλμα στον ορισμό των σταθερών  $k$
- το σφάλμα στη μέτρηση της κατακόρυφης γωνίας  $\nu$
- το σφάλμα στην κατακορυφότητα της σταδίας.

Από τα παραπάνω σφάλματα, αυτό που επηρεάζει σημαντικότερα την ακρίβεια είναι η μέτρηση του αποκοπτόμενου τμήματος πάνω στην σταδία. Η αβεβαιότητα που αναμένεται στον προσδιορισμό του μήκους ταχυμετρικά είναι της τάξης του 0.2% για έδαφος με ομαλή κλίση και για μήκος από 20-130m.

Η ακρίβεια προσδιορισμού μιας απόστασης με τη μέθοδο της δίμετρης βάσης εξαρτάται από:

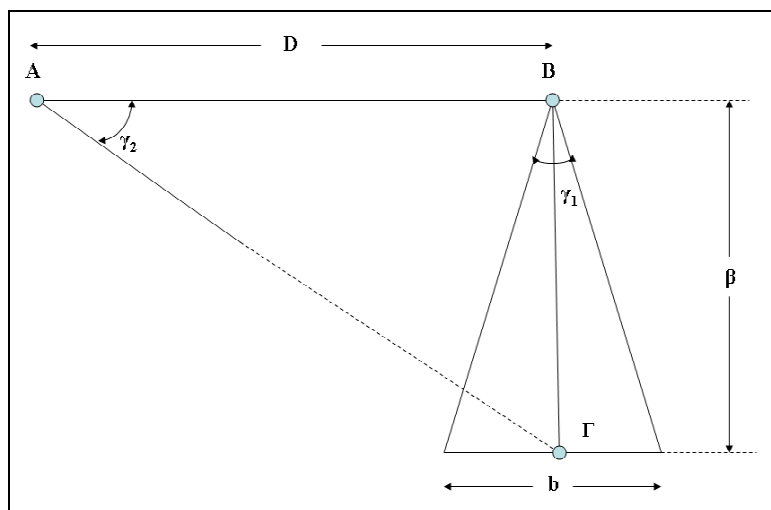
- την ακρίβεια του μήκους της βάσης  $b$
- την ακρίβεια της γωνίας  $\gamma$
- την σωστή τοποθέτηση του κανόνα πάνω σε τρίποδα.

Από τα παραπάνω σφάλματα, αυτό που επηρεάζει σημαντικότερα την ακρίβεια είναι η μέτρηση της γωνίας  $\gamma$ . Για παράδειγμα, αν η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της γωνίας είναι  $\pm 2''$ , η ακρίβεια στην μέτρηση ενός μήκους 25m είναι 1mm ενώ μειώνεται στα 65mm για μήκος 200m. Γενικά, η χρήση βάσης γνωστού μήκους για τον προσδιορισμό αποστάσεων δεν έχει πλέον ευρεία χρήση στην τοπογραφία. Ωστόσο, για μικρές αποστάσεις (της τάξης των 30m) η μέθοδος μπορεί να δώσει ακρίβεια μέχρι 2mm.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- *Μέτρηση απόστασης με δίμετρη βάση*

Για την μέτρηση της απόστασης  $AB = D$ , χαράσσεται μια βοηθητική βάση  $B\Gamma$  μήκους 22.35m η οποία είναι κάθετη στην  $AB$ . Στο σημείο  $\Gamma$  τοποθετείται δίμετρη βάση, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.11. Με θεοδόλιχο μετράται η γωνία  $\gamma_2 = 5.6762^{\text{grad}} \pm 2''$ . Ζητείται να υπολογιστεί το μήκος  $D$  καθώς και το τυπικό της σφάλμα  $\sigma_D$ .



Σχήμα 3.11 Μέτρηση απόστασης με βοηθητική βάση

Η απόσταση D δίνεται από τη σχέση:

$$D = \frac{b}{2} \cot \frac{\gamma_1}{2} \cot \gamma_2 \quad (3.15)$$

Η γωνία  $\gamma_1$  υπολογίζεται από το τρίγωνο όπου ανήκει η δίμμετρη βάση βάσει της γενικής σχέσης (3.14). Επομένως :

$$b = \cot \frac{\gamma_1}{2}$$

$$\text{και } \frac{\gamma_1}{2} = 29.5167 \text{ grad}$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.14), η απόσταση D υπολογίζεται ίση με 250m.

Το τυπικό σφάλμα  $\sigma_D$  της απόστασης προκύπτει από το νόμο μετάδοσης των σφαλμάτων και είναι συνάρτηση μόνο των D και  $\beta$  (αφού  $b = \text{σταθερό}$ ). Δίνεται από τη σχέση:

$$\sigma_D = D^2 \left( \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{D^2}{\beta^2} \right) \frac{\sigma_\gamma^2}{\rho^2} \quad (3.16)$$

όπου  $\rho = \frac{200}{\pi}$ . Επίσης θεωρούμε ότι  $\sigma_{\gamma_1} = \sigma_{\gamma_2} = \sigma_\gamma$ .

Αντικαθιστώντας στην σχέση (3.16) προκύπτει ότι  $\sigma_D = 12.2\text{mm}$ .

### (β) Ταχυμετρική μέτρηση απόστασης

Για την μέτρηση των αποστάσεων  $A_1$  και  $A_2$  χρησιμοποιήθηκε η ταχυμετρική μέθοδος με τις μετρήσεις που δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Στάση	Ταχυμετρ. σημείο	Vz (grad)	$l_\alpha$ (m)	$l_\kappa$ (m)	$l_\mu$ (m)
A	1	105.1295	1.479	0.500	0.990
A	2	132.6852	1.633	1.000	1.318

Δίνεται το ύψος οργάνου του θεοδολίχου ίσο με 1.57m και η σταθερά της σταδίας  $k=100$ . Να προσδιορισθούν οι οριζόντιες αποστάσεις  $D_{A_1}$  και  $D_{A_2}$  καθώς και οι υψομετρικές τους διαφορές.

Η οριζόντια απόσταση D δίνεται από τη σχέση 3.11. Αντικαθιστώντας, προκύπτει ότι η απόσταση είναι:

$$D_{A_1} = 100 (1.470 - 0.500) \cos^2 (5.1295) = 97.27\text{m}$$

$$D_{A_2} = 100 (1.633 - 1.000) \cos^2 (32.6852) = 48.03\text{m}$$

Η υψομετρική διαφορά δίνεται από τη σχέση 3.12:

Αντικαθιστώντας, προκύπτει ότι η υψομετρική διαφορά είναι:

$$\Delta H_{A_1} = \frac{1}{2} 100 \times 0.979 \sin 2(5.1295) + 0.990 - 1.57 = 7.27\text{m}$$

$$\Delta H_{A_2} = \frac{1}{2} 100 \times 0.633 \sin 2(32.6852) + 1.318 - 1.57 = 26.83\text{m}$$

### 3.4 ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΥΣ

Ο έμμεσος προσδιορισμός του μήκους μιας απόστασης, δηλαδή χωρίς να γίνει απευθείας μέτρηση μεταξύ των δύο άκρων της, μπορεί να γίνει με γεωμετρικές μεθόδους χρησιμοποιώντας απλές γεωμετρικές ιδιότητες. Στις μεθόδους έμμεσης μέτρησης μήκους ανήκουν η γεωμετρική και η τριγωνομετρική (ή αναλυτική) μέθοδος.

Στην *γεωμετρική μέθοδο* για τον υπολογισμό της απόστασης μεταξύ δύο απρόσιτων σημείων γίνεται συνήθως χρήση απλών γεωμετρικών ιδιοτήτων βάσει μετρήσεων μηκών και γωνιών του σχηματιζόμενου τριγώνου. Επίσης, λόγω της δυσκολίας να διατρέξουμε την απόσταση μεταξύ δύο απρόσιτων σημείων, είναι δυνατό να γίνει μεταφορά του μήκους σε άλλη περιοχή όπου η μέτρηση γίνεται πλέον με άμεσες μεθόδους προσδιορισμού (π.χ. προσδιορισμός απόστασης μεταξύ δύο σημείων που βρίσκονται στις όχθες ποταμού και παράλληλη μεταφορά του για μέτρηση σε προσιτή περιοχή).

Στην *τριγωνομετρική μέθοδο* το ζητούμενο μήκος προσδιορίζεται βάσει γεωμετρικών στοιχείων τριγώνου που σχηματίζεται από μετρημένα μεγέθη γωνιών και αποστάσεων αριθμού σημείων και με το άγνωστο μήκος να αποτελεί πλευρά αυτού του τριγώνου. Επίσης, το ζητούμενο μήκος είναι δυνατό να προσδιορισθεί από τις συντεταγμένες των κορυφών της άγνωστης βάσης ως προς κάποιο σύστημα αναφοράς (π.χ. μέθοδος εμπροσθοτομίας ή οπισθοτομίας, ή με χρήση δεκτών GPS). Σε αυτή τη περίπτωση, αναφερόμαστε στην *αναλυτική μέθοδο* προσδιορισμού του μήκους.

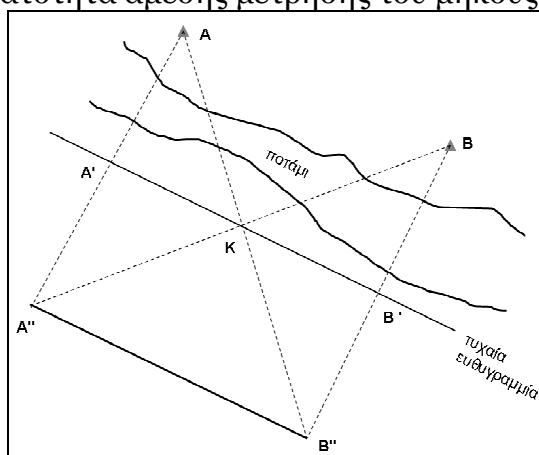
#### 3.4.1 Ακρίβεια γεωμετρικής μέτρησης μήκους

Η ακρίβεια προσδιορισμού μιας απόστασης με τη μέθοδο της γεωμετρικής και τριγωνομετρικής μεθόδου εξαρτάται από:

- την ακρίβεια μέτρησης των άλλων γεωμετρικών στοιχείων του τριγώνου που σχηματίζεται με πλευρά την άγνωστη απόσταση (πλευρές και γωνίες),
- την ακρίβεια προσδιορισμού των συντεταγμένων των κορυφών της άγνωστης απόστασης.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

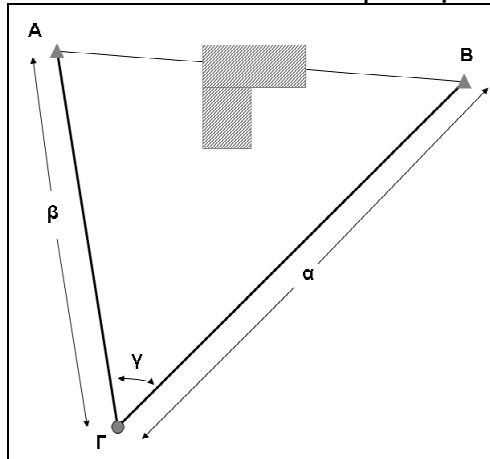
- Ζητείται να προσδιορισθεί η οριζόντια απόσταση AB όταν τα σημεία A και B βρίσκονται σε απρόσιτη περιοχή του ποταμού, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.12, όπου δεν υπάρχει δυνατότητα άμεσης μέτρησης του μήκους.



Σχήμα 3.12 Μέτρηση απόστασης μεταξύ απρόσιτων σημείων

Για τον προσδιορισμό του μήκους AB, φέρεται τυχαία ευθυγραμμία σε προσιτή περιοχή εκτός του ποταμού όπου προβάλλονται τα A και B. Οι προβολές των σημείων είναι A' και B'. Επίσης προσδιορίζεται το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος A' B', το οποίο είναι το σημείο K. Αν είναι A'' και B'' τα σημεία της τομής των BK με AA' και των AK με BB', τότε ορίζεται το μήκος A'' B'' που είναι ίσο με το μήκος AB και μπορεί να προσδιορισθεί με άμεσες μεθόδους μέτρησης μήκους.

- Ζητείται να προσδιορισθεί η οριζόντια απόσταση AB όταν μεταξύ των σημείων A και B υπάρχει εμπόδιο και επιπλέον δεν είναι ορατά μεταξύ τους (σχήμα 3.13).



**Σχήμα 3.13** Μέτρηση απόστασης μεταξύ σημείων όπου υπάρχει εμπόδιο

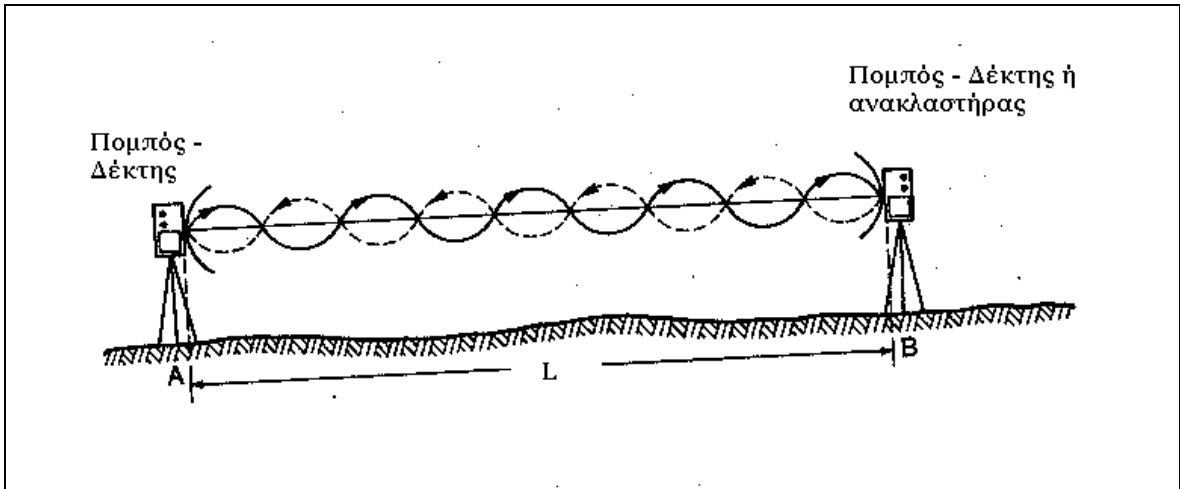
Στην περίπτωση αυτή εκλέγεται ένα τυχαίο σημείο Γ και μετριοούνται τα μήκη  $AG = \beta$  και  $BG = \alpha$  καθώς και η οριζόντια γωνία  $\gamma$ . Το μήκος AB προσδιορίζεται από το νόμο των συνημίτονων, δηλαδή:

$$AB = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\gamma} \quad (3.17)$$

### 3.5 ΜΕΤΡΗΣΗ ΜΗΚΩΝ ΜΕ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑ (EDM)

#### 3.5.1 Βασική αρχή λειτουργίας

Για τη μέτρηση ενός μήκους τοποθετείται στο ένα άκρο της ευθυγραμμίας, έστω το A, όργανο το οποίο εκπέμπει ηλεκτρομαγνητικό κύμα γνωστής ταχύτητας διάδοσης c. Το κύμα ανακλάται ή επανεκπέμπεται στο άλλο άκρο της ευθυγραμμίας B και επιστρέφει στο όργανο στο σημείο A. (σχ.3.14).



Σχήμα 3.14 Βασική αρχή λειτουργίας μέτρησης μηκών με EDM

Μετρώντας το συνολικό χρόνο  $t$  που απαιτείται από την εκπομπή του κύματος μέχρι την επιστροφή του στο A προσδιορίζεται το (κεκλιμένο) μήκος  $L_{AB}$  από τη σχέση:

$$L_{AB} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot t = \frac{\lambda \cdot t}{2 \cdot T} \quad (3.18)$$

όπου :  $\lambda$  το μήκος κύματος της ακτινοβολίας σε m, και

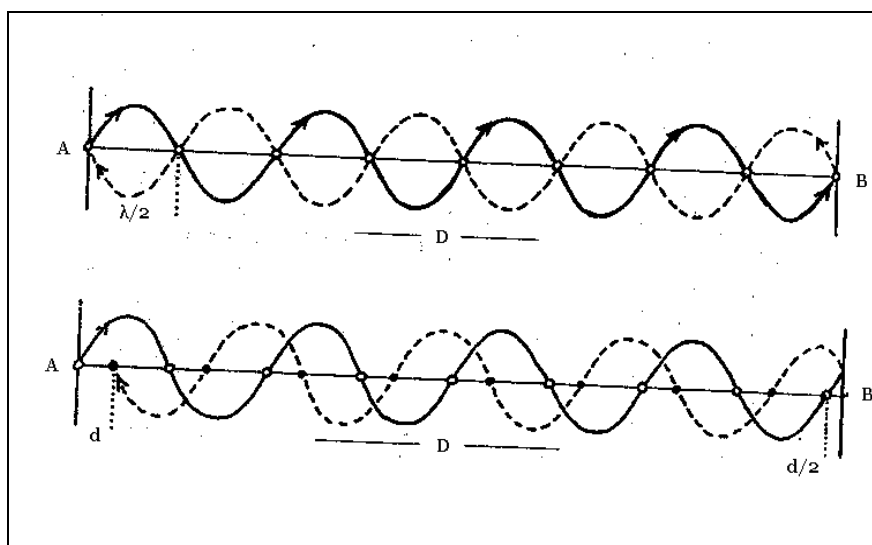
$T$  η περίοδος σε sec.

Η ταχύτητα  $c$  διάδοσης του κύματος συνδέεται με την ταχύτητα διάδοσής του στο κενό  $c_0$ , μέσω της σχέσης  $c = \frac{c_0}{n}$ , όπου  $n$ , ο δείκτης διάθλασης ο οποίος εξαρτάται από τις ατμοσφαιρικές συνθήκες (θερμοκρασία, πίεση, υγρασία) και τη συχνότητα της ακτινοβολίας, ενώ  $c_0 = 299792.458 \pm 0.0012 \text{ km/sec}$  (XVI Γενική Συνέλευση της IUGG στη Grenoble, 1975).

Η πρώτη προσπάθεια για κατασκευή και χρήση τέτοιων οργάνων αποδίδεται στους φυσικούς Maxwell και Hertz, ενώ το πρώτο αποτέλεσμα είναι η εμφάνιση των συσκευών Radar κατά το Β' Παγκόσμιο Πόλεμο.

Η χρήση τέτοιου είδους συσκευών για μέτρηση μηκών με τις ακρίβειες που απαιτούνται στη Γεωδαισία, επέβαλε τη χρήση χρονομέτρων που να μετρούν το χρόνο με ακρίβεια της τάξης του  $\pm 10^{-10} \text{ sec}$ . Επειδή η ακρίβεια αυτή ήταν δύσκολο να επιτευχθεί, αναπτύχθηκαν όργανα στα οποία, αντί του χρόνου  $t$ , συγκρίνονται οι φάσεις μεταξύ του κύματος που εκπέμπεται και αυτού που επιστρέφει. Από τη σύγκριση αυτή προκύπτει η *διαφορά φάσης*  $\Delta\phi$  η οποία αντιστοιχεί σε μήκος  $l$  της διαδρομής (σχ. 3.15). Το μήκος αυτό είναι ίσο με :

$$l = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\Delta\phi}{2\pi} \cdot \lambda \right) \quad (3.19)$$



Σχήμα 3.15 Μέτρηση του μήκους συναρτήσει του  $\lambda$  και  $\Delta\varphi$

Αν  $f (= \frac{1}{T})$  η συχνότητα του κύματος,  $t$  το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ μετάβασης και επιστροφής του κύματος, τότε :

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot f \cdot t \quad (3.20)$$

και λόγω της (3.19) :

$$l = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{\Delta\varphi}{2\pi \cdot f} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\Delta\varphi}{2\pi}, \quad (\lambda = \frac{c}{f}) \quad (3.21)$$

Έτσι, αν έχουν διανυθεί  $n$  ακέραια μήκη κύματος το μήκος  $L_{AB}$  θα υπολογίζεται από τη σχέση :

$$2L_{AB} = n \cdot \lambda + l \Rightarrow L_{AB} = n \cdot \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \Rightarrow L_{AB} = \frac{\lambda}{2} \cdot \left( n + \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) \quad (3.22)$$

Ο προσδιορισμός της διαφοράς φάσης  $\Delta\varphi$  καθώς και το πλήθος  $n$  των ακέραιων μηκών κύματος, γίνεται αυτόματα στα σύγχρονα όργανα, με ειδική επεξεργασία, και το αποτέλεσμα της μέτρησης δίνεται απ' ευθείας στην οθόνη που διαθέτουν.

Σήμερα διατίθεται πλήθος γεωδαιτικών οργάνων μέτρησης μηκών με χρήση της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (*Electronic Distance Measurement*), τα οποία μετρούν μήκη που μπορούν να φθάσουν τις μερικές δεκάδες χιλιομέτρων με ακρίβειες που φθάνουν το  $1 \times 10^{-6}$  km, ανεξάρτητα από τη μορφολογία του εδάφους. Τα όργανα αυτά ονομάζονται *όργανα EDM*.

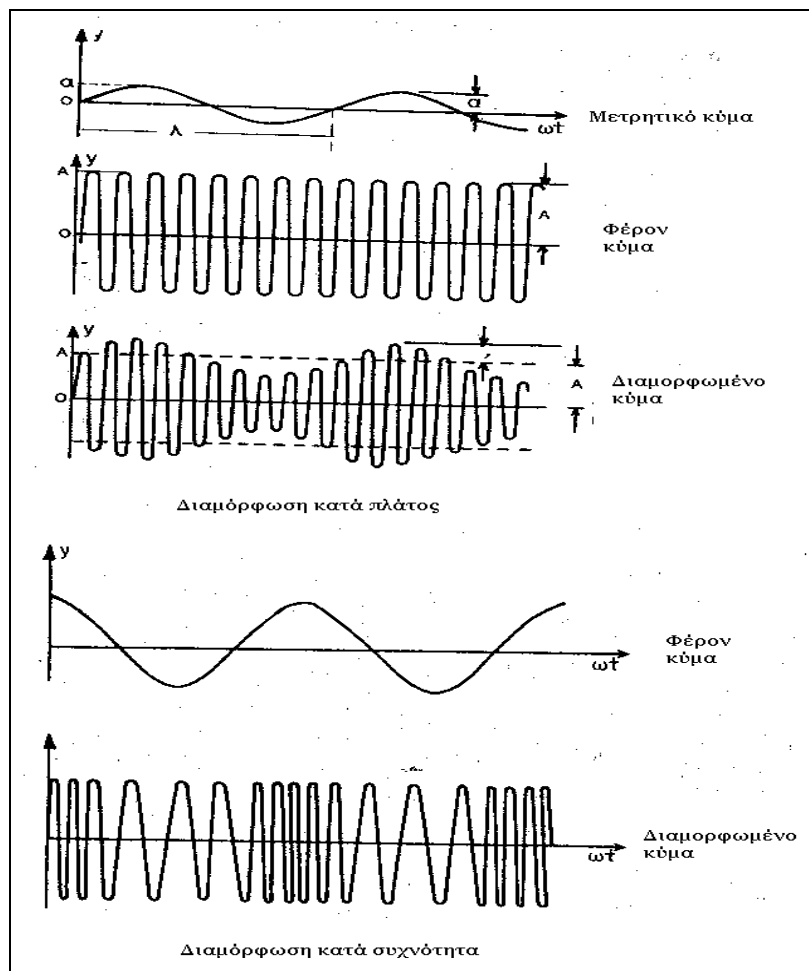
### 3.5.2 Διαμόρφωση

Για τη μέτρηση μηκών με τη μέθοδο της διαφοράς φάσης χρησιμοποιούνται ηλεκτρομαγνητικά κύματα χαμηλών συχνοτήτων. Ωστόσο, με κύματα χαμηλών συχνοτήτων, είναι δύσκολο να μετρηθούν μεγάλες αποστάσεις, λόγω της απορρόφησης που υφίστανται κατά τη διαδρομή τους μέσα στην ατμόσφαιρα, το άνοιγμα της δέσμης, τις ανακλάσεις κ.λπ. Αντίθετα, τα κύματα υψηλών

συχνοτήτων δεσμοποιούνται εύκολα, δεν απορροφώνται από την ατμόσφαιρα αλλά παρουσιάζουν δυσκολίες στην επεξεργασία των στοιχείων για τον προσδιορισμό του μήκους. Έτσι, στα σύγχρονα όργανα χρησιμοποιούνται ταυτόχρονα χαμηλές και υψηλές συχνότητες. Η διαδικασία μέτρησης είναι η ακόλουθη.

Στο όργανο δημιουργείται ένα κύμα χαμηλής συχνότητας (*μετρητικό κύμα*) του οποίου το μήκος  $\lambda$  χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης, και ένα κύμα υψηλής συχνότητας (*φέρων κύμα*) το οποίο χρησιμοποιείται για τη μεταφορά του μετρητικού. Τα δύο κύματα ενώνονται μέσω μιας διαδικασίας η οποία ονομάζεται *διαμόρφωση (modulation)*, και στα όργανα EDM γίνεται αυτόματα (σχ. 3.16). Το διαμορφωμένο κύμα εκπέμπεται από το όργανο και κατά την επιστροφή του σε αυτό, διαχωρίζεται εκ νέου σε μετρητικό και φέρον (*αποδιαμόρφωση*). Στη συνέχεια συγκρίνονται οι φάσεις, προσδιορίζεται η διαφορά φάσης και υπολογίζεται το μήκος.

Η διαμόρφωση διακρίνεται σε *διαμόρφωση πλάτους* (αν μεταβάλλεται το πλάτος) και σε *διαμόρφωση συχνότητας* (αν μεταβάλλεται η συχνότητα κατά τη διαμόρφωση).



Σχήμα 3.16 Διαμόρφωση κατά πλάτος ή κατά συχνότητα

### 3.5.3 Είδη οργάνων EDM

Τα σύγχρονα όργανα EDM χρησιμοποιούν, για το φέρον κύμα, ακτινοβολία από την περιοχή του ορατού φωτός ή υπέρυθρη ακτινοβολία (όργανα Laser ή ηλεκτροοπτικά), καθώς και μικροκύματα.

Τα όργανα που χρησιμοποιούν *μικροκύματα* ως φέρον κύμα έχουν τη δυνατότητα να μετρούν μήκη που φθάνουν τα 200km. Για τη μέτρηση του μήκους με τα όργανα αυτά, τοποθετείται στο ένα άκρο το κυρίως όργανο – πομπός και στο άλλο άκρο ένα δεύτερο όργανο – δέκτης. Τα όργανα αυτά διαμορφώνουν το κύμα κατά συχνότητα. Το διαμορφωμένο κύμα εκπέμπεται από το κυρίως όργανο. Όταν φθάσει στο όργανο – δέκτης, αναμεταδίδεται και επιστρέφει στο όργανο – πομπός, όπου γίνεται και η αποδιαμόρφωση και προσδιορίζεται η τιμή του μήκους. Επειδή τα μικροκύματα παρουσιάζουν μεγάλη διασπορά, λόγω του μεγάλου ανοίγματος της δέσμης το φέρον κύμα ενισχύεται στο όργανο δέκτη πριν επιστρέψει στο κυρίως όργανο.

Τα όργανα που χρησιμοποιούν για το φέρον κύμα *ορατό φως ή υπέρυθρη ακτινοβολία* είναι τα όργανα που κυρίως χρησιμοποιούνται σήμερα για τη μέτρηση μηκών. Τα όργανα αυτά διαμορφώνουν το φέρον κύμα κατά πλάτος. Το διαμορφωμένο κύμα εκπέμπεται από το όργανο, ανακλάται σε έναν παθητικό ανακλαστήρα τοποθετημένο στο άλλο άκρο της ευθυγραμμίας και επιστρέφει στο όργανο όπου και αποδιαμορφώνεται. Τα όργανα αυτού του είδους παρουσιάζουν μεγάλη ποικιλία όσον αφορά την εμβέλειά τους και την ακρίβεια με την οποία προσδιορίζεται το μετρούμενο μήκος.

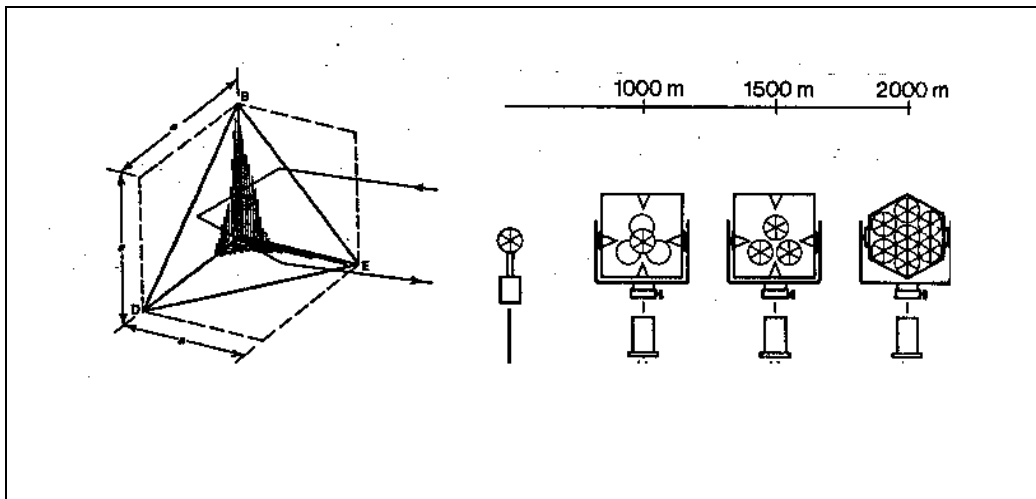
### 3.5.4 Ανακλαστήρες

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω τα όργανα που χρησιμοποιούν ορατή ή υπέρυθρη ακτινοβολία συνδυάζονται με *ανακλαστήρες* για τη μέτρηση του μήκους. Οι ανακλαστήρες προσαρμόζονται σε ειδικό στυλεό που τοποθετείται πάνω στο σημείο, ή τοποθετούνται σε βάση πάνω σε τρικόχλιο και κεντρώνονται και οριζοντιώνονται με ακρίβεια πάνω από το σημείο.

Οι ανακλαστήρες ή *κατάφωτα* (εικόνα 3.4), όπως συνηθίζεται να αποκαλούνται, αποτελούνται από ένα τριεδρικό πρίσμα. Η κορυφή του πρίσματος είναι τρισσορθογώνια γωνία, οι τρεις έδρες της οποίας είναι ισοσκελή τρίγωνα, η δε βάση του είναι ισόπλευρο τρίγωνο. Για αύξηση της ανακλαστικότητας συνδυάζονται περισσότερα του ενός πρίσματα οπότε η επιφάνεια του ανακλαστήρα έχει τη μορφή κανονικού εξαγώνου. Με τη διάταξη αυτή η ακτινοβολία που εισέρχεται στο πρίσμα, ανακλάται στις έδρες του και εξέρχεται παράλληλη με την προσπίπτουσα. (σχ. 3.17). Η παραλληλία εισερχόμενης και εξερχόμενης ακτίνας επιτυγχάνεται ανεξάρτητα από τη γωνία πρόσπτωσης, η δε προσπίπτουσα ακτινοβολία μπορεί να αποκλίνει από την κάθετη στη βάση του πρίσματος μέχρι τις  $\pm 20^\circ$ . Έτσι δεν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια στον προσανατολισμό του πρίσματος.

Οι ανακλαστήρες προσαρμόζονται σε ειδικό στυλεό που τοποθετείται πάνω στο σημείο, ή τοποθετούνται σε βάση πάνω σε τρικόχλιο και κεντρώνονται και οριζοντιώνονται με ακρίβεια πάνω από το σημείο (εικόνα 3.5). Ανάλογα με το μέγεθος του μήκους που πρόκειται να μετρηθεί, τις ατμοσφαιρικές συνθήκες και το είδος της ακτινοβολίας που χρησιμοποιεί το E.D.M. χρησιμοποιείται ειδικός συνδυασμός τριών ή και περισσότερων ανακλαστήρων.





**Σχήμα 3.17** Μορφή ανακλαστήρα

Για ειδικές γεωδαιτικές εργασίες (π.χ. αποτυπώσεις όψεων κτιρίων, υλοποίηση σημείων ελέγχου για την παρακολούθηση της κινηματικής συμπεριφοράς κατασκευών κ.α.) χρησιμοποιούνται ειδικοί αυτοκόλλητοι επίπεδοι στόχοι – ανακλαστήρες (εικόνα 3.4).

Σήμερα υπάρχει η δυνατότητα επιλογής του κατάλληλου ανακλαστήρα μέσα από ένα ευρύτατο πλήθος έτσι ώστε να καλύπτονται οι απαιτήσεις και της πιο ειδικής γεωδαιτικής εργασίας.



**Εικόνα 3.4** Τύποι ανακλαστήρων



Εικόνα 3.5 Χρήση ανακλαστήρα με στυλεό ή τρικόχλιο

### 3.5.5 Ολοκληρωμένοι Γεωδαιτικοί σταθμοί (Total Stations)

Τα όργανα EDM έχουν σήμερα αντικατασταθεί από όργανα τα οποία είναι συνδυασμός οργάνου EDM και ηλεκτρονικού θεοδόλιχου. Τα όργανα αυτά ονομάζονται *ηλεκτρονικά ταχύμετρα* ή συνηθέστερα *Ολοκληρωμένοι Γεωδαιτικοί Σταθμοί (Total Stations)*.

Οι ολοκληρωμένοι γεωδαιτικοί σταθμοί είναι όργανα ομοαξονικά δηλ. η εκπομπή (και λήψη) της ακτινοβολίας γίνεται κατά μήκος του σκοπευτικού άξονα του θεοδόλιχου. Η λειτουργία τους πραγματοποιείται μέσω ηλεκτρολογίου το οποίο συνδέεται με μικρο-υπολογιστή στο εσωτερικό του οργάνου. Οι ενδείξεις των γωνιών (οριζόντιων και κατακόρυφων) και του μήκους εμφανίζονται σε οθόνη υγρών κρυστάλλων. Μέσω του μικρο-υπολογιστή υπάρχει η δυνατότητα απευθείας υπολογισμού της οριζόντιας απόστασης και της υψομετρικής διαφοράς. Σήμερα οι περισσότεροι γεωδαιτικοί σταθμοί παρέχουν τη δυνατότητα αποθήκευσης των μετρήσεων καθώς και επιπλέον πληροφορίας (κωδικός σημείου μέτρησης, ύψος οργάνου και στόχου) στην μνήμη του μικρο-υπολογιστή τους. Επιπλέον μέσω υπορουτινών υπάρχει η δυνατότητα να εκτελούνται διάφοροι υπολογισμοί απευθείας στο ύπαιθρο και να καταγράφονται στη μνήμη τους. Ενδεικτικά αναφέρονται :

- Υπολογισμός οριζόντιας απόστασης και υψομετρικής διαφοράς μεταξύ του σημείου στάσης και του σκοπευόμενου σημείου,
- Υπολογισμός των συντεταγμένων των σκοπευόμενων σημείων εφόσον δοθούν οι συντεταγμένες του σημείου στάσης,
- Υπολογισμός των υψομέτρων των σκοπευόμενων σημείων εφόσον δοθούν το υψόμετρο του σημείου στάσης και τα ύψη οργάνου και στόχου,
- Υπολογισμός υψομέτρου απρόσιτου σημείου,
- Υπολογισμός απόστασης υψομετρικής διαφοράς και αζιμουθίων μεταξύ σκοπευόμενων σημείων,
- Χάραξη σημείων με πολικές συντεταγμένες.

Με τη χρήση των ολοκληρωμένων γεωδαιτικών σταθμών έχει αυτοματοποιηθεί η εργασία υπαίθρου, έχει μειωθεί ο χρόνος παραμονής στο ύπαιθρο και έχουν εξαλειφθεί τα χονδροειδή σφάλματα ανάγνωσης και καταγραφής των μετρήσεων.

Τελευταίες εξελίξεις στην κατασκευή των ολοκληρωμένων γεωδαιτικών σταθμών αποτελούν τα όργανα που χρησιμοποιούν ρομποτική τεχνολογία, ενώ μπορούν να συνδυαστούν και με δέκτη GPS. Τα όργανα αυτά διαθέτουν σερβομηχανισμούς που τα κινούν γύρω από τον πρωτεύοντα και δευτερεύοντα άξονα, ανιχνεύουν και εντοπίζουν τους ανακλαστήρες – στόχους αυτόματα, πραγματοποιούν τις μετρήσεις και τις καταγράφουν στη μνήμη τους.

Έτσι, οι γεωδαιτικοί σταθμοί χρησιμοποιούνται σήμερα για τη μέτρηση τριγωνομετρικών δικτύων, οδεύσεων, για ταχυμετρικές αποτυπώσεις και χαράξεις τεχνικών έργων, σε ανίχνευση μετακινήσεων κατασκευών και τμημάτων του εδάφους και παρακολούθηση της εξέλιξης τους, στη βιομηχανική γεωδαισία κλπ.



**Εικόνα 3.6** Ολοκληρωμένοι γεωδαιτικοί σταθμοί

### 3.5.6 Διορθώσεις - αναγωγές μετρήσεων μηκών με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία

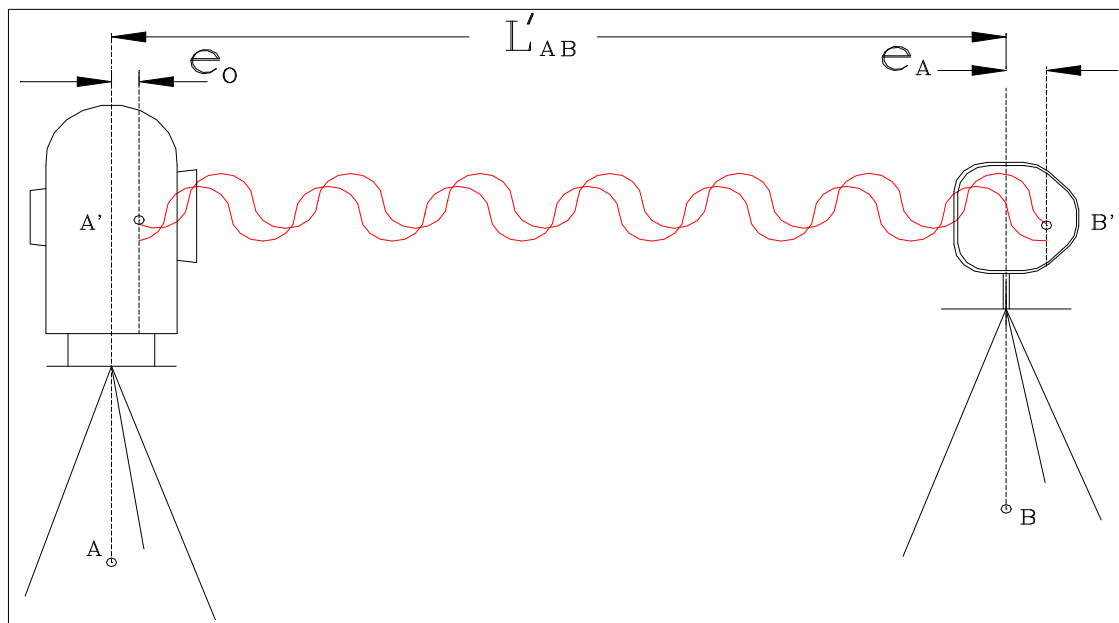
Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζονται οι απαραίτητες διορθώσεις και αναγωγές που πρέπει να γίνουν στα μήκη τα οποία μετρούνται με όργανα που χρησιμοποιούν ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Οι συγκεκριμένες διορθώσεις οφείλονται στα όργανα που χρησιμοποιούνται, όπως επίσης και στις ατμοσφαιρικές συνθήκες κατά τον χρόνο των μετρήσεων. Οι αναγωγές προκύπτουν από την απαίτηση της αναφοράς των μετρήσεων των μηκών, που γίνονται στην ΦΓΕ, σε μια αναπτυσσόμενη επιφάνεια.

#### 3.5.6α Διορθώσεις του συστήματος όργανο - ανακλαστήρα

- Διόρθωση λόγω σταθεράς συστήματος

Κατά την κέντρωση – οριζοντίωση του ηλεκτρονικού οργάνου στο σημείο A και του ανακλαστήρα στο σημείο B, για την μέτρηση του μήκους  $L'_{AB}$  (σχ. 3.18), προκύπτουν εκκεντρότητες του σημείου εκπομπής – λήψης A' της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας και του φαινομένου σημείου ανάκλασης B' σε σχέση με τα σημεία A και B αντίστοιχα.

Η εκκεντρότητα στο A,  $e_0$  οφείλεται στο ότι το σημείο εκπομπής – λήψης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων A' δεν βρίσκεται πάνω στον κατακόρυφο άξονα του ηλεκτρονικού οργάνου (σχ. 3.18). Στο σημείο B, όπου κεντρώνεται ο ανακλαστήρας, η εκκεντρότητα  $e_A$  οφείλεται στο ότι η προσπίπτουσα ακτινοβολία ακολουθεί την διαδρομή που φαίνεται στο (σχ. 3.18). Επειδή αυτή καθυστερεί διαθλώμενη μέσα στον ανακλαστήρα, το φαινόμενο σημείο ανάκλασης είναι το σημείο B', το οποίο δεν βρίσκεται στον κατακόρυφο άξονα του ανακλαστήρα.



Σχήμα 3.18 Εκπομπή – ανάκλαση – λήψη ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

Το αλγεβρικό άθροισμα των προηγούμενων εκκεντροτήτων αποτελεί την σταθερά του συστήματος C, επομένως:

$$C = e_0 + e_A \quad (3.23)$$

Οι κατασκευαστές συνήθως, επιδιώκουν η σταθερά για όργανο και ανακλαστήρα της ίδιας εταιρείας να είναι σημαντικά μικρότερη από την ακρίβεια μέτρησης του οργάνου, έτσι ώστε αυτή να βρίσκεται μέσα στο θόρυβο των μετρήσεων και να θεωρείται ότι είναι μηδενική. Το πρόβλημα όμως εμφανίζεται όταν χρησιμοποιείται όργανο με ανακλαστήρα διαφορετικής εταιρείας ή όταν έχουν διαφοροποιηθεί οι σταθερές του οργάνου.

Η σταθερά του συστήματος  $C$  προσδιορίζεται με μετρήσεις ακριβείας σε βάσεις ελέγχου των οποίων το μήκος, είτε μετριέται απευθείας με το ελεγχόμενο σύστημα (μέθοδος της πολλαπλής βάσης), είτε είναι γνωστό με ακρίβεια μεγαλύτερη της ακριβείας του ηλεκτρονικού οργάνου μέτρησης. Τα μετρούμενα μήκη πρέπει να διορθώνονται από τις μετεωρολογικές συνθήκες του περιβάλλοντος και να ανάγονται στο οριζόντιο επίπεδο. Για να γίνει κατανοητός ο τρόπος προσδιορισμού της σταθεράς και με τις δυο μεθόδους, δίνονται στο τέλος της ενότητας σχετικά παραδείγματα.

Κατά την μέτρηση του μήκους  $L'_{AB}$  απαιτείται ο ανακλαστήρας να προσανατολίζεται χονδρικά προς το ηλεκτρονικό όργανο, έτσι ώστε η πρόσπτωση της ακτινοβολίας να γίνεται όσο το δυνατό κάθετα στην επιφάνεια του, για να μη προκύπτει σφάλμα στο μετρούμενο μήκος. Για γωνία πρόσπτωσης της τάξης  $20^\circ$  προκύπτει σφάλμα στο μήκος της τάξης του 1mm.

- *Διόρθωση λόγω κυκλικού σφάλματος*

Στα μήκη που μετρούνται με ηλεκτρονικά όργανα, τα οποία χρησιμοποιούν την μέθοδο μέτρησης της διαφοράς φάσης, παρουσιάζονται σφάλματα με περιοδικό χαρακτήρα. Αυτά τα σφάλματα είναι γνωστά με το γενικό όνομα «κυκλικό σφάλμα» και οφείλονται πιθανά στη συμβολή των κυμάτων μέσα στο όργανο ή σε συστηματικό σφάλμα στο σύστημα μέτρησης της φάσης.

Η σχέση που εκφράζει το κυκλικό σφάλμα κατά τη μέτρηση ενός μήκους  $L'_{AB}$  είναι ημιτονικής μορφής. Το κυκλικό σφάλμα σε συνδυασμό με το σφάλμα λόγω της σταθεράς του συστήματος δίνεται από την σχέση:

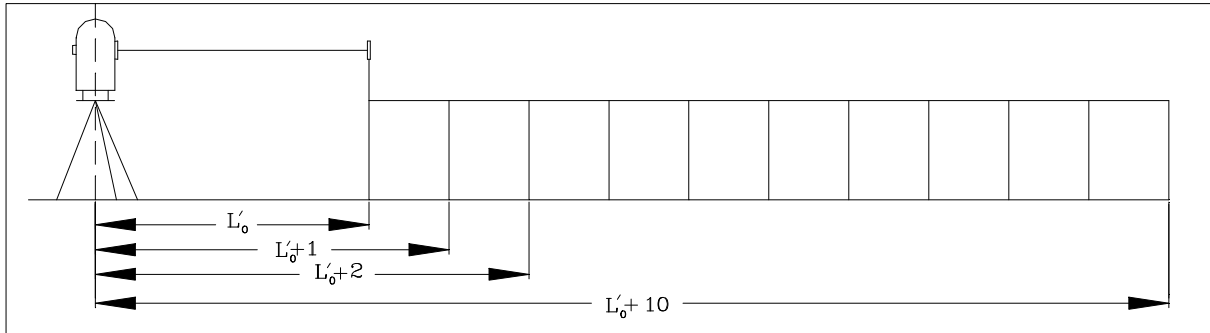
$$y = A + B \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda_m} \cdot L'_{AB} - \varphi\right) \quad (3.24)$$

όπου :  $A$  προσδιοριστέος όρος (σε μονάδες μήκους),  $B$  προσδιοριστέος συντελεστής (σε μονάδες μήκους),  $\lambda_m$  το μήκος κύματος της διαμορφωμένης ακτινοβολίας (συνήθως  $\lambda_m = 20\text{m}$ ),  $L'_{AB}$  το μετρούμενο μήκος και  $\varphi$  η προσδιοριστέα φάση.

Ο όρος  $A$ , αν δεν ληφθούν υπόψη τα περιοδικά σφάλματα μεγαλύτερης περιόδου, είναι ίσος με την σταθερά του συστήματος (όργανο – ανακλαστήρας)  $C$ . Ο όρος  $B$  είναι το μέσο πλάτος της ημιτονικής σχέσης του κυκλικού σφάλματος. Η διόρθωση ( $C_C$ ), λόγω του κυκλικού σφάλματος  $y$ , δίνεται από την σχέση :

$$C_C = -[A + B \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{\lambda_m} \cdot L'_{AB} - \varphi\right)] \quad (3.25)$$

Στην πράξη για να προσδιορισθεί το κυκλικό σφάλμα  $y$ , γίνονται μετρήσεις μηκών σε ειδικές βάσεις, που έχουν ιδρυθεί για τον έλεγχο των συστημάτων. Η συνολική διαφορά του εύρους των μετρημένων μηκών πρέπει να καλύπτει τουλάχιστον το  $\lambda_m / 2$  (συνήθως  $\lambda_m = 20\text{m}$ ), και να μεταβάλλεται περίπου ανά  $1\text{m}$  ή και λιγότερο (π.χ.  $0.50\text{m}$ ) (σχ. 3.19).



**Σχήμα 3.19** Βάση μέτρησης του κυκλικού σφάλματος

Δηλαδή, μετρούνται τα μήκη  $L'_0$ ,  $L'_1 = L'_0 + 1\text{m}$ ,  $L'_2 = L'_0 + 2\text{m}$ , ...,  $L'_{10} = L'_0 + 10\text{m}$  (σχ. 3.19). Αυτά τα μήκη έχουν μετρηθεί και με όργανο πολύ υψηλής ακρίβειας (όργανο μηδενικής τάξης), με αποτελέσματα αντίστοιχα  $L_0$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ , ...,  $L_{10}$ , που θεωρούνται ότι δεν έχουν σφάλμα. Από την σύγκριση των αντίστοιχων μηκών προκύπτουν οι διαφορές, δηλαδή τα σφάλματα,  $(y_0 = L'_0 - L_0)$ ,  $(y_1 = L'_1 - L_1)$ , ...,  $(y_{10} = L'_{10} - L_{10})$ , οι οποίες είναι περισσότερες από τις απαιτούμενες. Γι' αυτό τον λόγο οι ποσότητες  $A$ ,  $B$  και η γωνία  $\varphi$  είναι δυνατό να προσδιορισθούν με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Με αυτή τη μέθοδο υπολογισμού του σφάλματος  $y$  που περιγράφηκε, προσδιορίζεται με ακρίβεια η σταθερά του συστήματος  $C$  έστω και αν δεν υπάρχει κυκλικό σφάλμα.

- *Διόρθωση λόγω μεταβολής της συχνότητας διαμόρφωσης*

Η συχνότητα διαμόρφωσης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας μπορεί να μεταβληθεί λόγω διάφορων αιτιών όπως είναι η απορύθμιση, η γήρανση και η θερμοκρασία του κρυστάλλου χαλαζία. Εξαιτίας αυτής της μεταβολής προκύπτει μια διόρθωση  $\delta_f$ , η οποία εξαρτάται από την πραγματική συχνότητα κατά την μέτρηση  $f_a$  και την ονομαστική συχνότητα του οργάνου  $f_n$ . Η διόρθωση  $\delta_f$  του μήκους  $L'_{AB}$  σε km, δίνεται από τις σχέσεις:

$$\delta_f = \frac{f_a - f_n}{f_a} \cdot 10^6 \text{ σε ppm} \quad \text{ή} \quad \delta_f = \frac{f_a - f_n}{f_a} \cdot 10^6 \cdot L'_{AB} \text{ σε mm} \quad (3.26)$$

Η διαφορά της συχνότητας  $(f_a - f_n)$  μπορεί να μετρηθεί με ειδικές συσκευές, οπότε προσδιορίζεται η διόρθωση του μετρούμενου μήκους από την προηγούμενη σχέση. Σε μετρήσεις υψηλής ακριβείας, η τιμή της συχνότητας του οργάνου ελέγχεται κατά την διάρκεια της μέτρησης και αν χρειασθεί διορθώνεται, έτσι τελικά δεν απαιτείται να γίνει η διόρθωση στο μήκος.

### 3.5.6β Διορθώσεις λόγω της ατμόσφαιρας

- Διόρθωση λόγω μείωσης της ισχύος της ακτινοβολίας

Η μείωση της ισχύος της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας οφείλεται σε διάφορες αιτίες. Αυτές είναι η απορρόφηση λόγω της ατμόσφαιρας που είναι η σημαντικότερη, η απώλεια κατά την ανάκλαση της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας και οι μικρές επιφάνειες του δέκτη και του ανακλαστήρα.

Γενικά η μείωση της ισχύος επιφέρει μεγάλη αβεβαιότητα στις μετρήσεις ή και συστηματικές μεταβολές στην τιμή του κυκλικού σφάλματος. Στην πράξη χρησιμοποιείται μεγαλύτερος αριθμός ανακλαστήρων, όσο το μήκος αυξάνεται ή όσο οι συνθήκες ορατότητας στην ατμόσφαιρα επιβαρύνονται όπως π.χ. σε περιοχές με ατμοσφαιρική ρύπανση ή έντονη ατμοσφαιρική υγρασία.

- Πρώτη διόρθωση ταχύτητας  $C_1$

Κατά την μέτρηση του μήκους  $L_{AB}$  μεταξύ των σημείων A και B με ηλεκτρονικό όργανο, η εκπεμπόμενη ακτινοβολία περνά μέσα από την ατμόσφαιρα, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται η ταχύτητα διάδοσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Γι' αυτό τον λόγο το μετρούμενο μήκος, μετά τις διορθώσεις λόγω του συστήματος που αναφέρθηκαν στη προηγούμενη ενότητα, απαιτείται να διορθωθεί εξαιτίας των ατμοσφαιρικών συνθηκών που επικρατούν κατά τον χρόνο των μετρήσεων. Σε αντίθετη περίπτωση παρουσιάζεται συστηματικό σφάλμα.

Βασική παράμετρος της διόρθωσης είναι ο δείκτης διάθλασης  $n$  κατά μήκος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας (Παράρτημα II). Με βάση τον  $n$ , που είναι ο μέσος όρος των δεικτών διάθλασης  $n_A$  και  $n_B$  στα σημεία A και B ( $n = [n_A + n_B]/2$ ), προσδιορίζεται η διαθλασιμότητα  $N$  από την σχέση:

$$N = (n - 1) \cdot 10^6 \quad (3.27)$$

Η διαθλασιμότητα  $N$  είναι η διόρθωση του μετρούμενου μήκους σε ppm. Στην περίπτωση που το ηλεκτρονικό όργανο χρησιμοποιεί ορατή ή υπέρυθη ακτινοβολία η διαθλασιμότητα  $N_g$ , για τις κανονικές συνθήκες ατμόσφαιρας (θερμοκρασία  $t=0^\circ\text{C}$ , πίεση  $P=1013.25$  mbar ξηρού αέρα με περιεκτικότητα 0.03%  $\text{CO}_2$ ), υπολογίζεται από την επόμενη σχέση των Barrel και Sears:

$$N_g = 287.604 + \frac{3 \cdot 1.6288}{\lambda^2} + \frac{5 \cdot 0.0136}{\lambda^4} \quad (3.28)$$

όπου:  $\lambda$  το μήκος κύματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας σε  $\mu\text{m}$ .

Για τις ατμοσφαιρικές συνθήκες κατά την μέτρηση  $L_{AB}$ , η σχέση των Barrel και Sears, με βάση την οποία υπολογίζεται η διαθλασιμότητα  $N'_g$  κατά μήκος του  $L_{AB}$ , προκύπτει ως συνάρτηση της  $N_g$  και των μέσων όρων των τιμών των μετεωρολογικών στοιχείων των άκρων A και B, ως εξής:

$$N'_g = \frac{N_g \cdot Q \cdot P}{T} - \frac{V \cdot e}{T} \quad (3.29)$$

όπου :  $T = 273.15 + t$  σε  $^\circ\text{K}$ ,  $t$  η θερμοκρασία ξηρού αέρα σε  $^\circ\text{C}$ ,  $P$  η ατμοσφαιρική πίεση και  $e$  η πίεση των υδρατμών. Για  $P$  και  $e$  σε mbar,  $Q=0.2696$  και  $V=11.27$ , για  $P$  και  $e$  σε mmHg,  $Q=0.3594$  και  $V=15.02$ .

Η  $e$  υπολογίζεται από την σχέση:

$$e = e_s - 0.000662 \cdot P \cdot (t - t_w) \quad (3.30)$$

όπου :  $t_w$  η θερμοκρασία υγρού αέρα σε °C,  $e_s$  η πίεση των κορεσμένων υδρατμών σε mbars που δίνεται από την σχέση :

$$\log e_s = \frac{7.5 \cdot t_w}{t_w + 237.3} + 0.7857 \quad (3.31)$$

Στα σύγχρονα ηλεκτρονικά όργανα δίνονται σχετικά νομογραφήματα από τον κατασκευαστή με βάση τα οποία, με στοιχεία εισόδου την θερμοκρασία και την ατμοσφαιρική πίεση κατά τον χρόνο των μετρήσεων, υπολογίζεται η πρώτη διόρθωση ταχύτητας  $C_1$  σε ppm.

Στην περίπτωση που το ηλεκτρονικό όργανο χρησιμοποιεί μικροκύματα, η διαθλασιμότητα  $N_m$  δίνεται από την σχέση των Essen και Froome:

$$N_m = \frac{77.64 \cdot (P - e)}{T} + \frac{64.68 \cdot e}{T} \left(1 + \frac{57.48}{T}\right) \quad (3.32)$$

όπου :  $P$  και  $e$  δίνονται σε mbar και  $T$  σε °K.

Η προηγούμενη σχέση χρησιμοποιείται για μήκη κύματος  $\lambda = 0.03\mu\text{m} \div 1\text{m}$

Γενικά αν  $N'_g$  και  $N''_g$  οι διαθλασιμότητες κατά την βαθμονόμηση του οργάνου και κατά την μέτρηση του μήκους  $L_{AB}$  (km) αντίστοιχα, τότε η πρώτη διόρθωση της ταχύτητας  $C_1$  δίνεται από τις σχέσεις:

$$C_1 = (N'_g - N''_g) \text{ σε ppm} \quad \text{ή} \quad C_1 = (N'_g - N''_g) \cdot L_{AB} \text{ σε mm} \quad (3.33)$$

• *Δεύτερη διόρθωση ταχύτητας  $C_2$*

Στην προηγούμενη ενότητα για τον προσδιορισμό της πρώτης διόρθωσης ταχύτητας  $C_1$ , στην μέτρηση του μήκους  $L_{AB}$  χρησιμοποιήθηκε ο μέσος όρος του δείκτη διάθλασης η μεταξύ των άκρων A και B. Αυτή η τιμή είναι προσεγγιστική, η ακριβέστερη τιμή του δείκτη διάθλασης εισάγει την δεύτερη διόρθωση ταχύτητας  $C_2$ . Η  $C_2$  είναι πάντοτε αφαιρετική και δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$C_2 = -(k - k^2) \cdot \frac{L_{AB}^3}{12 \cdot R^2} \quad (3.34)$$

όπου :  $k$  ο συντελεστής γεωδαιτικής διάθλασης (ενότητα 4.13.2),  $L_{AB}$  το μήκος που έχει μετρήσει το ηλεκτρονικό όργανο και  $R$  η μέση ακτίνα καμπυλότητας του ελλειψοειδούς αναφοράς κατά το μήκος της γραμμής AB, η οποία για τον Ελληνικό χώρο μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι της τάξης  $R \approx 6371\text{km}$ .

Η  $C_2$  για μήκη τάξης μεγέθους των 15km και  $k \approx 0.16$  είναι  $C_2 \approx -1\text{mm}$ , επομένως μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι αμελητέα για μήκη μικρότερα από αυτή.

Με βάση τις διορθώσεις  $C_1$  και  $C_2$  το τελικό μήκος  $S'_{AB}$  που θα χρησιμοποιηθεί στις επόμενες γεωμετρικές αναγωγές δίνεται από την σχέση :

$$S'_{AB} = L_{AB} + C_1 + C_2 \quad (3.35)$$



### 3.5.6γ Γεωμετρικές αναγωγές

Μετά τις διορθώσεις, που παρουσιάζονται στην προηγούμενη ενότητα, το μήκος που αρχικά μετρήθηκε έχει διορθωμένη τιμή  $S'_{AB}$ . Σε αυτό το μήκος, θα γίνουν οι αναγωγές που απαιτούνται, για να υπολογισθεί το μήκος  $d'_{AB}$  (σχ. 3.20) πάνω στο ελλειψοειδές εκ περιστροφής ΕΕΠ, που είναι η επιφάνεια αναφοράς. Αυτές οι αναγωγές επειδή βασίζονται στη γεωμετρία λέγονται γεωμετρικές αναγωγές.

- *Αναγωγή του μήκους στην επιφάνεια αναφοράς*

Βασικό μέγεθος των γεωμετρικών αναγωγών είναι η ακτίνα καμπυλότητας  $R$  του ΕΕΠ κατά την διεύθυνση της ευθείας πάνω στην οποία μετριέται το μήκος  $S'_{AB}$ . Έτσι αντικαθίσταται το ΕΕΠ με μια σφαίρα ακτίνας καμπυλότητας  $R$ , η τιμή της οποίας δίνεται από την επόμενη σχέση:

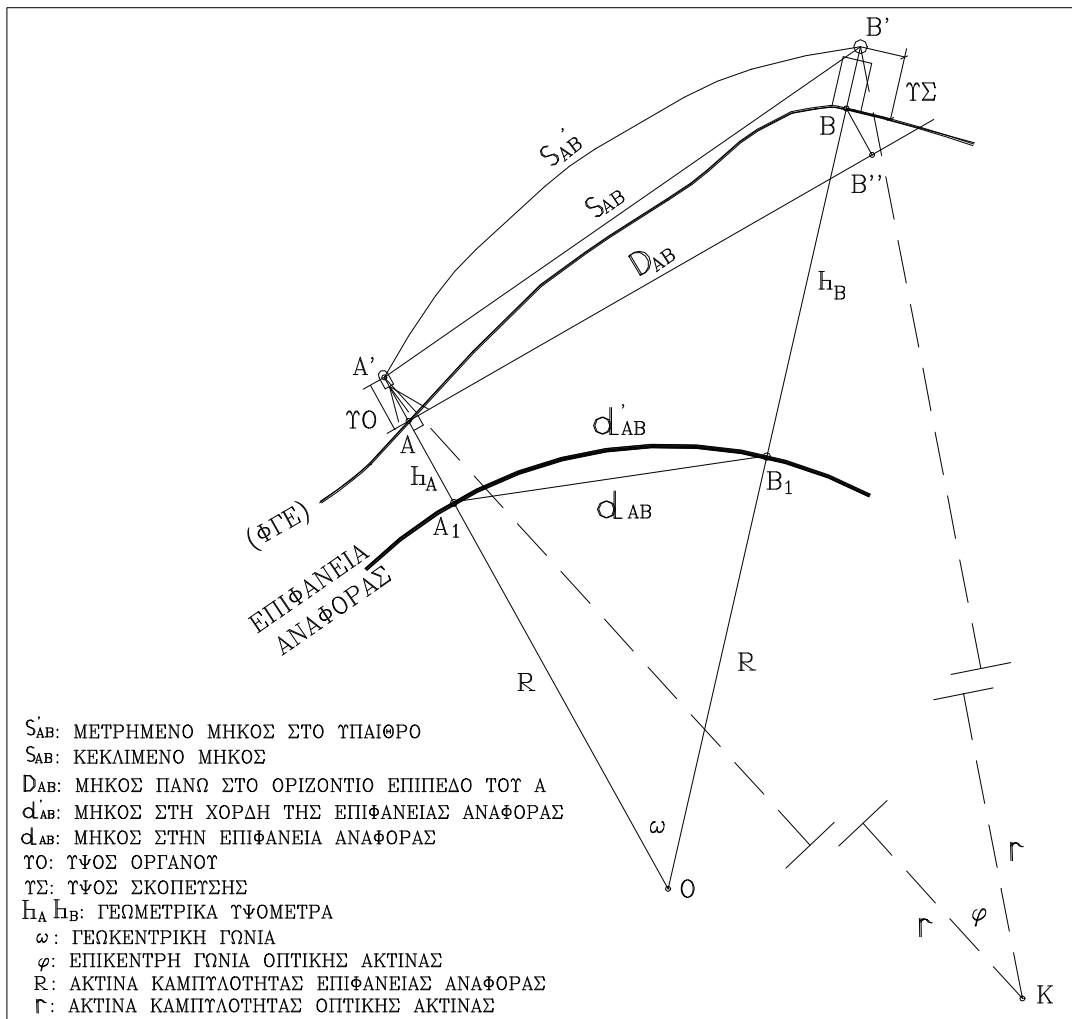
$$R = \frac{\rho \cdot N}{\rho \cdot \sin^2 A + N \cdot \cos^2 A} \quad (3.36)$$

όπου :  $\rho$  η ακτίνα καμπυλότητας του ΕΕΠ κατά την τομή του μεσημβρινού,  $N$  η ακτίνα καμπυλότητας του ΕΕΠ κατά τομή κάθετη με την προηγούμενη,  $A$  το αζιμούθιο της διεύθυνση κατά την οποία μετριέται το μήκος. Οι ακτίνες καμπυλότητας  $\rho$  και  $N$  ορίζονται στην ενότητα 1.3.3.

Εκτός της  $R$ , όπως ορίσθηκε με την προηγούμενη σχέση 3.36, κατά την μέτρηση του μήκους, σε μια περιοχή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και η μέση ακτίνα καμπυλότητας  $R_M$ , η οποία ορίζεται από την σχέση:

$$R_M = \sqrt{\rho \cdot N} \quad (3.37)$$

Στο GRS 80, που είναι το ΕΕΠ του Ελληνικού Γεωδαιτικού Συστήματος Αναφοράς (ΕΓΣΑ '87), οι παράμετροι που το ορίζουν, μεγάλος ημιάξονας και επιπλάτυση έχουν τις αντίστοιχες τιμές:  $a = 6378137.000m$ ,  $e = 0.081819191m$ . Από αυτές τις τιμές υπολογίζεται ότι ο μικρός ημιάξονας έχει τιμή  $b = 6356752.314m$ . Για τον Ελληνικό χώρο με βάση τις παραμέτρους του GRS 80 και για μέσο γεωδαιτικό πλάτος η  $R_M \approx 6371000m$ .



**Σχήμα 3.20** Αναγωγή του μήκους  $S'_{AB}$  στο μήκος  $d'_{AB}$  της επιφάνειας αναφοράς

Το μήκος  $S'_{AB}$ , λόγω της διάθλασης της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στην ατμόσφαιρα, μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι τόξο κύκλου κέντρου  $K$  και ακτίνας  $r$ . Αυτό το μήκος ανάγεται στο κεκλιμένο μήκος  $S_{AB}$ , όπως παρουσιάζεται στα επόμενα.

Με βάση την γεωμετρία ισχύει:

$$S'_{AB} = r \cdot \varphi$$

$$S_{AB} = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{\varphi}{2} \Rightarrow S_{AB} = 2 \cdot r \cdot \sin \frac{S'_{AB}}{2 \cdot r}$$

Αντικαθιστώντας το  $r$  ως συνάρτηση του συντελεστή γεωδαιτικής διάθλασης  $k$  και της ακτίνας καμπυλότητας  $R$  ( $r = R/k$ ) και μετά από ανάπτυξη του ημίτονου σε σειρά, κρατώντας τους δυο πρώτους όρους, η προηγούμενη σχέση μετασχηματίζεται ως εξής :

$$S_{AB} = S'_{AB} - \frac{k^2 \cdot S'^3_{AB}}{24 \cdot R^2} \quad (3.38)$$

Η διόρθωση λόγω της διάθλασης δίνεται από την σχέση :

$$\delta_{\Delta} = -\frac{k^2 \cdot S_{AB}^3}{24 \cdot R^2} \quad (3.39)$$

Αυτή η διόρθωση έχει νόημα ( $\delta_{\Delta} > 1\text{mm}$ ) για μήκη πάνω από 30km.

Για την αναγωγή του μήκους  $S_{AB}$  στο μήκος της χορδής της επιφάνειας αναφοράς  $d_{AB}$  (σχ. 3.20), από τα τρίγωνα  $(O A' B')$  και  $(O A_1 B_1)$ , εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων μετά από πράξεις προκύπτει:

$$d_{AB} = \sqrt{\frac{S_{AB}^2 - [(h_B + Y\Sigma) - (h_A + YO)]^2}{(1 + \frac{h_A + YO}{R}) \cdot (1 + \frac{h_B + Y\Sigma}{R})}} \quad \eta \quad (3.40)$$

$$d_{AB} = \sqrt{\frac{S_{AB}^2 - \Delta h_{A'B'}^2}{(1 + \frac{h_{A'}}{R}) \cdot (1 + \frac{h_{B'}}{R})}} \quad (3.41)$$

όπου:  $h_A, h_B$  τα γεωμετρικά υψόμετρα στα σημεία A, B αντίστοιχα,

$YO, Y\Sigma$  τα ύψη οργάνου και σκόλευσης αντίστοιχα.

Έτσι ισχύει  $h_{A'} = h_A + YO$  και  $h_{B'} = h_B + Y\Sigma$ . Η ακτίνα καμπυλότητας  $R$  κατά μήκος της γραμμής  $AB$  υπολογίζεται από τις σχέσεις 3.36 ή 3.37.

Τα γεωμετρικά υψόμετρα  $h$  υπολογίζονται από τα ορθομετρικά υψόμετρα  $H$  με βάση την σχέση της υψομετρίας  $h=H+N$ . Γι' αυτό τον λόγο πρέπει να είναι γνωστό το υψόμετρο του γεωειδούς  $N$  στην περιοχή. Στη περίπτωση που το  $N$  δεν είναι γνωστό, είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν τα ορθομετρικά υψόμετρα, εφόσον  $\Delta h_{A'B'} \cong \Delta H_{A'B'}$  και οι όροι στον παρονομαστή των σχέσεων 3.40 και 3.41 διαφέρουν ελάχιστα.

Η προηγούμενη σχέση 3.41 μπορεί να απλοποιηθεί περισσότερο αν θεωρηθεί το μέσο υψόμετρο μεταξύ των σημείων μέτρησης,  $h_m = \frac{h_{A'} + h_{B'}}{2}$ , οπότε γίνεται:

$$d_{AB} = \frac{R \cdot \sqrt{S_{AB}^2 - \Delta h_{A'B'}^2}}{R + h_m} \quad (3.42)$$

Επειδή  $\Delta h_{A'B'} \cong \Delta H_{A'B'}$ , το φυσικό νόημα της ποσότητας ( $\sqrt{S_{AB}^2 - \Delta h_{A'B'}^2}$ ) στον αριθμητή της σχέσης 3.42 είναι ότι αυτή αποτελεί το μήκος μεταξύ των σημείων  $A'$  και  $B'$ , πάνω στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο  $A'$ . Αυτό το μήκος συμπίπτει, με πολύ καλή προσέγγιση, με το μήκος  $D_{AB}$  μεταξύ των σημείων A και B, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο A (σχ. 3.20). Με βάση αυτή τη θεώρηση, μετασχηματίζοντας την σχέση 3.42 τελικά ισχύει:

$$\frac{d_{AB}}{R} = \frac{D_{AB}}{R + h_m} \quad (3.43)$$

Η προηγούμενη σχέση 3.43 δίνει την δυνατότητα, με πολύ καλή προσέγγιση, να αναχθεί στη χορδή  $d_{AB}$ , της επιφάνειας αναφοράς, το οριζόντιο μήκος  $D_{AB}$  μεταξύ των σημείων A και B, το οποίο προκύπτει από τις μετρήσεις που γίνονται στο ύπαιθρο (κεκλιμένο μήκος  $S_{AB}$  και κατακόρυφη γωνία  $Z_{AB}$ ). Το μέσο υψόμετρο μεταξύ των σημείων A και B,  $h_m$ , αν δεν είναι δυνατό να υπολογισθεί, μπορεί να εκτιμηθεί από χάρτη.

Το μήκος  $d_{AB}$  της χορδής της επιφάνειας αναφοράς ανάγεται στο μήκος  $d'_{AB}$  πάνω στην επιφάνεια αναφοράς ως εξής.

Με βάση τη γεωμετρία (σχ. 3.20) προκύπτει:

$$d'_{AB} = R \cdot \omega = 2 \cdot R \cdot \frac{\omega}{2} = 2 \cdot R \cdot \arcsin\left(\frac{d_{AB}}{2 \cdot R}\right)$$

Αναπτύσσοντας το  $\left(\arcsin\left(\frac{d_{AB}}{2 \cdot R}\right)\right)$  σε σειρά και κρατώντας τους δυο πρώτους όρους, τελικά προκύπτει:

$$d'_{AB} = d_{AB} + \frac{d_{AB}^3}{24 \cdot R^2} \quad (3.44)$$

Η διόρθωση λόγω της αναγωγής του μήκους στην επιφάνεια αναφοράς δίνεται από την σχέση:

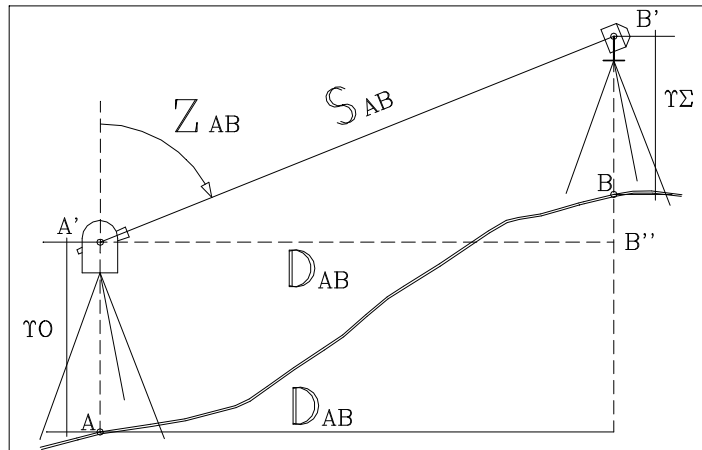
$$\delta_{EA} = \frac{d_{AB}^3}{24 \cdot R^2} \quad (3.45)$$

Η διόρθωση έχει νόημα ( $\delta_{EA} > 1\text{mm}$ ), για μήκη πάνω από 10 km.

- *Αναγωγή του κεκλιμένου μήκους στο οριζόντιο επίπεδο*

Σε απλές τοπογραφικές εργασίες (π.χ. αποτυπώσεις γηπέδων για μεταβίβαση, αποτύπωση οικοπέδων για την έκδοση οικοδομικών αδειών κλπ.), ή στις περιπτώσεις όπου χρησιμοποιείται αυθαίρετο τοπικό σύστημα αναφοράς (π.χ. μελέτη της κινηματικής συμπεριφοράς κτιρίου, γεωμετρική τεκμηρίωση αρχαιολογικών συνόλων κ.λπ.), η επιφάνεια αναφοράς είναι το οριζόντιο επίπεδο. Σε αυτές τις περιπτώσεις (σχ. 3.21) το μετρημένο κεκλιμένο μήκος  $S_{AB}$  ανάγεται στο οριζόντιο μήκος  $D_{AB}$  μετρώντας την κατακόρυφη γωνία  $Z_{AB}$ , με βάση τη επόμενη σχέση που προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο ( $A'B'B''$ ).

$$D_{AB} = S_{AB} \cdot \sin Z_{AB} \quad (3.46)$$



Σχήμα 3.21 Αναγωγή κεκλιμένου μήκους στο οριζόντιο επίπεδο

Αν είναι γνωστά τα ορθομετρικά υψόμετρα  $H_A$  και  $H_B$ , μετρώντας τα  $Y_O$  και  $Y_Σ$ , τότε  $H_{A'} = H_A + Y_O$  και  $H_{B'} = H_B + Y_Σ$ . Το οριζόντιο μήκος  $D_{AB}$  είναι δυνατό να υπολογισθεί από το πυθαγόρειο θεώρημα:

$$D_{AB} = \sqrt{S_{AB}^2 - \Delta H_{A'B'}^2} \quad (3.47)$$

Η διαφορά  $\delta$  του μήκους  $d_{AB}$  στην χορδή της επιφάνειας αναφοράς, που δίνεται από την σχέση 3.42, από το μήκος  $D_{AB}$ , που υπολογίζεται από την προηγούμενη σχέση 3.47, προσδιορίζεται ως εξής:

$$\frac{d_{AB}}{R} = \frac{D_{AB}}{R + h_m} = \frac{D_{AB} - d_{AB}}{h_m} \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{D_{AB} \cdot h_m}{(R + h_m)} \quad \text{ή} \quad \delta = \frac{h_m}{R + h_m} \cdot 10^6 \text{ σε ppm} \quad (3.48)$$

Έτσι για μέσο υψόμετρο  $h_m \approx 300\text{m}$ , σε μήκη της τάξης των  $D_{AB} \approx 100\text{m}$  θεωρώντας ότι  $R = 6371000\text{m}$ , η διαφορά  $\delta \approx 5\text{mm}$ . Επομένως παρουσιάζεται σφάλμα που μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι μέσα στον θόρυβο των μετρήσεων.

- *Αναγωγή του μήκους στο προβολικό επίπεδο*

Το προηγούμενο μήκος  $d'_{AB}$  ανάγεται στο μήκος  $D_{AB}^{\pi\rho}$  πάνω στο προβολικό επίπεδο με βάση τη σχέση :

$$D_{AB}^{\pi\rho} = d'_{AB} \cdot m \quad (3.49)$$

όπου :  $m$  είναι ο συντελεστής παραμόρφωσης λόγω της προβολής, ο οποίος για την περιοχή της Αττικής έχει τιμή  $m = 0.9996$ . Ο συντελεστής  $m$ , για μήκη μέχρι  $20\text{km} \div 25\text{km}$ , δίνεται από την σχέση :

$$m = 1 + [12311 \cdot (X - 0.5)^2 - 400] \cdot 10^{-6} \quad (3.50)$$

όπου :  $X$  η τετημημένη του μέσου της περιοχής των μετρήσεων σε  $Mm$ .

## ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ανακεφαλαιώνοντας παρουσιάζεται σε πίνακα η διαδοχή των διορθώσεων και αναγωγών, οι οποίες πρέπει να γίνονται σε ένα μήκος  $L'_{AB}$  που μετριέται στο ύπαιθρο, για να αναχθεί πάνω στο προβολικό επίπεδο ( $D_{AB}^{πρ}$ ). Σε αυτό το διάγραμμα γίνεται παραπομπή στις αντίστοιχες σχέσεις των διορθώσεων και αναγωγών.

Διορθώσεις του συστήματος όργανο - ανακλαστήρας	Διόρθωση λόγω σταθεράς του συστήματος (C)	Σχέση 3.23
	Διόρθωση λόγω κυκλικού σφάλματος ( $C_C$ )	Σχέση 3.25
	Διόρθωση λόγω μεταβολής της συχνότητας διαμόρφωσης ( $\delta f$ )	Σχέση 3.26
Μήκος	$L_{AB} = L'_{AB} + C_C + \delta f$	
Διορθώσεις λόγω της ατμόσφαιρας	Διόρθωση λόγω μείωσης της ισχύος της ακτινοβολίας	
	Διόρθωση ταχύτητας (πρώτη και δεύτερη) ( $C_1, C_2$ )	Σχέσεις 3.33,3.34
Μήκος	$S'_{AB} = L_{AB} + C_1 + C_2$	
Γεωμετρικές Αναγωγές	Αναγωγή του μήκους $S'_{AB}$ στην επιφάνεια αναφοράς ( $d'_{AB}$ )	Σχέση 3.44
	Αναγωγή του μήκους $d'_{AB}$ στο προβολικό επίπεδο ( $D_{AB}^{πρ}$ )	Σχέση 3.49

Πίνακας 3.1 Διορθώσεις και αναγωγές του μετρημένου μήκους  $L'_{AB}$  στο ύπαιθρο, στο μήκος  $D_{AB}^{πρ}$  πάνω στο προβολικό επίπεδο

### 3.6 ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

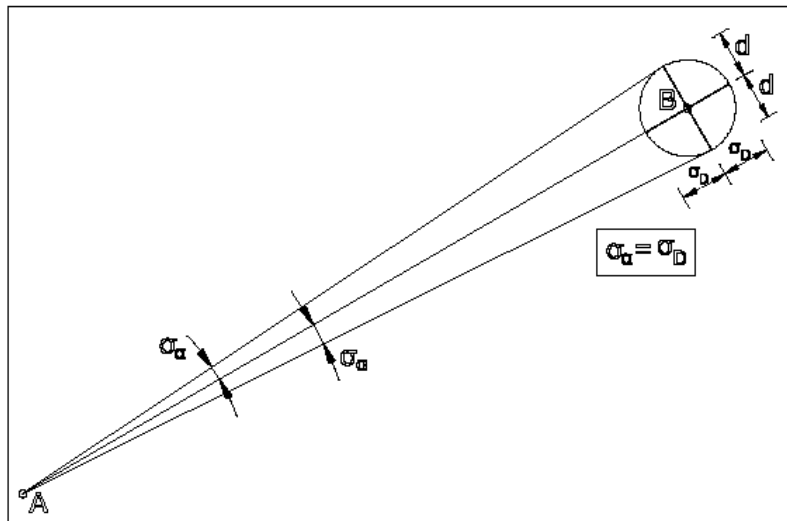
Όπως είναι γνωστό, με τους γεωδαιτικούς σταθμούς μετρώνται συγχρόνως οριζόντιες γωνίες και μήκη. Γι' αυτό τον λόγο, αποκτά ουσιαστικό ενδιαφέρον η διερεύνηση της ακρίβειας των συγκεκριμένων μετρούμενων στοιχείων (γωνίες, μήκη) με σκοπό, τόσο τον έλεγχο της ακρίβειας κάθε ενός μετρούμενου στοιχείου, όσο και τη σύγκριση των ακριβειών μεταξύ τους.

Για να γίνει αυτό δυνατό, θα πρέπει τα σφάλματα (γωνιακό και γραμμικό) να εκφραστούν με κοινό τρόπο, τόσο για τις μετρημένες οριζόντιες γωνίες όσο και για τα μετρημένα μήκη, **στην ίδια διεύθυνση**, έτσι ώστε να μπορούν να συγκριθούν. Αυτή η δυνατότητα επιτυγχάνεται με την μετατροπή του γωνιακού σφάλματος σε

γραμμική απόκλιση. Υπενθυμίζεται ότι το γραμμικό σφάλμα είναι ήδη γραμμική απόκλιση.

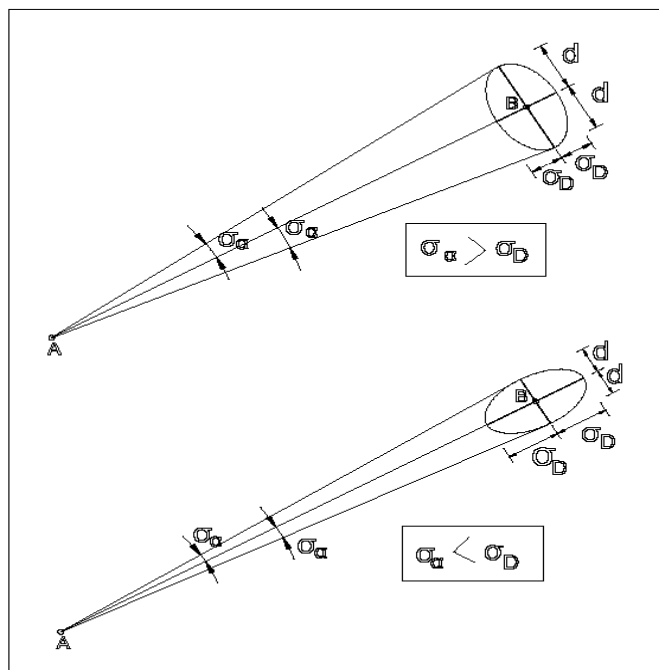
Έτσι, για την περίπτωση της οριζόντιας γωνιακής ανάγνωσης στην διεύθυνση, το σφάλμα μετατρέπεται σε γραμμική απόκλιση κατά την οριζόντια έννοια, κάθετα στην διεύθυνση, πάνω στο οριζόντιο επίπεδο. Στη συνέχεια, αυτή η γραμμική απόκλιση μετατρέπεται σε αναλογικό σφάλμα, όπως επίσης σε αναλογικό σφάλμα μετατρέπεται και το γραμμικό σφάλμα, που είναι γραμμική απόκλιση στην ίδια διεύθυνση.

Όπως φαίνεται και στο παράδειγμα που ακολουθεί, το αναλογικό σφάλμα του γωνιακού μεγέθους στην διεύθυνση, είναι το αντίστοιχο γωνιακό σφάλμα εκφρασμένο σε ακτίνια (rad). Εκφράζοντας τα παραπάνω αναλογικά σφάλματα σε μέρη στο εκατομμύριο (parts per million – p.p.m.), έχουμε την δυνατότητα να εκτιμήσουμε άμεσα την τάξη μεγέθους τους και να συγκρίνουμε την ακρίβεια μεταξύ των μετρημένων μεγεθών



Σχήμα 3.22. Αρμονική ακρίβεια

Αν η τάξη μεγέθους των σφαλμάτων, εκφρασμένων σε p.p.m., είναι ίδια, τότε έχουμε **αρμονική ακρίβεια** (σχήμα 3.22). Αν η τάξη μεγέθους των σφαλμάτων είναι ίδια αλλά μεγάλη, τότε έχουμε **μικρή αρμονική ακρίβεια**. Αν η τάξη μεγέθους των σφαλμάτων είναι ίδια αλλά μικρή, τότε έχουμε **μεγάλη αρμονική ακρίβεια**. Τέλος, αν η τάξη μεγέθους των σφαλμάτων διαφέρει, τότε **δεν υπάρχει αρμονική ακρίβεια** μεταξύ των μετρημένων μεγεθών (σχήμα 3.23).

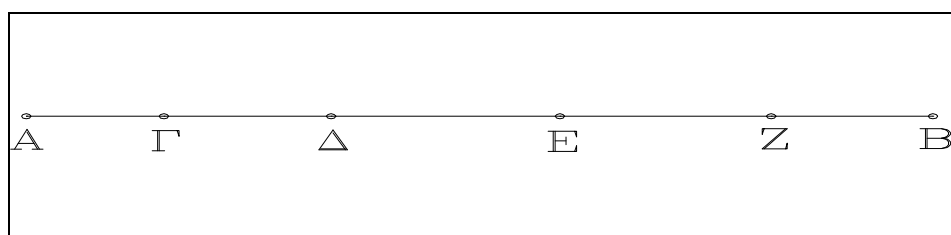


**Σχήμα 3.23** Σύγκριση ακρίβειας γωνιακού και γραμμικού μεγέθους

Σχετικά με την έκφραση των σφαλμάτων σε μέρη στο εκατομμύριο (p.p.m.), θα πρέπει να επισημάνουμε ότι, αν θεωρήσουμε ως μέρος το 1 mm, τότε το σφάλμα σε (p.p.m.) αντιπροσωπεύει (mm) στο 1 km. Πιο συγκεκριμένα, το σφάλμα στο μήκος της πλευράς σε (p.p.m.) αντιπροσωπεύει τα (mm) του σφάλματος σε μήκος 1 km κατά την διεύθυνση αυτής της πλευράς (π.χ. σφάλμα μήκους 15 ppm αντιπροσωπεύει σφάλμα 15mm στο 1km). Το σφάλμα της οριζόντιας γωνιακής ανάγνωσης σε μια διεύθυνση, όταν εκφράζεται σε (p.p.m.), αντιπροσωπεύει τα (mm) της γραμμικής απόκλισης, σε μήκος 1 km, κατά την κάθετη έννοια σε αυτή την διεύθυνση (π.χ. 30 p.p.m. σφάλμα γωνιακού μεγέθους σε μια διεύθυνση αντιπροσωπεύει γραμμική απόκλιση 30mm σε απόσταση 1km, κατά την κάθετη στη συγκεκριμένη διεύθυνση).

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- Για τον προσδιορισμό της σταθεράς C ενός συστήματος (όργανο + ανακλαστήρας) μετρήθηκε, με το συγκεκριμένο σύστημα, το οριζόντιο μήκος της βάσης AB,  $D_{AB}$ . Στη συνέχεια έγινε πύκνωση της βάσης AB με τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ και μετρήθηκαν τα επόμενα οριζόντια μήκη με τα αντίστοιχα αποτελέσματα (Μέθοδος της πολλαπλής βάσης) (σχ. 3.24).



**Σχήμα 3.24** Βάση προσδιορισμού σταθεράς οργάνου – καταφώτου.



	$D_{AG} = 73.428\text{m}$	$D_{BG} = 410.123\text{m}$
$D_{AB} = 483.542\text{m}$	$D_{AD} = 162.571\text{m}$	$D_{BD} = 320.998\text{m}$
	$D_{AE} = 284.603\text{m}$	$D_{EB} = 198.971\text{m}$
	$D_{AZ} = 397.284\text{m}$	$D_{ZB} = 86.283\text{m}$

Η ακρίβεια της μέτρησης του συγκεκριμένου συστήματος δίνεται από τον κατασκευαστή ότι είναι  $\sigma_D = \pm(3\text{mm} + 2\text{ppm})$ . Τα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι διορθωμένα από τις μετεωρολογικές συνθήκες και ανηγμένα στο οριζόντιο επίπεδο. Ζητείται να υπολογισθεί η στατιστικά σημαντική σταθερά του συστήματος C και η τυπική της απόκλιση  $\sigma_C$ .

Με βάση τις μετρήσεις που έγιναν, ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

$$483.542 + C = (73.428 + C) + (410.133 + C) \Rightarrow C = -0.019\text{m}$$

$$483.542 + C = (162.571 + C) + (320.998 + C) \Rightarrow C = -0.027\text{m}$$

$$483.542 + C = (284.603 + C) + (198.961 + C) \Rightarrow C = -0.022\text{m}$$

$$483.542 + C = (397.284 + C) + (86.283 + C) \Rightarrow C = -0.025\text{m}$$

Η σταθερά του συστήματος υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των προηγούμενων τιμών ως εξής:

$$C = \frac{(-0.019) + (-0.027) + (-0.022) + (-0.025)}{4} = -0.023\text{m} = -23\text{mm}$$

Η ακρίβεια της μέτρησης υπολογίζεται από την σχέση που δίνεται από τον κατασκευαστή, έτσι  $\sigma_D = \pm\sqrt{3^2 + (2.0 \cdot 484)^2} = \pm 3\text{mm}$ . Αν η προσδιοριζόμενη σταθερά του συστήματος είναι μικρότερη από την ακρίβεια μέτρησης τότε η σταθερά βρίσκεται μέσα στον θόρυβο των μετρήσεων και θεωρείται ότι δεν είναι στατιστικά σημαντική.

Επειδή ισχύει  $|C| = 23\text{mm} > |\sigma_D| = 3\text{mm}$  η εκτιμώμενη σταθερά C είναι στατιστικά σημαντική. Η αβεβαιότητα της υπολογίζεται με βάση την σχέση που δίνεται στην ενότητα 1.2.4 ως εξής:

$$\sigma_C = \pm\sqrt{\frac{(-0.019 + 0.023)^2 + (-0.027 + 0.023)^2 + (-0.022 + 0.023)^2 + (-0.025 + 0.023)^2}{5 \cdot (5-1)}}$$

άρα  $\sigma_C = \pm 1.4\text{mm}$

• Για τον προσδιορισμό της σταθεράς C ενός συστήματος (όργανο + ανακλαστήρας) μετρήθηκε το οριζόντιο μήκος της βάσης AB,  $D_{AB}$ , με ένα όργανο πολύ υψηλής ακρίβειας (όργανο μηδενικής τάξης). Στη συνέχεια έγινε πύκνωση της βάσης AB με τα σημεία Γ, Δ, Ε, Ζ (σχ. 3.24) και μετρήθηκαν τα επόμενα οριζόντια μήκη με τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

	$D_{AG} = 84.428\text{m}$	$D_{BG} = 421.111\text{m}$
$D_{AB} = 505.531\text{m}$	$D_{AD} = 173.561\text{m}$	$D_{BD} = 331.980\text{m}$
	$D_{AE} = 295.603\text{m}$	$D_{EB} = 209.939\text{m}$
	$D_{AZ} = 408.288\text{m}$	$D_{ZB} = 97.249\text{m}$

Η ακρίβεια της μέτρησης του ελεγχόμενου συστήματος δίνεται από τον κατασκευαστή ότι είναι  $\sigma_D = \pm(5\text{mm} + 5\text{ppm})$ . Τα αποτελέσματα των μετρήσεων είναι διορθωμένα από τις μετεωρολογικές συνθήκες και ανηγμένα στο οριζόντιο επίπεδο. Ζητείται να υπολογισθεί η στατιστικά σημαντική σταθερά του συστήματος C και η τυπική της απόκλιση  $\sigma_C$ .

Με βάση τις μετρήσεις που έγιναν, είναι φανερό ότι ισχύουν οι επόμενες ισότητες:

$$505.531 = (84.428 + C) + (421.111 + C) \Rightarrow C = -0.004\text{m}$$

$$505.531 = (173.561 + C) + (331.980 + C) \Rightarrow C = -0.005\text{m}$$

$$505.531 = (295.603 + C) + (209.939 + C) \Rightarrow C = -0.006\text{m}$$

$$505.531 = (408.288 + C) + (97.249 + C) \Rightarrow C = -0.003\text{m}$$

$$C = \frac{(-0.004) + (-0.005) + (-0.006) + (-0.003)}{4} = -0.005\text{m} = -5\text{mm}$$

Η ακρίβεια μέτρησης υπολογίζεται από την σχέση που δίνεται από τον κατασκευαστή ότι είναι  $\sigma_D = \pm\sqrt{5^2 + (5 \cdot 0.506)^2} = \pm 6\text{mm}$ .

Επειδή ισχύει  $|C| = 5\text{mm} < |\sigma_D| = 6\text{mm}$  η εκτιμώμενη σταθερά C δεν είναι στατιστικά σημαντική, άρα θεωρείται ότι  $C = 0$ . Επομένως δεν έχει νόημα ο υπολογισμός της τυπικής απόκλισης  $\sigma_C$ .

- Για τον έλεγχο του κυκλικού σφάλματος ενός συστήματος (όργανο – ανακλαστήρας), ακρίβειας μέτρησης  $\sigma_D = \pm(3\text{mm} + 2\text{ppm})$ , μετρήθηκαν με αυτό τα μήκη με τιμές  $L'$ . Τα ίδια μήκη μετρήθηκαν και με όργανο μεγαλύτερης ακρίβειας με αποτελέσματα L. Οι τιμές L και  $L'$  δίνονται στον επόμενο πίνακα.

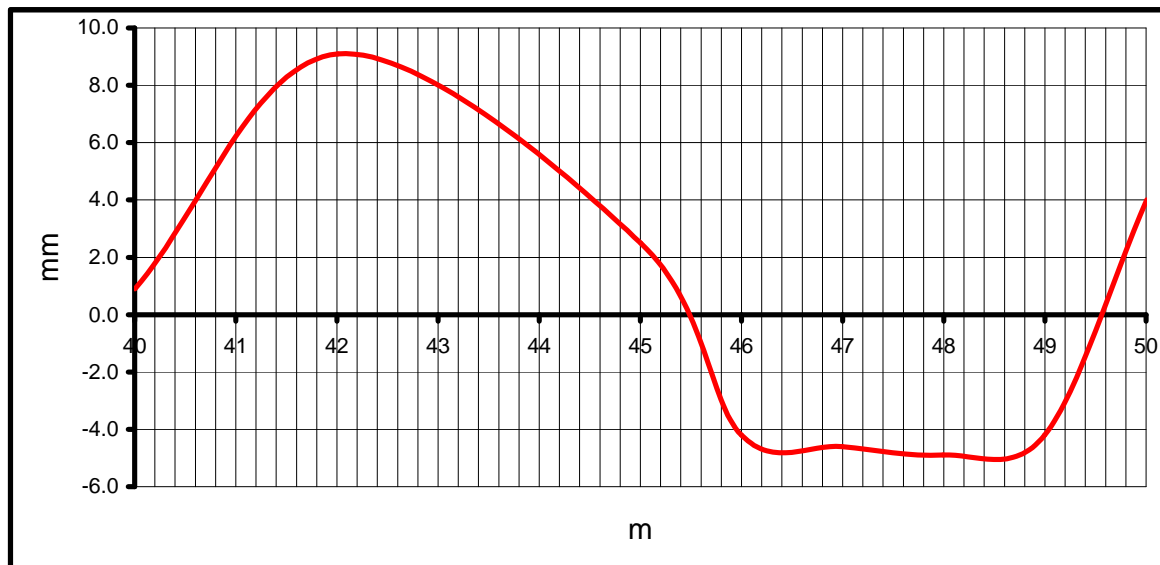
Να προσδιορισθεί η καμπύλη του κυκλικού σφάλματος του συστήματος. Με αυτό το σύστημα μετρήθηκε το μήκος  $L' = 682.192\text{m}$ , να υπολογισθεί η διόρθωση  $C_C$  του μήκους λόγω του κυκλικού σφάλματος.

Με βάση τις μετρήσεις  $L'$ , L που έχουν γίνει, υπολογίζονται τα σφάλματα  $y = L' - L$ , τα οποία δίνονται στον επόμενο πίνακα.

$L'$ (m)	L (m)	y (mm)
40.002	40.0011	0.9
42.008	41.9989	9.1
45.003	45.0005	2.5
45.999	46.0032	-4.2
46.996	47.0006	-4.6
47.995	47.9999	-4.9
48.996	49.0002	-4.2
50.005	50.0010	4.0

**Πίνακας 3.2** Μετρήσεις για τον προσδιορισμό του κυκλικού σφάλματος

Στη συνέχεια σχεδιάζεται η καμπύλη του κυκλικού σφάλματος στο επίπεδο  $L'$  (m) και y (mm), η οποία δίνεται στο επόμενο διάγραμμα 3.1.



**Διάγραμμα 3.1** Καμπύλη κυκλικού σφάλματος

Η καμπύλη του κυκλικού σφάλματος του συστήματος υπολογιζόμενη με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων δίνεται από την σχέση :

$$y = 0.002 + 0.008 \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{20} \cdot L'\right)$$

Από την προηγούμενη σχέση υπολογίζεται το σφάλμα για το μήκος  $L' = 682.192\text{m}$  :

$$y = 0.002 + 0.008 \cdot \sin\left(\frac{4\pi}{20} \cdot 682.192\right) \Rightarrow y = 0.0099\text{m}.$$

Με βάση το διάγραμμα 3.1, το κυκλικό σφάλμα του μήκους  $L' = 682.192\text{m}$  προσδιορίζεται από το σφάλμα  $y$ , που αντιστοιχεί στο μήκος  $2.192\text{m}$  ( $= 682.192 - 680.000$ ), δηλαδή στο τμήμα του μετρημένου μήκους  $L'$ , που βρίσκεται μέσα στο διάστημα  $(0, \lambda_m / 2)$ . Με γραμμική παρεμβολή από το διάγραμμα 3.1 εκτιμάται ότι  $y = 0.009\text{m}$ , τιμή που είναι παραπλήσια με την υπολογιζόμενη από την προηγούμενη σχέση.

Επομένως η διόρθωση  $C_C$ , λόγω του κυκλικού σφάλματος, είναι τελικά  $C_C = -0.010\text{m}$ . Η διόρθωση είναι στατιστικά σημαντική αφού ισχύει:  $|C_C| > |\sigma_D| \cong 0.003\text{m}$ .

- Ένας γεωδαιτικός σταθμός, με μήκος κύματος φέρουσας υπέρυθρης ακτινοβολίας  $\lambda = 0.85\mu\text{m}$ , χρησιμοποιήθηκε για την μέτρηση του μήκους  $L_{AB} = 2358.473\text{m}$ . Το όργανο είχε βαθμονομηθεί σε εργαστηριακές συνθήκες : θερμοκρασία ξηρού αέρα  $t = 12^\circ\text{C}$  και ατμοσφαιρική πίεση  $P = 1013\text{mbar}$ . Κατά την διάρκεια της μέτρησης του μήκους τα μέσα μετεωρολογικά στοιχεία μεταξύ των σημείων A και B εκτιμήθηκαν ότι ήταν : θερμοκρασία ξηρού αέρα  $t = 30^\circ\text{C}$ , θερμοκρασία υγρού αέρα  $t_W = 25^\circ\text{C}$  και ατμοσφαιρική πίεση  $P = 1030\text{mbar}$ . Δίνεται ο συντελεστής διάθλασης  $k = 0.16$ .

Να υπολογισθεί η πρώτη διόρθωση ταχύτητας  $C_1$  και να συγκριθεί με αυτή που προκύπτει από το νομογράφημα που δίνει ο κατασκευαστής. Να υπολογισθεί η δεύτερη διόρθωση ταχύτητας  $C_2$ . Να υπολογισθεί το τελικά διορθωμένο μήκος  $S'_{AB}$ .

Υπολογίζεται η πίεση των υδρατμών  $e$  :

$$\log e_S = \frac{7.5 \cdot t_W}{t_W + 237.3} + 0.7857 \Rightarrow \log e_S = \frac{7.5 \cdot 25}{25 + 237.3} + 0.7857 \Rightarrow e_S = 31.66 \text{ mbar}$$

$$e = e_S - 0.000662 \cdot P \cdot (t - t_W) \Rightarrow e = 31.66 - 0.000662 \cdot 1030 \cdot (30 - 25) \Rightarrow e = 28.25 \text{ mbar}$$

Υπολογίζεται η διαθλασιμότητα  $N_g$  για κανονικές συνθήκες ατμόσφαιρας:

$$N_g = 287.604 + \frac{3 \cdot 1.6288}{\lambda^2} + \frac{5 \cdot 0.0136}{\lambda^4} \Rightarrow N_g = 287.604 + \frac{3 \cdot 1.6288}{0.85^2} + \frac{5 \cdot 0.0136}{0.85^4}$$

$$N_g = 294.497$$

Υπολογίζονται οι διαθλασιμότητες  $N'_g$  και  $N''_g$  για τις συνθήκες βαθμονόμησης του οργάνου και μέτρησης του μήκους αντίστοιχα:

$$N'_g = \frac{N_g \cdot Q \cdot P}{T} - \frac{V \cdot e}{T} \Rightarrow N'_g = \frac{294.497 \cdot 0.2696 \cdot 1013}{273.15 + 12} - \frac{15.02 \cdot 28.25}{273.15 + 12} \Rightarrow N'_g = 280.57$$

$$N''_g = \frac{N_g \cdot Q \cdot P}{T} - \frac{V \cdot e}{T} \Rightarrow N''_g = \frac{294.497 \cdot 0.2696 \cdot 1030}{273.15 + 30} - \frac{15.02 \cdot 28.25}{273.15 + 30} \Rightarrow N''_g = 268.36$$

Τελικά  $C_1 = 280.57 - 268.36 = 12.21 \text{ ppm}$  ή  $C_1 = 28.8 \text{ mm}$ .

Από το αντίστοιχο νομογράφημα του κατασκευαστή προσδιορίζεται η  $C_1 = 12.5 \text{ ppm}$ , η οποία ελάχιστα διαφέρει από την υπολογιζόμενη.

Υπολογίζεται η δεύτερη διόρθωση ταχύτητας :

$$C_2 = -(k - k^2) \cdot \frac{L_{AB}^3}{12 \cdot R^2} \Rightarrow C_2 = -(0.16 - 0.16^2) \cdot \frac{2358.473^3}{12 \cdot 6371000^2} \Rightarrow C_2 = -0.0036 \text{ mm}$$

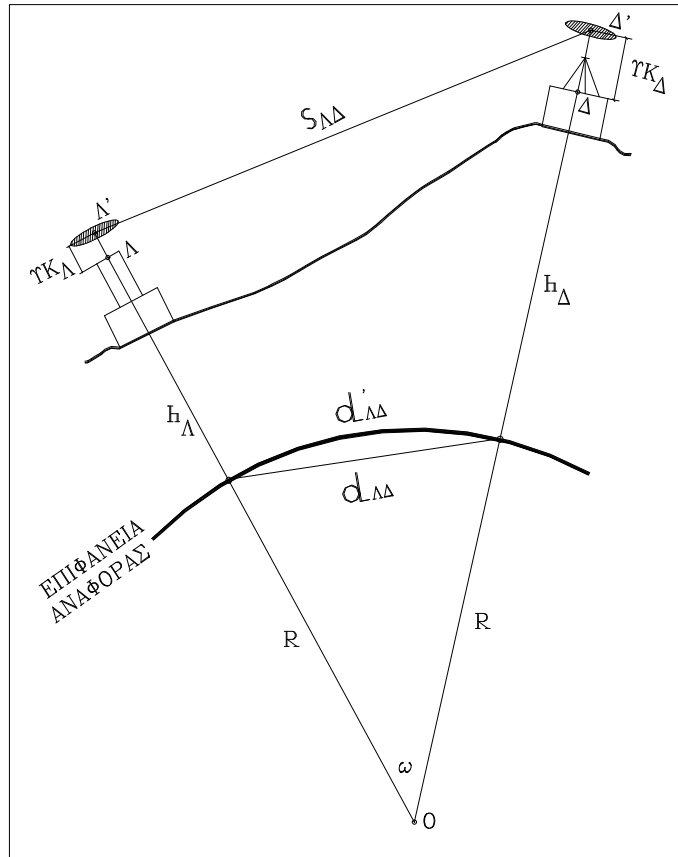
Επομένως αυτή η διόρθωση είναι αμελητέα.

Υπολογίζεται το τελικά διορθωμένο μήκος:

$$S'_{AB} = 2358.473 + 0.0288 = 2358.502 \text{ m}$$

• Με το σύστημα δορυφορικού εντοπισμού GPS μετρήθηκε μια βάση από το τριγωνομετρικό σημείο «Λαμπαδάριος» στο σημείο «Δροσιά», όπως φαίνεται στο σχήμα (3.25). Οι συντεταγμένες της βάσης στο WGS84 υπολογίσθηκαν  $\Delta X = -11208.821 \text{ m}$ ,  $\Delta Y = 2882.974 \text{ m}$  και  $\Delta Z = 11909.532 \text{ m}$ . Τα γεωμετρικά υψόμετρα των σημείων προσδιορίσθηκαν  $h_A = 215.890 \text{ m}$  και  $h_B = 388.235 \text{ m}$ . Τα ύψη κεραιάς στα σημεία μετρήθηκαν  $YK_A = 0.252 \text{ m}$  μέχρι τη στέψη του

βάθρου και  $ΥΚ_{\Delta} = 1.534\text{m}$  μέχρι το έδαφος. Να προσδιορισθεί το μήκος της βάσης  $D_{\Delta\Delta}^{\pi\rho}$  στο προβολικό επίπεδο.



Σχήμα 3.25 Μέτρηση της βάσης «Λαμπαδάριος» - «Δροσιά» (Λ-Δ)

#### Υπολογισμός του κεκλιμένου μήκους

Από το πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζεται απευθείας το κεκλιμένο μήκος, το οποίο είναι φανερό ότι δεν διορθώνεται από διάθλαση.

$$S_{\Delta\Delta} = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} = \sqrt{(-11208.821)^2 + (2882.974)^2 + (11909.532)^2} \Rightarrow S_{\Delta\Delta} = 16606.811\text{m}$$

#### Υπολογισμός της ακτίνας R

Από χάρτη εκτιμάται το μέσο  $\varphi$  μεταξύ των σημείων μέτρησης  $\varphi = 38^\circ 03'$ , οπότε:

$$\rho = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{3/2}} \Rightarrow \rho = 6359683.875\text{m}$$

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \cdot \sin^2 \varphi)^{1/2}} \Rightarrow N = 6386262.625\text{m}$$

$$R = \sqrt{\rho \cdot N} \Rightarrow R = 6372959.394\text{m}$$

#### Υπολογισμός του μήκους $d_{\Delta\Delta}$ της χορδής της επιφάνειας αναφοράς

Από την σχέση 3.40 προκύπτει:

$$d_{\Lambda\Lambda} = \sqrt{\frac{S_{\Lambda\Lambda}^2 - [(h_{\Delta} + YK_{\Delta}) - (h_{\Lambda} + YK_{\Lambda})]^2}{(1 + \frac{h_{\Lambda} + YK_{\Lambda}}{R}) \cdot (1 + \frac{h_{\Delta} + YK_{\Delta}}{R})}} \Rightarrow$$

$$d_{\Lambda\Lambda} = \sqrt{\frac{16606.811^2 - [(388.235 + 1.534) - (215.890 + 0.252)]^2}{(1 + \frac{215.890 + 0.252}{6372959.394}) \cdot (1 + \frac{388.235 + 1.534}{6372959.394})}} \Rightarrow$$

$$d_{\Lambda\Lambda} = 16605.114 \text{ m}$$

Υπολογισμός του μήκους  $d'_{\Lambda\Lambda}$  στην επιφάνεια αναφοράς

Από τη σχέση 3.44 προκύπτει:

$$d'_{\Lambda\Lambda} = d_{\Lambda\Lambda} + \frac{d_{\Lambda\Lambda}^3}{24R^2} \Rightarrow d'_{\Lambda\Lambda} = 16605.114 + \frac{16605.114^3}{24 \cdot 6372959.394^2}$$

$$d'_{\Lambda\Lambda} = 16605.119 \text{ m}$$

Υπολογισμός του μήκους  $D_{\Lambda\Lambda}^{\pi\rho}$  στην επιφάνεια προβολής

Από την σχέση 3.49 προκύπτει:

$$D_{\Lambda\Lambda}^{\pi\rho} = 0.9996 \times 16605.119 = 16598.477 \text{ m}$$

Αν χρησιμοποιηθεί η προσεγγιστική σχέση 3.45 για τον υπολογισμό του μήκους στην επιφάνεια αναφοράς προκύπτει:

$$h_m = \frac{(215.890 + 0.252) + (388.235 + 1.534)}{2} \Rightarrow h_m = 302.956 \Rightarrow h_m \approx 303 \text{ m}$$

Για τον υπολογισμό του μήκους πάνω στο οριζόντιο επίπεδο, που περνά από το σημείο  $\Lambda'$ , ισχύει:

$$D_{\Lambda\Lambda} = \sqrt{S_{\Lambda\Lambda}^2 - \Delta h_{\Lambda'\Delta'}^2} \Rightarrow D_{\Lambda\Lambda} = \sqrt{16606.811^2 - [(388.235 + 1.534) - (215.890 + 0.252)]^2} \Rightarrow$$

$$D_{\Lambda\Lambda} = 16605.903 \text{ m}$$

Για τον υπολογισμό του μήκους στη χορδή της επιφάνειας αναφοράς ισχύει:

$$d_{\Lambda\Lambda} = \frac{R \cdot D_{\Lambda\Lambda}}{R + h_m} \Rightarrow d_{\Lambda\Lambda} = \frac{6372959.394 \times 16605.903}{6372959.394 + 303} \Rightarrow$$

$$d_{\Lambda\Lambda} = 16605.114 \text{ m}$$

Παρατηρείται ότι το προηγούμενο μήκος που υπολογίζεται με την προσεγγιστική σχέση 3.45, ταυτίζεται με το αντίστοιχο μήκος στην χορδή που υπολογίζεται από την σχέση 3.41. Επίσης παρατηρείται ότι αυτό το μήκος, διαφέρει μόνο 5mm ή 0.3ppm από το μήκος στην επιφάνεια αναφοράς. Επομένως είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί η προσεγγιστική σχέση 3.45 για τον υπολογισμό του μήκους απ' ευθείας πάνω στην επιφάνεια αναφοράς.

- Μήκος AB τάξης 700m μετρήθηκε με όργανο ακρίβειας – σύμφωνα με τον κατασκευαστή  $\pm(5\text{mm}+5\text{ppm})$ . Να εκφρασθεί η ακρίβεια στη μέτρηση του μήκους σε αναλογική μορφή και σε ppm. Στη συνέχεια να συγκριθεί με το γωνιακό σφάλμα στη διεύθυνση AB το οποίο εκτιμήθηκε  $\sigma_\alpha = \pm 10^{\text{cc}}$ .

Η ακρίβεια  $\sigma_D$  στη μέτρηση του μήκους AB είναι :

$$\sigma_D = \pm \sqrt{(5\text{mm})^2 + \left(5 \cdot \frac{700000}{1000000}\right)^2} = \pm 6\text{mm}$$

Η ακρίβεια αυτή εκφρασμένη σε αναλογική μορφή είναι :

$$\frac{\sigma_D}{D} = \frac{6}{700000} = 0.00001 \cong \frac{1}{100000}, \text{ ενώ εκφρασμένη σε p.p.m. είναι :}$$

$$\frac{\sigma_D}{D} = \frac{6}{700000} \cdot 10^6 \cong 10\text{p.p.m.}$$

Η γραμμική απόκλιση  $d$  κάθετα στη διεύθυνση AB εξαιτίας του γωνιακού σφάλματος  $\sigma_\alpha = \pm 10^{\text{cc}}$  είναι :

$$d = D_{AB} \cdot \tan(\sigma_\alpha) = 11\text{mm.}$$

Η απόκλιση αυτή εκφρασμένη σε αναλογική μορφή και στη συνέχεια σε p.p.m. είναι :

$$\frac{d}{D_{AB}} = \tan(\sigma_\alpha) \cong \sigma_\alpha^{\text{rad}} = \frac{\sigma_\alpha^{\text{cc}}}{\rho^{\text{cc}}} = 1.6 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 16\text{p.p.m.}$$

Από τη σύγκριση των δυο σφαλμάτων (γωνιακού και γραμμικού) εκφρασμένων σε p.p.m. διαπιστώνεται ότι δεν υπάρχει αρμονική ακρίβεια, αφού :  
10p.p.m. < 16p.p.m.

- Για τον υπολογισμό των συντεταγμένων των σημείων B, Γ από γνωστό σημείο A πρόκειται να μετρηθούν τα μήκη AB και BΓ (τάξης μεγέθους 300m) καθώς και η οριζόντια γωνία ABΓ σε δύο πλήρεις περιόδους ( $n = 2$ ). Οι μετρήσεις πρόκειται να γίνουν με Γεωδαιτικό Σταθμό με τα εξής χαρακτηριστικά (σύμφωνα με τον κατασκευαστή):

Ακρίβεια στη μέτρηση μηκών :  $\pm(3\text{mm} + 2\text{ppm})$

Μεγέθυνση  $M = 30X$

Εναισθησία αεροστάθμης  $60^{\text{cc}}$

Απόδοση  $15^{\text{cc}}$

Εκτιμάται ότι η αβεβαιότητα στην κέντρωση των στόχων στα A και Γ καθώς και στην κέντρωση του οργάνου στην κορυφή B θα είναι της τάξης των  $\pm 3\text{mm}$ , ενώ οι κατακόρυφες γωνίες προς τα A και Γ είναι της τάξης  $Z_{BA} = 95^\circ$  και  $Z_{B\Gamma} = 110^\circ$ .

Να διερευνηθεί αν υπάρχει αρμονική ακρίβεια στη μέτρηση των γραμμικών και γωνιακών μεγεθών.

Η ακρίβεια στη μέτρηση των πλευρών AB και BΓ είναι:

$$\sigma_{AB} = \sigma_{B\Gamma} = \pm \sqrt{(3)^2 + (2 \cdot 300000/1000000)^2} = \sqrt{(3)^2 + (2 \cdot 0.3)^2} = \pm 2\text{mm}. \quad \text{H}$$

ακρίβεια αυτή εκφρασμένη σε p.p.m. είναι :

$$\sigma_{D,\text{ppm}} = \frac{\sigma_D(\text{mm})}{D(\text{mm})} \cdot 10^6 = \frac{2\text{mm}}{300000\text{mm}} \cdot 10^6 \cong 7\text{ppm}$$

Από τις σχέσεις (2.23), (2.24), (2.25), (2.26) και (2.27) υπολογίζεται η ακρίβεια  $\sigma_{AB\Gamma}$  στη μέτρηση της οριζόντιας γωνίας :

$$\sigma_{AB\Gamma} = \pm \sqrt{\sigma_{\beta_C}^2 + \sigma_{\beta_L}^2 + \sigma_{\beta_P}^2 + \sigma_{\beta_r}^2}, \text{ όπου :}$$

$$\sigma_{\beta_C} = \pm \frac{2 \cdot \sigma_C}{D} \cdot \rho^{cc} = \pm \frac{2 \cdot 3}{300000} \cdot \rho^{cc} = \pm 13^{cc},$$

$$\sigma_{\beta_L} = \pm 0.2 \cdot \varepsilon^{cc} \cdot \sqrt{\cot^2 Z_{BA} + \cot^2 Z_{B\Gamma}} = \pm 2^{cc},$$

$$\sigma_{\beta_P} = \pm \frac{\sigma_P}{\sqrt{n}} = \pm \frac{150^{cc}}{30 \cdot \sqrt{2}} \cong \pm 4^{cc}, \text{ και}$$

$$\sigma_{\beta_r} = \pm \frac{\sigma_r}{\sqrt{n}} = \pm \frac{2.5 \cdot 15^{cc}}{\sqrt{2}} \cong \pm 27^{cc}.$$

$$\text{Αρα : } \sigma_{AB\Gamma} = \pm \sqrt{\sigma_{\beta_C}^2 + \sigma_{\beta_L}^2 + \sigma_{\beta_P}^2 + \sigma_{\beta_r}^2} = \pm \sqrt{(13)^2 + (2)^2 + (4)^2 + (27)^2} = \pm 30^{cc}$$

Για να ελεγχθεί η ύπαρξη ή μη αρμονικής ακρίβειας πρέπει να υπολογισθεί η ακρίβεια σε κάθε μια από τις δύο σκοπευόμενες διευθύνσεις. Δεδομένου ότι η οριζόντια γωνία  $AB\Gamma$  προκύπτει σαν διαφορά δύο διευθύνσεων, ισχύει :

$$\sigma_{AB\Gamma}^2 = \sigma_{BA}^2 + \sigma_{B\Gamma}^2$$

όπου :  $\sigma_{BA}$ ,  $\sigma_{B\Gamma}$  η γωνιακή ακρίβεια σε κάθε μια από τις δύο σκοπευόμενες διευθύνσεις  $BA$ ,  $B\Gamma$ .

Δεδομένου ότι τα μήκη  $AB$  και  $B\Gamma$  είναι ίσα, ισχύει  $\sigma_{BA} = \sigma_{B\Gamma}$ , οπότε :

$$\sigma_{AB\Gamma} = \pm \sqrt{2 \cdot \sigma_{BA}^2} \Rightarrow \sigma_{AB\Gamma} = \pm \sigma_{BA} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{BA} = \pm \frac{\sigma_{AB\Gamma}}{\sqrt{2}} = \pm \frac{30^{cc}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sigma_{BA} = \pm 21^{cc}.$$

Η ακρίβεια  $\sigma_{BA}$  εκφρασμένη σε rad είναι :

$$\sigma_{BA}^{rad} = \pm \frac{\sigma_{BA}^{cc}}{\rho^{cc}} = \pm 3.30 \cdot 10^{-5} \text{ rad}, \text{ ενώ εκφρασμένη σε p.p.m. είναι :}$$

$$\sigma_{BA,ppm} = (3.30 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^6 = 33ppm$$

Επομένως δεν υπάρχει αρμονική ακρίβεια στη μέτρηση των γραμμικών και γωνιακών μεγεθών αφού :

$$\sigma_{D,ppm} = 7ppm < \sigma_{BA,ppm} = 33ppm$$

Για να υπάρχει αρμονική ακρίβεια θα πρέπει  $\sigma_{D,ppm} = \sigma_{BA,ppm}$ . Επειδή δε, όπως αναφέρθηκε παραπάνω επιδιώκεται η αρμονική ακρίβεια να είναι όσο το δυνατόν πιο μικρή θα πρέπει  $\sigma_{D,ppm} = \sigma_{BA,ppm} = 7ppm$  και όχι  $\sigma_{D,ppm} = \sigma_{BA,ppm} = 33ppm$ . Από την ισότητα αυτή μπορούμε να εκτιμήσουμε την ακρίβεια με την οποία πρέπει να μετρηθεί η οριζόντια γωνία έτσι ώστε να επιτυγχάνεται η αλαίτηση σε αρμονική ακρίβεια. Έτσι :

$$\sigma_{BA} = 7ppm \Rightarrow \sigma_{BA}^{rad} = \pm 7 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \sigma_{BA}^{cc} = (\pm 7 \cdot 10^{-6}) \cdot \rho^{cc} \Rightarrow \sigma_{BA}^{cc} \cong \pm 5^{cc} \text{ και}$$

$$\sigma_{AB\Gamma} = \pm \sigma_{BA} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{AB\Gamma} = \pm 5^{cc} \cdot \sqrt{2} = \pm 7^{cc}.$$



### 3.7 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μία μετροταινία μήκους 50m βαθμονομημένη σε τάση 50N χρησιμοποιήθηκε για την μέτρηση ενός μήκους σε τρία διαδοχικά βήματα ως εξής:

τιμήμα (α/α)	μετρημένο μήκος (m)	εφαρμοζόμενη τάση (N)
1	22.980	60
2	20.880	58
3	31.458	72

Ζητείται να υπολογισθεί η συνολική διόρθωση λόγω διαφοράς από την τάση ελέγχου. Δίνονται:

1. το βάρος της μετροταινίας ανά μονάδα μήκους  $w=0.03\text{kg/m}$
2. η πυκνότητα του ατσάλιού  $\rho=7690\text{kg/m}^3$
3. το μέτρο ελαστικότητας για το ατσάλι  $E=20\times 10^4\text{N/mm}^2$

(Απάντηση:  $\delta_T=0.0013\text{m}$ )

2. Αναφορικά με τα είδη και χαρακτηριστικά των πλαστικών και μεταλλικών μετροταινιών να απαντήσετε στα επόμενα:

(α) Σε ποια μήκη συνήθως διατίθενται και τι υποδιαιρέσεις φέρουν;

(β) Δώστε μια τάξη μεγέθους της ακρίβειας που μπορεί να επιτευχθεί για κάθε κατηγορία μετροταινιών.

(γ) Αναφέρατε δύο βασικές κατηγορίες εφαρμογών για τις οποίες η χρήση μεταλλικών μετροταινιών συνίσταται έναντι των πλαστικών μετροταινιών.

3. Οι μετρήσεις μηκών με μετροταινία υπόκεινται σε τυχαία, συστηματικά και χονδροειδή σφάλματα. Για κάθε μία από αυτές τις κατηγορίες να αναφέρετε τρεις βασικές αιτίες που μπορεί να προκαλέσουν αντίστοιχα σφάλματα. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4. Ένα μήκος της τάξης των 120m που μετρήθηκε με μετροταινία σε περιοχή με μέσο υψόμετρο 700m. Εάν ο συντελεστής χαρτογραφικής παραμόρφωσης στην περιοχή των μετρήσεων είναι 0.9998 να υπολογισθούν οι απαιτούμενες αναγωγές λόγω ΜΣΘ και λόγω χαρτογραφικής απεικόνισης. Ποια από τις δύο είναι μεγαλύτερη;

5. Ποια είναι η βασική αρχή λειτουργίας των οργάνων μέτρησης μηκών με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Να αναφερθούν τα είδη των οργάνων μέτρησης μηκών με ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία.

6. Να αναφερθούν τα πλεονεκτήματα των ολοκληρωμένων γεωδαιτικών σταθμών.

7. Που οφείλονται οι διορθώσεις, που πρέπει να γίνουν στα μήκη που μετρούνται με ηλεκτρομαγνητικά όργανα, λόγω της σταθεράς του συστήματος όργανο - κατάφωτο και λόγω του κυκλικού σφάλματος.

8. Ποιες είναι οι γεωμετρικές αναγωγές που πρέπει να γίνουν στα μήκη που μετρούνται στο ύπαιθρο. Ποιες από αυτές είναι αναγκαίες να γίνουν όταν το σύστημα αναφοράς είναι αυθαίρετο.

9. Για τον προσδιορισμό της σταθεράς C ενός συστήματος, με ακρίβεια μέτρησης μήκους  $\sigma_D = \pm(2\text{mm} + 3ppm)$ , μετρήθηκε το μήκος  $D_{AB}$  της βάσης AB με το συγκεκριμένο σύστημα. Στη συνέχεια με το ίδιο σύστημα μετρήθηκαν τα μήκη που

ορίζονται από τις πυκνώσεις της ευθυγραμμίας AB με τα σημεία Γ, Δ και Ε, όπως δίνονται:

$$\begin{aligned} D_{AB} &= 385.671\text{m} \\ D_{AG} &= 84.524\text{m} & D_{BG} &= 301.135\text{m} \\ D_{AD} &= 156.615\text{m} & D_{BD} &= 229.046\text{m} \\ D_{AE} &= 293.753\text{m} & D_{BE} &= 91.905\text{m} \end{aligned}$$

Αν το μήκος  $D_{AB}$  της βάσης AB, έχει μετρηθεί με ένα όργανο μηδενικής τάξης και έχει προσδιορισθεί ότι είναι  $D_{AB}=385.687\text{m}$ , να υπολογισθεί η σταθερά του ίδιου συστήματος και να συγκριθεί με την προηγούμενη, αν είναι στατιστικά διαφορετική.

(Απάντηση:  $0.012\text{m}$ ,  $0.014\text{m}$ ).

**10.** Με ολοκληρωμένο γεωδαιτικό σταθμό μετρήθηκε το κεκλιμένο μήκος της πλευράς AB. Αφού έγιναν οι διορθώσεις, λόγω του συστήματος όργανο - κατάφωτο και της ατμόσφαιρας, υπολογίσθηκε ότι  $S'_{AB} = 6357.527\text{m}$ . Να υπολογισθεί το μήκος της πλευράς AB πάνω: στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το σημείο A, στην επιφάνεια αναφοράς, στην επιφάνεια προβολής, στην χωροσταθμική επιφάνεια που περνά από το σημείο A και στην χωροσταθμική επιφάνεια που περνά από το σημείο B.

Μετρήθηκαν:  $Z_{AB}=96.5423^{\circ}$ ,  $Y_O=1.650\text{m}$ ,  $Y_{\Sigma}=1.450\text{m}$ ,  $H_A=562.320\text{m}$

Δίνονται:  $R=6371\text{km}$ ,  $m=1.000102$ ,  $k=0.17$

(Απάντηση:  $6348.152\text{m}$ ,  $6347.389\text{m}$ ,  $6348.037\text{m}$ ,  $6347.949\text{m}$ ,  $6348.293\text{m}$ )

## 4. ΥΨΟΜΕΤΡΙΑ

### 4.1 ΓΕΝΙΚΑ

Η θέση ενός σημείου στο χώρο ορίζεται με τις συντεταγμένες του ( $X, Y, Z$ ) ως προς ένα τρισσορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Συνηθέστερα όμως η θέση ενός σημείου στο χώρο ορίζεται με τις συντεταγμένες του πάνω σε μια επιφάνεια αναφοράς (γεωγραφικές ή γεωδαιτικές συντεταγμένες) ή στο προβολικό επίπεδο μιας χαρτογραφικής απεικόνισης (ορθογώνιες συντεταγμένες  $x, y$ ) και την απόσταση του σημείου από την επιφάνεια αναφοράς.

Ο προσδιορισμός της απόστασης σημείων της Φυσικής Γήινης Επιφάνειας (ΦΓΕ) ή τεχνικών έργων από μια επιφάνεια αναφοράς αποτελεί το αντικείμενο της *υψομετρίας*.

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται οι μέθοδοι και τα όργανα που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό υψομέτρων και υψομετρικών διαφορών.

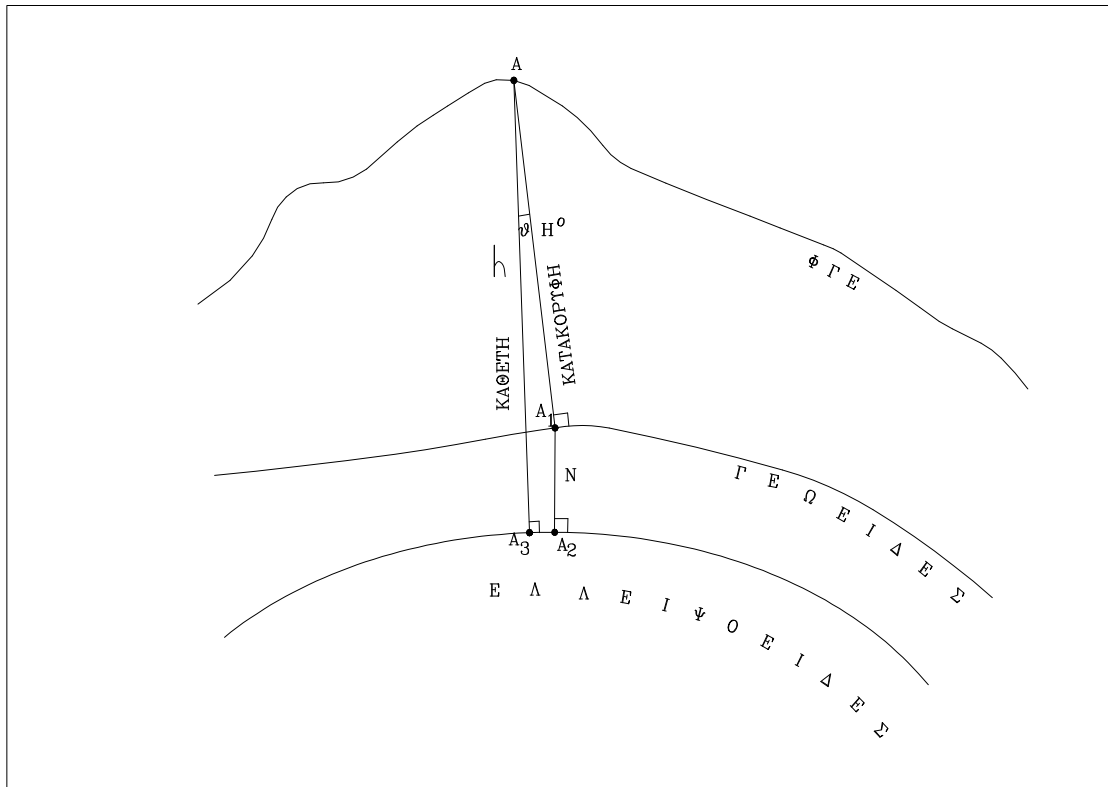
### 4.2 ΟΡΙΣΜΟΙ

*Υψόμετρο* σημείου ονομάζεται η απόστασή του από μια επιφάνεια αναφοράς.

Αν η επιφάνεια αναφοράς είναι ένα *ελλειψοειδές εκ περιστροφής (ελλειψοειδές αναφοράς)*, το υψόμετρο ονομάζεται *γεωμετρικό* ( $h$ ) και η απόσταση μετριέται κατά μήκος της κάθετης από το σημείο προς το ελλειψοειδές (σχ. 4.1). Σήμερα τα γεωμετρικά υψόμετρα προσδιορίζονται, συνήθως, από παρατηρήσεις σε τεχνητούς δορυφόρους (π.χ. σύστημα GPS).

Αν η επιφάνεια αναφοράς είναι το *γεωειδές* το υψόμετρο ονομάζεται *ορθομετρικό* ( $H$ ) και η απόσταση μετριέται κατά μήκος της κατακορύφου. Η κατακορύφος ταυτίζεται με τη διεύθυνση του διανύσματος της βαρύτητας που περνά από το σημείο και είναι κάθετη στο γεωειδές (σχ. 4.1). Ορθομετρικά υψόμετρα ή σωστότερα ορθομετρικές υψομετρικές διαφορές μετρώνται ή προσδιορίζονται με τα συνήθη τοπογραφικά όργανα.

Τέλος, αν επιλεγεί αυθαίρετα ένα οριζόντιο επίπεδο ως επιφάνεια αναφοράς το υψόμετρο του σημείου ονομάζεται *σχετικό* και η απόσταση μετράται κατά μήκος της κάθετης από το σημείο προς το επίπεδο.



Σχήμα 4.1 Ορθομετρικό – γεωμετρικό υψόμετρο

Οι δύο επιφάνειες (γεωειδές – ελλειψοειδές) δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μην ταυτίζονται η κατακόρυφος και η κάθετη από το σημείο αλλά να σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία  $\theta$  που ονομάζεται *απόκλιση της κατακορύφου*. Η απόκλιση της κατακορύφου είναι διανυσματικό μέγεθος με συνιστώσες  $\xi$  (στη διεύθυνση βορρά – νότου) και  $\eta$  (στη διεύθυνση ανατολής – δύσης).

Το γεωμετρικό και το ορθομετρικό υψόμετρο ενός σημείου συνδέονται μεταξύ τους με την ακόλουθη βασική σχέση :

$$h = H + N \quad (4.1)$$

όπου  $N$  : το *υψόμετρο του γεωειδούς* ως προς το ελλειψοειδές αναφοράς.

Τα γεωμετρικά υψόμετρα εξαρτώνται από το ελλειψοειδές εκ περιστροφής που επιλέγεται ως επιφάνεια αναφοράς και επομένως δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα. Επιπλέον, η κάθετη στο ελλειψοειδές δεν είναι άμεσα υλοποιήσιμη σε αντίθεση με την κατακόρυφο που υλοποιείται από όλα τα τοπογραφικά όργανα. Έτσι τα γεωμετρικά υψόμετρα δεν είναι εύχρηστα και δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις συνήθεις τοπογραφικές εφαρμογές. Με τα συμβατικά τοπογραφικά όργανα μετρώνται ή προσδιορίζονται ορθομετρικές υψομετρικές διαφορές, η διεύθυνση της κατακορύφου υλοποιείται άμεσα, ενώ το γεωειδές στην πράξη προσεγγίζεται με μια άμεσα αντιληπτή επιφάνεια, τη μέση στάθμη της θάλασσας. Τα ορθομετρικά υψόμετρα είναι επομένως εκείνα που χρησιμοποιούνται σε όλες τις τρέχουσες τοπογραφικές εργασίες. Τα υψόμετρα αυτά ονομάζονται και *απόλυτα*.

Υψομετρική διαφορά μεταξύ δύο σημείων A, B ονομάζεται η διαφορά των υψομέτρων τους:

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A \quad \text{ή} \quad \Delta h_{AB} = h_B - h_A \quad (4.2)$$

και αντίστοιχα :

$$\Delta H_{BA} = H_A - H_B \quad \text{ή} \quad \Delta h_{BA} = h_A - h_B \quad (4.3)$$

Φυσικά ισχύει και :

$$\Delta h_{AB} = h_B - h_A = (H_B + N_B) - (H_A + N_A) = \Delta H_{AB} + \Delta N_{AB} \quad (4.4)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις διαπιστώνεται ότι :

- αν το σημείο B είναι ψηλότερα από το σημείο A ( $H_B > H_A$ ), η υψομετρική διαφορά  $\Delta H_{AB}$  είναι θετική ενώ στην αντίθετη περίπτωση ( $H_B < H_A$ ), η υψομετρική διαφορά είναι αρνητική, δηλ. οι υψομετρικές διαφορές είναι προσημασμένοι αριθμοί.
- Οι υψομετρικές διαφορές  $\Delta H_{AB}$  και  $\Delta H_{BA}$  είναι αριθμοί ίσοι κατ' απόλυτη τιμή με αντίθετα πρόσημα ( $|\Delta H_{AB}| = |\Delta H_{BA}|$ ).
- Το υψόμετρο του σημείου B μπορεί να προσδιορισθεί αν είναι γνωστό το υψόμετρο του σημείου A και μετρηθεί ή προσδιορισθεί η υψομετρική διαφορά  $\Delta H_{AB}$  :

$$H_B = H_A + \Delta H_{AB} \quad (4.5)$$

### 4.3 ΜΕΣΗ ΣΤΑΘΜΗ ΤΗΣ ΘΑΛΑΣΣΑΣ (ΜΣΘ)

Επιφάνεια αναφοράς των ορθομετρικών υψομέτρων είναι το γεωειδές (ενότητα 1.3.2α). Επειδή το γεωειδές είναι μια πολύ ανώμαλη επιφάνεια που δεν περιγράφεται με κλειστές αναλυτικές σχέσεις, στην πράξη υλοποιείται από την *Μέση Στάθμη της Θάλασσας (ΜΣΘ)* με ακρίβεια της τάξης του  $\pm 1\text{m}$  για ολόκληρη τη γη. Ο προσδιορισμός της ΜΣΘ γίνεται αφού ληφθούν υπόψη (και ελαχιστοποιηθούν) οι επιδράσεις των παλιρροιών, των θαλάσσιων ρευμάτων και κυματισμών, των μεταβολών της ατμοσφαιρικής πίεσης, των διαφορών στην πυκνότητα του θαλάσσιου νερού, της τήξης των παγετώνων, των τεκτονικών κινήσεων του φλοιού της γης κ.λπ.

Ο προσδιορισμός της ΜΣΘ, δηλ. της χωροσταθμικής επιφάνειας με μηδενικό υψόμετρο, γίνεται μετά από μακροχρόνιες καταγραφές των διακυμάνσεων της (20 ή και 30 ετών), με ειδικά όργανα τους *παλιρροιογράφους* (Εικόνα 4.1). Οι μεταβολές της στάθμης της θάλασσας καταγράφονται (σήμερα ψηφιακά) ως προς ένα σημείο αναφοράς, το μηδέν του παλιρροιογράφου, και μετά από την απαλοιφή των διάφορων επιδράσεων προσδιορίζεται η ΜΣΘ ως προς το μηδέν του παλιρροιογράφου. Από την ανάλυση των καταγραφών των παλιρροιογράφων που είναι εγκαταστημένοι σε διάφορα σημεία μιας χώρας προσδιορίζονται οι μεταβολές της ΜΣΘ ως προς ένα *παλιρροιογράφο αναφοράς*.

Η ΜΣΘ μπορεί να προσδιορισθεί με ακρίβεια μερικών δεκάτων του μέτρου και με τη χρήση του *παλιρροιόμετρου* (Εικόνα 4.2). Το παλιρροιόμετρο είναι ένας διαιρεμένος πήχης ο οποίος πακτώνεται σε σταθερό και προστατευμένο από τους κυματισμούς μέρος, έτσι ώστε τμήμα των υποδιαίρεσεων του να είναι βυθισμένο

μέσα στο νερό. Με την καταγραφή των μεταβολών της στάθμης της θάλασσας ανά τακτά χρονικά διαστήματα (π.χ. ανά μία ώρα) για μερικά 24ωρα προσδιορίζεται η ΜΣΘ για την περιοχή με μια ακρίβεια, που όπως προαναφέρθηκε, φθάνει στην καλύτερη περίπτωση τα μερικά δέκατα του μέτρου. Στη συνέχεια προσδιορίζεται το υψόμετρο, ως προς την υπολογισμένη ΜΣΘ, μιας κατάλληλα επιλεγμένης υποδιαίρεσης του πήχυ.



**Εικόνα 4.1** Παλιρροιογράφος



**Εικόνα 4.2** Παλιρροιοόμετρο

Σήμερα, η ΜΣΘ προσδιορίζεται σε παγκόσμιο επίπεδο μέσω της *δορυφορικής αλτιμετρίας*. Χρησιμοποιώντας ειδικούς δορυφόρους, εξοπλισμένους με δορυφορικά αλτιμέτρα (ειδικά όργανα ραντάρ) προσδιορίζεται κάθε φορά η απόσταση του δορυφόρου από τη στιγμιαία επιφάνεια της θάλασσας. Χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενες μετρήσεις με χρονικό εύρος μερικά έτη, προσδιορίζεται τελικά η ΜΣΘ ως ο μέσος όρος των μετρήσεων στο αντίστοιχο χρονικό διάστημα.

#### **4.4 ΙΔΡΥΣΗ ΥΨΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΦΟΡΑΣ**

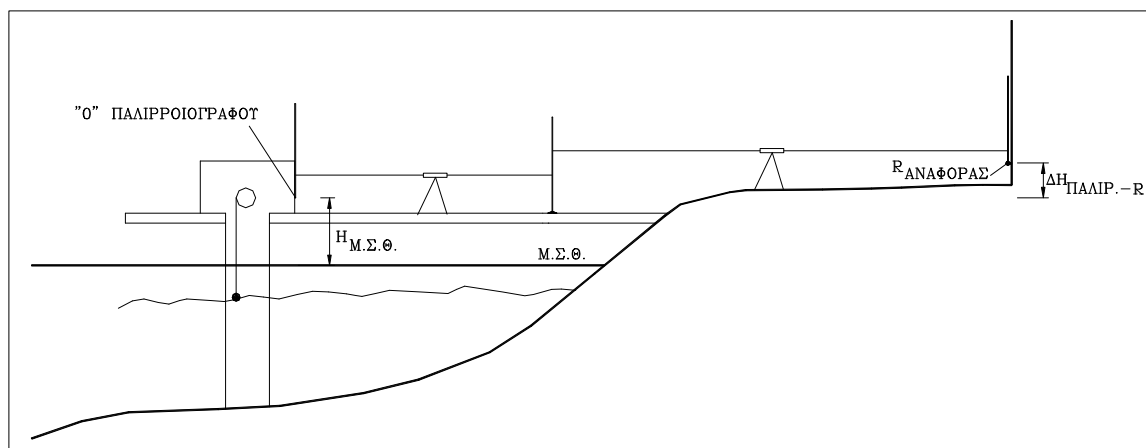
Αφού ορισθεί η επιφάνεια αναφοράς των υψομέτρων, ιδρύεται, και στη συνέχεια υλοποιείται, το *Υψομετρικό Σύστημα Αναφοράς*.

Σε μικρή απόσταση από τον παλιρροιογράφο αναφοράς, σε ασφαλή και σταθερή θέση, ιδρύεται (υλοποιείται) ένα βασικό σημείο αναφοράς R του οποίου η θέση προσδιορίζεται υψομετρικά ως προς το μηδέν του παλιρροιογράφου, μετράται δηλ. με μεγάλη ακρίβεια η υψομετρική διαφορά τους  $\Delta H_{\text{παλιρροιογρ.-R}}$  (σχ. 4.2).

Προσθέτοντας, αλγεβρικά, τη θέση της ΜΣΘ ( $H_{\text{ΜΣΘ}}$ ) ως προς το μηδέν του παλιρροιογράφου, σε αυτή την υψομετρική διαφορά, προσδιορίζεται το ορθομετρικό υψόμετρο του σημείου αναφοράς R ως προς τη ΜΣΘ

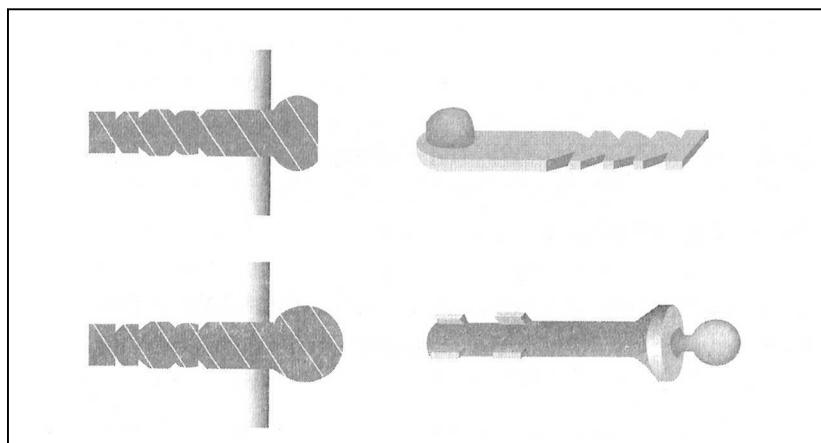
$$H_R = H_{\text{ΜΣΘ}} + \Delta H_{\text{παλιρροιογρ.-R}} \quad (4.6)$$

Με τον τρόπο αυτό *ιδρύεται* το Υψομετρικό Σύστημα Αναφοράς μιας χώρας.



**Σχήμα 4.2** Σύνδεση παλιρροιογράφου με υψομετρική αφετηρία αναφοράς

Το Υψομετρικό Σύστημα Αναφοράς για κάθε χώρα υλοποιείται από ένα σύνολο σταθερών σημείων, ομοιόμορφα κατανεμημένων, έτσι ώστε να καλύπτουν όλη την έκταση της χώρας. Τα σημεία αυτά ονομάζονται *Χωροσταθμικές ή Υψομετρικές Αφετηρίες (Rèpères)*. Υλοποιούνται με ειδικά ορειχάλκινα σήματα (μπουλόνια) (Εικόνα 4.3), τα οποία πακτώνονται λίγο ψηλότερα από την επιφάνεια του εδάφους ή τη στάθμη των πεζοδρομίων, σε ασφαλείς και σταθερές θέσεις (μεγάλες κατασκευές, συνήθως δημόσια κτίρια, ή και βάθρα από οπλισμένο σκυρόδεμα) έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η μονιμότητά τους. Τα υψόμετρα τους προσδιορίζονται με μεγάλη ακρίβεια, συνήθως από κρατικές υπηρεσίες, με εξάρτηση από το βασικό υψομετρικό σημείο αναφοράς, που όπως αναφέρθηκε έχει ιδρυθεί κοντά στον παλιρροιογράφο αναφοράς. Ο κωδικός, η περιγραφή της θέσης τους και το υψόμετρό τους καταγράφονται και αρχειοθετούνται σε ειδικούς πίνακες από την κρατική υπηρεσία που έχει αναλάβει τον προσδιορισμό των υψόμετρων τους (Πίνακας 4.1).



**Εικόνα 4.3** Τύποι χωροσταθμικών αφετηριών [2]

Α/Α ΘΥΛΑΚ ΧΑΡΤΟΥ 1:50.000: 291 ΠΑΤΡΑΙ ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΙΚΗ ΘΕΥΣΗ : 16 16 ΠΑΤΡΑΙ - ΠΥΡΓΟΣ		
1	ΑΡΙΘΜ.ΥΨΟΜ.ΑΦΕΤΗΡΙΑΣ: 291.16.0001	ΥΨΟΜΕΤΡΟ (ΑΠΟ Μ.ΣΤΑΘ.ΘΑΛ.): 2.599 ΕΠΙ ΤΟΥ ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟΥ ΣΤΑΦΙΔΟΣ Κ.ΑΝΔΡΕΟΥ ΚΟΥΝΙΝΙΩΤΗ ΚΕΙΜΕΝΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΙΣΤΕΡΑΝ ΠΛΕΥΡΑΝ ΤΗΣ ΟΔΟΥ,ΑΠΟ ΠΑΛΛΙΡΡΟΙΟΜΕΤΡΟΝ ΠΡΟΣ Ι.ΝΑΟΝ ΑΓΙΟΥ ΑΝΔΡΕΟΥ.ΠΑΗΣΙΟΝ ΤΟ ΚΤΙΡΙΟΝ ΤΗΣ ΙΧΘΥΟΣΚΑΛΑΣ.
2	ΑΡΙΘΜ.ΥΨΟΜ.ΑΦΕΤΗΡΙΑΣ: 291.16.001Α	ΥΨΟΜΕΤΡΟ (ΑΠΟ Μ.ΣΤΑΘ.ΘΑΛ.): 4.196 ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣ ΤΟΥ ΑΓΙΟΥ ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ ΤΗΣ ΠΟΛΕΩΣ ΠΑΤΡΩΝ.
3	ΑΡΙΘΜ.ΥΨΟΜ.ΑΦΕΤΗΡΙΑΣ: 291.16.0002	ΥΨΟΜΕΤΡΟ (ΑΠΟ Μ.ΣΤΑΘ.ΘΑΛ.): 2.482 ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΣΤΕΡΙΚΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΤΗΣ ΕΚΚΛΗΣΙΑΣ ΤΟΥ ΑΓΙΟΥ ΓΕΡΑΣΙΜΟΥ ΚΑΙ ΚΑΤΩΣΙ ΤΟΥ ΚΩΔΩΝΟΣΤΑΣΙΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΙΣΤΕΡΑΝ ΠΛΕΥΡΑΝ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΠΑΤΡΩΝ-ΠΥΡΓΟΥ
4	ΑΡΙΘΜ.ΥΨΟΜ.ΑΦΕΤΗΡΙΑΣ: 291.16.0003	ΥΨΟΜΕΤΡΟ (ΑΠΟ Μ.ΣΤΑΘ.ΘΑΛ.): 1.796 ΕΠΙ ΤΗΣ ΕΣΤΕΡΙΚΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ ΤΟΥ ΚΤΙΡΙΟΥ ΤΟΥ ΕΡΓΟΣΤΑΣΙΟΥ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΨΗΓΕΙΩΝ ΚΑΙ ΠΑΓΟΥ Ο "ΧΕΛΜΟΣ" ΤΟΥ Κ.ΚΩΝ/ΝΟΥ ΚΑΛΟΥΡΗ ΕΙΣ ΤΟ ΑΡΙΣΤΕΡΟ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΠΑΤΡΩΝ-ΠΥΡΓΟΥ.
5	ΑΡΙΘΜ.ΥΨΟΜ.ΑΦΕΤΗΡΙΑΣ: 291.16.0004	ΥΨΟΜΕΤΡΟ (ΑΠΟ Μ.ΣΤΑΘ.ΘΑΛ.): 2.620 ΕΠΙ ΤΟΥ ΠΑΡΟΡΘΙΟΥ ΤΟΥ Κ. ΔΗΜ.ΔΗΜΟΓΙΑΝΝΟΠΟΥΛΟΥ ΕΙΣ ΤΗΝ ΑΡΙΣΤΕΡΑΝ ΠΛΕΥΡΑΝ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΠΑΤΡΩΝ-ΠΥΡΓΟΥ ΕΙΣ 50Μ ΤΟ ΚΑΦΕΝΕΙΟΝ ΤΟΥ Κ.ΑΘΑΝ. ΤΑΣΙΠΟΥΛΟΥ.
6	ΑΡΙΘΜ.ΥΨΟΜ.ΑΦΕΤΗΡΙΑΣ: 291.16.0005	ΥΨΟΜΕΤΡΟ (ΑΠΟ Μ.ΣΤΑΘ.ΘΑΛ.): 1.208 ΕΠΙ ΤΟΥ ΑΝΤΙΣΤΗΡΙΓΜΑΤΟΣ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΕΙΣ ΤΟ ΑΡΙΣΤΕΡΟΝ ΤΗΣ ΟΔΟΥ ΠΑΤΡΩΝ-ΠΥΡΓΟΥ-ΝΑ ΑΙ ΟΙΚΙΑΙ ΣΤΑΥΡΟΥ ΡΑΠΗ ΚΑΙ ΙΩΑΝΝΟΥ ΚΑΝΝΕΛΟΠΟΥΛΟΥ.

**Πίνακας 4.1** Απόσπασμα καταχώρησης στοιχείων υψομετρικού δικτύου

Οι Υψομετρικές αφετηρίες συνδέονται μεταξύ τους με κλειστά πολύγωνα (βρόχους) και αποτελούν το *Χωροσταθμικό ή Υψομετρικό Δίκτυο* της χώρας. Ανάλογα με την πυκνότητα κατανομής των σημείων και την ακρίβεια στον προσδιορισμό των υψομέτρων τους, τα χωροσταθμικά Δίκτυα διακρίνονται σε 1<sup>ης</sup>, 2<sup>ης</sup>, 3<sup>ης</sup> κλπ. Τάξης. Το υψόμετρο οποιουδήποτε σημείου προσδιορίζεται εάν μετρηθεί ή προσδιορισθεί η υψομετρική διαφορά μεταξύ του σημείου και μιας χωροσταθμικής αφετηρίας.

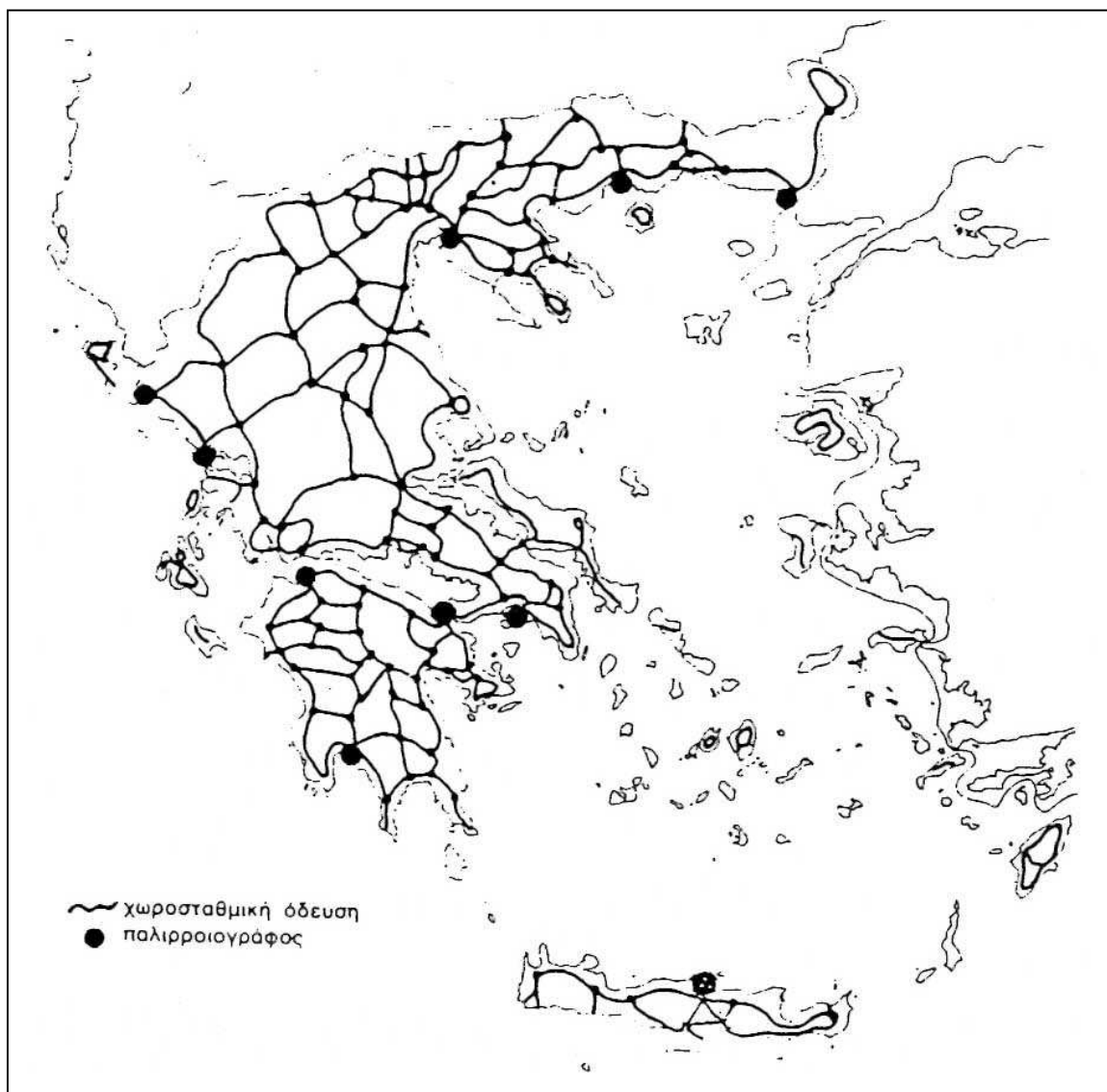
#### 4.4.1 Ελληνικό Υψομετρικό Σύστημα Αναφοράς

Στην Ελλάδα παλιρροιογράφος αναφοράς είναι ο *παλιρροιογράφος του Πειραιά*. Η ΜΣΘ έχει υπολογισθεί από την Υδρογραφική Υπηρεσία του Πολεμικού Ναυτικού από τις καταγραφές του παλιρροιογράφου το χρονικό διάστημα 1933 – 1978. Το βασικό υψομετρικό σημείο αναφοράς είναι η *Χωροσταθμική Αφετηρία R287* που έχει υλοποιηθεί στη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων, κοντά στον παλιρροιογράφο του Πειραιά. Το υψόμετρο της ως προς τη ΜΣΘ της περιόδου 1933 – 1978 είναι  $H_{R287} = + 14.665m$ .

Το Χωροσταθμικό Δίκτυο της χώρας έχει εξαρτηθεί από αυτή την υψομετρική αφετηρία (R287). Τα υψόμετρα των κορυφών του Δικτύου έχουν προσδιορισθεί με γεωμετρική χωροστάθμηση. Η Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (ΓΥΣ) είναι η κρατική υπηρεσία υπεύθυνη για την ίδρυση, τις μετρήσεις και τον προσδιορισμό των υψομέτρων των κορυφών του Εθνικού Χωροσταθμικού Δικτύου καθώς και για την αρχειοθέτηση των χωροσταθμικών αφετηριών. Εκτός από την ΓΥΣ, υψομετρικά δίκτυα, που καλύπτουν το σύνολο ή μέρος της χώρας, έχουν ιδρυθεί και από άλλες κρατικές υπηρεσίες (Υπουργείο Γεωργίας, ΕΥΔΑΠ, Δήμοι κ.α.).

Στο σχήμα 4.3 φαίνεται το Υψομετρικό Δίκτυο 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> Τάξης της ΓΥΣ καθώς και η θέση των εγκαταστημένων παλιρροιογράφων.





Σχήμα 4.3 Υψομετρικό δίκτυο 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ης</sup> τάξης της ΓΥ. [4]

#### 4.5 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΟΡΘΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΥΨΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

Ο προσδιορισμός της ορθομετρικής υψομετρικής διαφοράς μεταξύ δύο σημείων γίνεται με μια από τις ακόλουθες μεθόδους:

- *Γεωμετρική χωροστάθμιση*: Είναι η ακριβέστερη μέθοδος προσδιορισμού ορθομετρικών υψομετρικών διαφορών ( $\pm 0.3\text{mm}/\sqrt{\text{km}}$  έως  $\pm 1\text{cm}/\sqrt{\text{km}}$ ). Με τη γεωμετρική χωροστάθμιση μετρώνται άμεσα ορθομετρικές υψομετρικές διαφορές, χρησιμοποιώντας ως βασικό όργανο το χωροβάτη και βοηθητικό όργανο ένα διαιρεμένο πήχη (χωροσταθμικός πήχης ή σταδία).

- *Υδραυλική ή υδροστατική χωροστάθμιση*: Είναι μέθοδος αντίστοιχης ακρίβειας με αυτή της γεωμετρικής χωροστάθμισης. Με την υδροστατική χωροστάθμιση μετρώνται άμεσα μικρού μεγέθους ορθομετρικές υψομετρικές διαφορές. Η μέθοδος βασίζεται στην αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων, σύμφωνα με την οποία, οι επιφάνειες του υγρού, (που ηρεμεί) μέσα στα

συγκοινωνούντα δοχεία, βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Για τις μετρήσεις χρησιμοποιούνται ειδικές συσκευές.

- *Τριγωνομετρική υψομετρία:* Προσδιορίζει ορθομετρικές υψομετρικές διαφορές με ακρίβεια μερικά εκατοστά. Με την τριγωνομετρική υψομετρία προσδιορίζονται έμμεσα ορθομετρικές υψομετρικές διαφορές από μετρήσεις κατακόρυφων γωνιών και κεκλιμένων μηκών ή οριζόντιων αποστάσεων μεταξύ των σημείων των οποίων ζητείται η υψομετρική διαφορά.

- *Βαρομετρική υψομετρία:* προσδιορίζονται άμεσα ορθομετρικά υψόμετρα με ακρίβεια της τάξης του  $\pm 1m$ . Η μέθοδος βασίζεται στο γεγονός ότι η ατμοσφαιρική πίεση μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται το υψόμετρο του σημείου. Για τον προσδιορισμό των υψομέτρων χρησιμοποιούνται βαρόμετρα ή αλτίμετρα.

Στις υψομετρικές ορθομετρικές διαφορές θα πρέπει να γίνει μια διόρθωση λόγω της μη παραλληλίας των χωροσταθμικών επιφανειών. Η διόρθωση αυτή ονομάζεται *ορθομετρική διόρθωση* (OC) και για τον υπολογισμό της απαιτείται η γνώση του γήινου πεδίου βαρύτητας. Η ορθομετρική διόρθωση έχει νόημα όταν οι υψομετρικές διαφορές των σημείων είναι μεγάλες ή όταν τα σημεία των οποίων προσδιορίζεται η υψομετρική διαφορά απέχουν πολύ μεταξύ τους.

#### **4.6 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΥΨΟΜΕΤΡΩΝ**

Τα γεωμετρικά υψόμετρα σημείων προσδιορίζονται σήμερα, κυρίως, με το σύστημα δορυφορικού εντοπισμού θέσης (π.χ. σύστημα GPS). Σε κάθε σημείο που ενδιαφέρει προσδιορίζονται οι ορθογώνιες καρτεσιανές συντεταγμένες του (X, Y, Z) ως προς το παγκόσμιο γεωκεντρικό σύστημα αναφοράς. Οι συντεταγμένες αυτές μετατρέπονται σε γεωδαιτικές συντεταγμένες ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) στο ελλειψοειδές αναφοράς του παγκόσμιου γεωδαιτικού συστήματος αναφοράς WGS84, καθώς και στο γεωμετρικό του υψόμετρο  $h$  ως απόσταση του σημείου (κατά την κάθετο) από το ελλειψοειδές αναφοράς. Η ακρίβεια προσδιορισμού των γεωμετρικών  $\Delta h$  είναι της τάξης των  $\pm 1$  έως  $\pm 2cm$ .

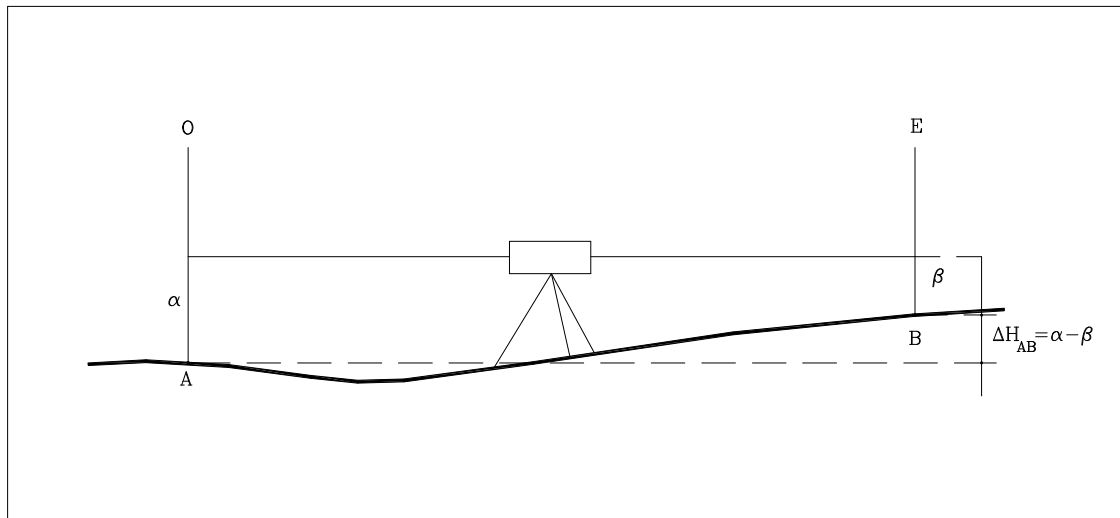
Για να μετατραπούν τα γεωμετρικά υψόμετρα σε ορθομετρικά, πρέπει να είναι γνωστό το υψόμετρο του γεωειδούς στη θέση των σημείων των οποίων προσδιορίστηκαν τα γεωμετρικά υψόμετρα και μάλιστα με την ίδια τάξη ακρίβειας. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι ακόμα εφικτό, ιδιαίτερα για τον ελλαδικό χώρο όπου η ακρίβεια προσδιορισμού του υψομέτρου του γεωειδούς ως προς το ελλειψοειδές αναφοράς είναι της τάξης του  $\pm 0.5m$ . Έτσι, για τις τρέχουσες εφαρμογές της υψομετρίας, χρησιμοποιούνται οι παραπάνω επίγειες μέθοδοι προσδιορισμού ορθομετρικών υψομετρικών διαφορών.

#### **4.7 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΗΣΗ**

##### **4.7.1 Αρχή της μεθόδου - Υπολογισμοί**

Η βασική αρχή της μεθόδου δίνεται στο σχήμα 4.4. Έστω δύο σημεία A και B τα οποία δεν απέχουν πολύ μεταξύ τους οριζοντιογραφικά και υψομετρικά. Στα σημεία αυτά τοποθετούνται δύο κατακόρυφοι διαιρεμένοι πήχεις (σταδίες). Με το τηλεσκόπιο ενός γεωδαιτικού οργάνου (χωροβάτης), ο σκοπευτικός άξονας του οποίου υλοποιεί ένα οριζόντιο επίπεδο, λαμβάνονται οι αναγνώσεις  $\alpha$  και  $\beta$  στις σταδίες στα A και B αντίστοιχα. Οι αναγνώσεις αυτές αντιστοιχούν στα σημεία που το οριζόντιο επίπεδο που υλοποιεί το τηλεσκόπιο τέμνει τους δύο πήχεις.

Θεωρώντας ότι από κάθε ένα από τα σημεία A και B περνά ένα οριζόντιο επίπεδο η διαφορά των δύο αναγνώσεων ( $\alpha - \beta$ ) ισούται με την υψομετρική διαφορά  $\Delta H_{AB}$  μεταξύ των σημείων A και B. Από το σχήμα 4.4 φαίνεται επίσης ότι ο χωροβάτης τοποθετείται σε τυχαία θέση ως προς τα A και B.



Σχήμα 4.4 Αρχή της γεωμετρικής χωροστάθμησης

Αν από το υψόμετρο του σημείου A πρόκειται να προσδιορισθεί το υψόμετρο του B, η ανάγνωση στο σημείο A λαμβάνεται πρώτη και ονομάζεται *Οπισθοσκόπευση* ή *Όπισθεν* ανάγνωση (O). Αντίστοιχα, η ανάγνωση στο σημείο B ονομάζεται *Εμπροσθοσκόπευση* ή *Έμπροσθεν* ανάγνωση (E).

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A = \alpha - \beta = O - E \quad (4.7)$$

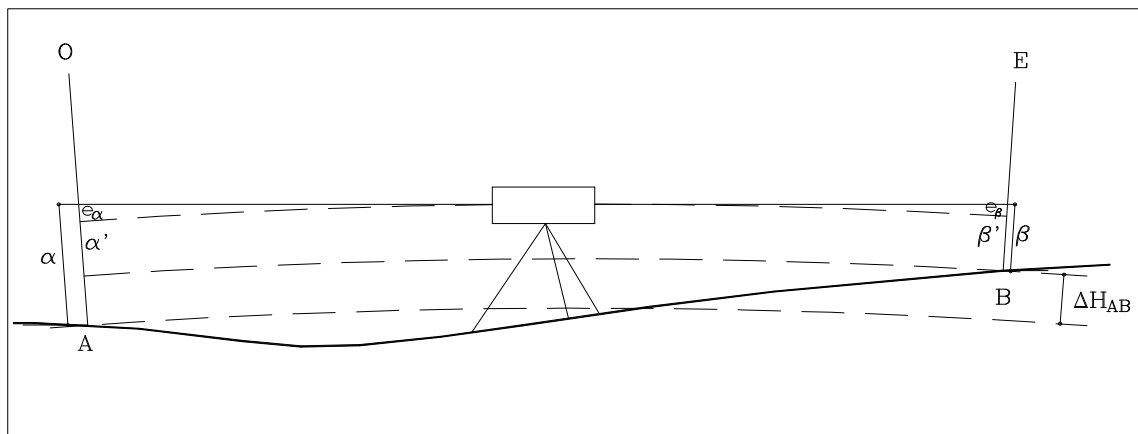
Αν είναι γνωστό το υψόμετρο του σημείου A τότε το υψόμετρο του B υπολογίζεται κατά τα γνωστά από τη σχέση :

$$H_B = H_A + \Delta H_{AB} \quad (4.8)$$

Η γεωμετρική χωροστάθμηση που περιγράφηκε παραπάνω ονομάζεται *μοναδιαία χωροστάθμηση* (μία στάση χωροβάτη).

Στην πραγματικότητα, από τα σημεία A και B δεν περνά αντίστοιχα ένα οριζόντιο επίπεδο, αλλά μια χωροσταθμική επιφάνεια. Ωστόσο, το τηλεσκόπιο του χωροβάτη υλοποιεί ένα οριζόντιο επίπεδο, το οποίο εφάπτεται στην χωροσταθμική επιφάνεια η οποία περνά από το σημείο τομής των αξόνων του οργάνου. Έτσι, λαμβάνονται οι αναγνώσεις  $\alpha$  και  $\beta$ , ενώ οι ορθές αναγνώσεις θα ήταν οι  $\alpha'$  και  $\beta'$  αντίστοιχα. Σε κάθε μια ανάγνωση δηλ. υπάρχει ένα συστηματικό σφάλμα  $e_\alpha = (\alpha - \alpha')$  και  $e_\beta = (\beta - \beta')$  αντίστοιχα. Για να εξαλειφθεί αυτό το συστηματικό σφάλμα αρκεί ο χωροβάτης να τοποθετείται στη μεσοκάθετη της απόστασης μεταξύ των A και B, αφού, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.5, σε αυτή την περίπτωση τα  $e_\alpha$  και  $e_\beta$  είναι μεταξύ τους ίσα και αλληλοαναιρούνται :

$$\Delta H_{AB} = O - E = \alpha' - \beta' = (\alpha - e_\alpha) - (\beta - e_\beta) = \alpha - \beta \quad (4.9)$$



**Σχήμα 4.5** Επίδραση της καμπυλότητας των χωροσταθμικών επιφανειών στη μέτρηση της υψομετρικής διαφοράς

Συνήθως, για τον προσδιορισμό της υψομετρικής διαφοράς μεταξύ δύο σημείων A και B γίνονται μετρήσεις με φορά από το A προς το B (μετάβαση ή *aller*) και με φορά από το B προς το A (επιστροφή ή *retour*), χωρίς να είναι ίδιες οι στάσεις του χωροβάτη. Αυτή η γεωμετρική χωροστάθμιση ονομάζεται *διπλή γεωμετρική χωροστάθμιση* ή *χωροστάθμιση σε μετάβαση και επιστροφή (aller – retour)*.

Με τη διπλή γεωμετρική χωροστάθμιση προσδιορίζονται δύο υψομετρικές διαφορές: οι  $\Delta H_{AB}$  και  $\Delta H_{BA}$ . Οι δύο αυτές υψομετρικές διαφορές προφανώς έχουν αντίθετα πρόσημο και θεωρητικά την ίδια απόλυτη τιμή. Στην πράξη αυτό δεν συμβαίνει εξαιτίας της επίδρασης των σφαλμάτων στις μετρήσεις (ενότητα 4.5.4). Στην περίπτωση που η διαφορά μεταξύ τους είναι ανεκτή, η τελική υψομετρική διαφορά είναι ο μέσος όρος των απόλυτων τιμών τους με το πρόσημο της μετάβασης:

$$\Delta H_{AB} = \frac{|\Delta H_{AB}^{\text{aller}}| + |\Delta H_{AB}^{\text{retour}}|}{2} \quad (4.10)$$

Στην αντίθετη περίπτωση η χωροστάθμιση πρέπει να επαναληφθεί στο σύνολό της.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τον προσδιορισμό του υψόμετρου του σημείου B έγινε διπλή γεωμετρική χωροστάθμιση μεταξύ των A και B, με τα παρακάτω αποτελέσματα :

$$\Delta H_{AB}^{\text{aller}} = -1.556\text{m} \quad \text{και} \quad \Delta H_{AB}^{\text{retour}} = +1.554\text{m}$$

Αν το υψόμετρο του σημείου A είναι  $H_A = +15.378\text{m}$ , να υπολογισθεί το υψόμετρο του σημείου B.

Σύμφωνα με τη σχέση (5.10) η τελική υψομετρική διαφορά μεταξύ των A και B είναι :

$$\Delta H_{AB} = \frac{|\Delta H_{AB}^{\text{aller}}| + |\Delta H_{AB}^{\text{retour}}|}{2} \Rightarrow \Delta H_{AB} = \frac{|-1.556| + |+1.554|}{2} \Rightarrow$$

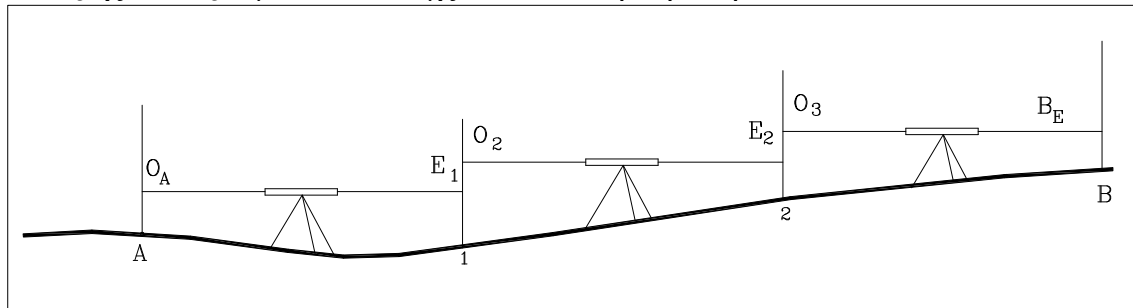
$$\Delta H_{AB} = -1.555\text{m}$$

και το υψόμετρο του σημείου B, είναι :

$$H_B = H_A + \Delta H_{AB} = 15.378 - 1.555 \Rightarrow H_B = +13.823\text{m}$$

#### 4.7.2 Χωροσταθμικές οδεύσεις

Αν η απόσταση ή η υψομετρική διαφορά μεταξύ των A και B είναι μεγάλη, ή συμβαίνουν και τα δύο, η υψομετρική διαφορά  $\Delta H_{AB}$  δεν μπορεί να προσδιοριστεί με μια στάση χωροβάτη. Στην περίπτωση αυτή, απαιτούνται περισσότερες στάσεις χωροβάτη, η δε υψομετρική διαφορά προσδιορίζεται από το άθροισμα των επιμέρους υψομετρικών διαφορών (σχ. 4.6). Στα ενδιάμεσα σημεία, ανεξάρτητα της φύσης του εδάφους, χρησιμοποιούνται ειδικές *χωροσταθμικές βάσεις (χελώνες)* για να επιτυγχάνεται καλή έδραση των σταδίων.



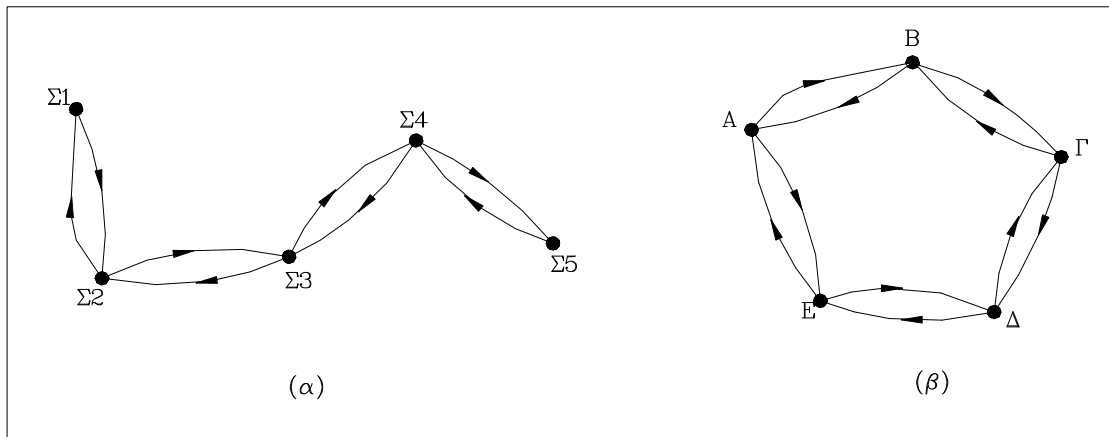
Σχήμα 4.6 Χωροσταθμική όδευση

Για τον προσδιορισμό της υψομετρικής διαφοράς  $\Delta H_{AB}$  που φαίνεται στο σχήμα 4.6, μετρήθηκαν οι επιμέρους υψομετρικές διαφορές  $\Delta H_{A1}$ ,  $\Delta H_{12}$ ,  $\Delta H_{2B}$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω η υψομετρική διαφορά  $\Delta H_{AB}$  υπολογίζεται από τη σχέση :

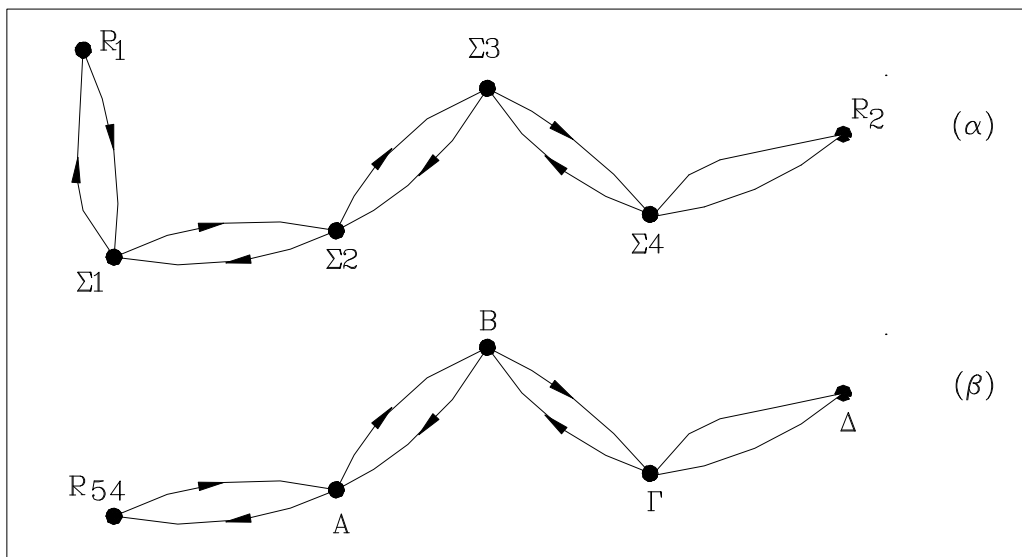
$$\begin{aligned} \Delta H_{AB} &= \Delta H_{A1} + \Delta H_{12} + \Delta H_{2B} = \\ &= (O_A - E_1) + (O_1 - E_2) + (O_2 - E_B) = \Sigma O - \Sigma E \end{aligned} \quad (4.11)$$

Η γεωμετρική χωροστάθμιση που απαιτεί περισσότερες από μια στάσεις χωροβάτη για τον προσδιορισμό της ζητούμενης υψομετρικής διαφοράς λέγεται *χωροσταθμική όδευση*. Οι χωροσταθμικές οδεύσεις χρησιμοποιούνται και για τον διαδοχικό προσδιορισμό των υψομέτρων σημείων, όπως π.χ. των υψομέτρων των κορυφών μιας πολυγωνικής όδευσης.

Οι χωροσταθμικές οδεύσεις, όμοια με τις πολυγωνικές, διακρίνονται ανάλογα με το σχήμα τους σε *ανοιχτές* ή *κλειστές* (σχ. 4.7). *εξαρτημένες* ή *ανεξάρτητες*. Οι ανοιχτές χωροσταθμικές οδεύσεις διακρίνονται σε *πλήρως εξαρτημένες* ή *εξαρτημένες από το ένα άκρο* (σχ. 4.8), ανάλογα με το αν ξεκινούν ή και καταλήγουν σε σημείο γνωστού υψομέτρου, αντίστοιχα. Οι μετρήσεις καταγράφονται σε ειδικό έντυπο.



Σχήμα 4.7 Ανοιχτή (α) και κλειστή (β) χωροσταθμική όδευση



Σχήμα 4.8 Πλήρως εξαρτημένη (α) και εξαρτημένη από το ένα άκρο(β) χωροσταθμική όδευση

Ειδικά για τις κλειστές χωροσταθμικές οδεύσεις, καθώς και για τις ανοιχτές πλήρως εξαρτημένες, με τις οποίες προσδιορίζονται διαδοχικά τα υψόμετρα σημείων, υπάρχει η δυνατότητα επιπλέον ελέγχου (και διόρθωσης) των μετρήσεων, εκτός από αυτόν της σύγκρισης των αποτελεσμάτων των μετρήσεων σε μετάβαση και επιστροφή.

- Πλήρως εξαρτημένη χωροσταθμική όδευση

Σε αυτή την περίπτωση εφαρμόζεται η ακόλουθη διαδικασία για τον προσδιορισμό των υψόμετρων των σημείων:

1. Υπολογίζονται οι διαφορές ( $O - E$ ) για κάθε στάση χωροβάτη, για την μετάβαση και την επιστροφή.
2. Υπολογίζονται οι υψομετρικές διαφορές  $\Delta H^{aller}$  και  $\Delta H^{retour}$  μεταξύ των σημείων των οποίων θέλουμε να προσδιορίσουμε το υψόμετρο.
3. Υπολογίζονται οι μέσοι όροι των υψομετρικών διαφορών από μετάβαση και επιστροφή.

4. Υπολογίζεται το άθροισμα των υψομετρικών διαφορών  $\sum \Delta H_{ij}$ , που είναι η μετρημένη υψομετρική διαφορά μεταξύ των Χωροσταθμικών Αφετηριών αρχής και τέλους.

5. Η μετρημένη υψομετρική διαφορά συγκρίνεται με αυτήν που υπολογίζεται από τα υψόμετρα των Χωροσταθμικών Αφετηριών, και που είναι η, θεωρητικά, σωστή.

6. Η διαφορά των δύο υψομετρικών διαφορών (μετρημένη  $\Delta H$ - υπολογισμένη  $\Delta H$ ) δίνει το συνολικό σφάλμα της χωροστάθμησης. Αν το σφάλμα αυτό δεν υπερβαίνει το όριο που δίνουν οι κανονισμοί υπολογίζεται στη συνέχεια η συνολική διόρθωση  $\delta$ :

$$\delta = \text{Υπολογισμένη } \Delta H \text{ (δει-πρέπει)} - \text{Μετρημένη } \Delta H \text{ (εστί-είναι)} \quad (4.12)$$

η οποία κατανέμεται στις υψομετρικές διαφορές των σημείων και υπολογίζονται οι τελικές υψομετρικές διαφορές.

7. Τέλος υπολογίζονται διαδοχικά τα υψόμετρα των σημείων που ενδιαφέρουν.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τον προσδιορισμό των υψόμετρων των σημείων Α, Β και Γ έγινε γεωμετρική χωροστάθμηση σε μετάβαση και επιστροφή από την χωροσταθμική αφετηρία R100 στην χωροσταθμική αφετηρία R200. Τα αποτελέσματα των μετρήσεων δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Να υπολογισθούν τα τελικά υψόμετρα των Α, Β και Γ. Δίνεται:  $H_{R100} = 332.826\text{m}$  και  $H_{R200} = 331.735\text{m}$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α/α	ΜΗΚΗ (βήματα)	Οπισθεν	Εμπροσθεν	Ο - Ε	Προσωρινές ΔΗ	δΔΗ	Τελικές ΔΗ	Υψόμετρα
ΜΕΤΑΒΑΣΗ (aller)								
R100	20/23	1.523						<b>332.826</b>
1	24/22	2.019	0.629	+0.894				
A	17/19	0.485	1.729	+0.290	+ 1.186	-0.002	+1.184	334.010
B	25/23	0.738	1.344	-0.859	-0.861	-0.001	-0.862	333.148
2	22/22	2.888	1.633	-0.895				
Γ	20/21	0.932	1.959	+0.929	+0.033	-0.002	+0.031	333.179
R200	23		2.377	-1.445	-1.443	-0.001	-1.444	<b>331.735</b>
		ΣΟ-ΣΕ=8.585- 9.671= <b>-1.086m</b>						

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α/α	ΜΗΚΗ (βήματα)	Οπισθεν	Εμπροσθεν	Ο - Ε	Προσωρινές ΔΗ	δΔΗ	Τελικές ΔΗ	Υψόμετρα
ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ (retour)								
R200	19/20	1.892						
Γ	22/20	1.010	0.452	+1.440				
3	17/19	2.526	1.743	-0.733				
B	24/26	1.337	1.825	+0.701				
A	20/20	0.679	0.474	+0.863				
4	18/19	0.732	1.381	-0.702				
R100	17		1.218	-0.486				
		ΣΟ-ΣΕ=8.176- 7.093=						
		<b>-1.083m</b>						

1. Υπολογίζονται οι  $\Delta H_{R100-A}^{aller}$ ,  $\Delta H_{A-B}^{aller}$ ,  $\Delta H_{B-\Gamma}^{aller}$ ,  $\Delta H_{\Gamma-R200}^{aller}$  (στήλη 5) :

$$\Delta H_{R100-A}^{aller} = (O_{R100} - E_1) + (O_1 - E_A) = (1.523 - 0.629) + (2.019 - 1.729) =$$

$$0.894 + 0.290 \Rightarrow \Delta H_{R100-A}^{aller} = +1.184m$$

$$\Delta H_{A-B}^{aller} = (O_A - E_B) = (0.485 - 1.344) \Rightarrow \Delta H_{A-B}^{aller} = -0.859m$$

$$\Delta H_{B-\Gamma}^{aller} = (O_B - E_2) + (O_2 - E_\Gamma) = (0.738 - 1.633) + (2.888 - 1.959) =$$

$$-0.895 + 0.929 \Rightarrow \Delta H_{B-\Gamma}^{aller} = +0.034m$$

$$\Delta H_{\Gamma-R200}^{aller} = (O_\Gamma - E_{R200}) = (0.932 - 2.377) \Rightarrow \Delta H_{\Gamma-R200}^{aller} = -1.445m$$

2. Υπολογίζονται οι  $\Delta H_{R200-\Gamma}^{retour}$ ,  $\Delta H_{\Gamma-B}^{retour}$ ,  $\Delta H_{B-A}^{retour}$ ,  $\Delta H_{A-R100}^{retour}$  (στήλη 5) :

$$\Delta H_{\Gamma-R200}^{retour} = (O_{R200} - E_\Gamma) = (1.892 - 0.452) \Rightarrow \Delta H_{\Gamma-R200}^{retour} = +1.440m$$

$$\Delta H_{B-\Gamma}^{retour} = (O_\Gamma - E_3) + (O_3 - E_B) = (1.010 - 1.743) + (2.526 - 1.825) =$$

$$-0.733 + 0.701 \Rightarrow \Delta H_{B-\Gamma}^{retour} = -0.032m$$

$$\Delta H_{A-B}^{retour} = (O_B - E_A) = (1.337 - 0.474) \Rightarrow \Delta H_{A-B}^{retour} = +0.863m$$

$$\Delta H_{R100-A}^{retour} = (O_A - E_4) + (O_4 - E_{R100}) = (0.679 - 1.381) + (0.732 - 1.218) =$$

$$-0.702 - 0.486 \Rightarrow \Delta H_{R100-A}^{retour} = -1.188m$$



3. Υπολογίζονται οι μέσοι όροι από μετάβαση και επιστροφή (στήλη 6 – Προσωρινές ΔΗ):

$$\Delta H_{R100-A} = \frac{|\Delta H_{R100-A}^{aller}| + |\Delta H_{R100-A}^{retour}|}{2} = \frac{|+1.184| + |-1.188|}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta H_{R100-A} = +1.186m$$

$$\Delta H_{A-B} = \frac{|\Delta H_{A-B}^{aller}| + |\Delta H_{A-B}^{retour}|}{2} = \frac{|-0.859| + |+0.863|}{2} \Rightarrow \Delta H_{A-B} = -0.861m$$

$$\Delta H_{B-\Gamma} = \frac{|\Delta H_{B-\Gamma}^{aller}| + |\Delta H_{B-\Gamma}^{retour}|}{2} = \frac{|+0.034| + |-0.032|}{2} \Rightarrow \Delta H_{B-\Gamma} = +0.033m$$

$$\Delta H_{\Gamma-R200} = \frac{|\Delta H_{\Gamma-R200}^{aller}| + |\Delta H_{\Gamma-R200}^{retour}|}{2} = \frac{|-1.445| + |+1.440|}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta H_{\Gamma-R200} = -1.443m$$

4. Υπολογίζεται η μετρημένη υψομετρική διαφορά  $\Delta H_{R100-R200}^M$ , από το άθροισμα των μέσων όρων των επιμέρους υψομετρικών διαφορών:

$$\Delta H_{R100-R200}^M = \Delta H_{R100-A} + \Delta H_{A-B} + \Delta H_{B-\Gamma} + \Delta H_{\Gamma-R200} =$$

$$+ 1.186 - 0.861 + 0.033 - 1.443 \Rightarrow \Delta H_{R100-R200}^M = -1.085m$$

5. Από τα υψόμετρα των χωροσταθμικών αφετηριών  $R_{100}$  και  $R_{200}$  υπολογίζεται η «ορθή» υψομετρική διαφορά  $\Delta H_{R100-R200}^Y$  :

$$\Delta H_{R100-R200}^Y = H_{R200} - H_{R100} = 331.735 - 332.826 \Rightarrow \Delta H_{R100-R200}^Y = -1.091m$$

6. Επειδή  $\Delta H_{R100-R200}^Y \neq \Delta H_{R100-R200}^M$  οι επιμέρους υψομετρικές διαφορές (μέσοι όροι από μετάβαση και επιστροφή) πρέπει να διορθωθούν. Η συνολική διόρθωση  $\delta$  είναι :

$$\delta = \Delta H_{R100-R200}^Y - \Delta H_{R100-R200}^M = 1.091 - (-1.085) \Rightarrow \delta = -0.006m$$

7. Η διαφορά αυτή μοιράζεται στις επιμέρους υψομετρικές διαφορές (στήλη 7 –  $\delta\Delta H$ ), και υπολογίζονται οι τελικές υψομετρικές διαφορές. Συνήθως δίνεται μεγαλύτερη διόρθωση στις υψομετρικές διαφορές που έχουν προκύψει από περισσότερες της μιας στάσεις χωροβάτη. Έτσι, στις  $\Delta H_{R100-A}$  και  $\Delta H_{B-\Gamma}$  δίνεται διόρθωση  $-0.002m$  ενώ τις υπόλοιπες  $-0.001m$ . (στήλη 8 – Τελικές ΔΗ):

$$\Delta H_{R100-A} = +1.186 - 0.002 = +1.184m$$

$$\Delta H_{R100-A} = +1.186 - 0.002 = +1.184m$$

$$\Delta H_{B-\Gamma} = +0.033 - 0.002 = +0.031m$$

$$\Delta H_{\Gamma-R200} = -1.443 - 0.001 = -1.444m$$

8. Τέλος υπολογίζονται τα υψόμετρα των σημείων Α, Β και Γ (στήλη 9 - Υψόμετρα):

$$H_A = H_{R100} + \Delta H_{R100-A} = 332.826 + 1.184 \Rightarrow H_A = 334.010\text{m}$$

$$H_B = H_A + \Delta H_{A-B} = 334.010 + (-0.862) \Rightarrow H_B = 333.148\text{m}$$

$$H_\Gamma = H_B + \Delta H_{B-\Gamma} = 333.148 + 0.031 \Rightarrow H_\Gamma = 333.179\text{m}$$

$$H_{R200} = H_\Gamma + \Delta H_{\Gamma-R200} = 333.179 + (-1.444) \Rightarrow H_{R200} = 331.735\text{m}$$

(για έλεγχο).

• *Κλειστή χωροσταθμική όδευση*

Στην περίπτωση της κλειστής χωροσταθμικής όδευσης το άθροισμα των επιμέρους υψομετρικών διαφορών (μέσοι όροι από μετάβαση και επιστροφή) πρέπει να είναι μηδέν (0). Ετσι, η συνολική διόρθωση υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\delta = 0(\text{πρέπει}) - \sum \Delta H(\text{είναι}) = -\sum \Delta H \quad (5.13)$$

όπου  $\sum \Delta H$  το άθροισμα των επιμέρους υψομετρικών διαφορών. Κατά τα άλλα ακολουθείται η ίδια ακριβώς διαδικασία με αυτή που περιγράφηκε για την ανοιχτή πλήρως εξαρτημένη χωροσταθμική όδευση.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ**

Μεταξύ των κορυφών Σ1, Σ2, Σ3, Σ4 μιας κλειστής όδευσης έγινε γεωμετρική χωροστάθμηση σε μετάβαση και επιστροφή. Οι μετρήσεις δίνονται στο έντυπο που ακολουθεί. Αν στην κορυφή Σ1 δοθεί αυθαίρετο υψόμετρο  $H_{\Sigma1} = 100.000\text{m}$  να υπολογισθούν τα υψόμετρα των υπόλοιπων κορυφών της όδευσης.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α/α	ΜΗΚΗ (βήματα)	Οπισθεν	Εμπροσθεν	Ο - Ε	Προσωρινές ΔΗ	ΔΔΗ	Τελικές ΔΗ	Υψόμετρα
<b>ΜΕΤΑΒΑΣΗ (aller)</b>								
Σ1	22/25	0.826						<b>100.000</b>
Σ2	20/18	2.002	1.329	-0.503	-0.505	+0.002	-0.503	99.497
Σ3	23/20	0.958	1.545	+0.457	+0.458	+0.002	0.460	99.957
Σ4	20/19	0.637	1.332	-0.374	-0.374	+0.002	-0.372	99.585
Σ1			0.225	0.412	+0.413	+0.002	+0.415	100.000
		ΣΟ-ΣΕ= 4.423-4.431= <b>-0.008m</b>						
<b>ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ (retour)</b>								
Σ1	19/20	1.256						
Σ4	22/20	0.749	1.670	-0.414				
Σ3	24/20	1.009	0.375	+0.374				
Σ2	17/18	1.528	1.468	-0.459				
Σ1	20/20		1.022	+0.506				
		ΣΟ-ΣΕ= 4.542-4.535= <b>+0.007m</b>						

1. Υπολογίζονται οι  $\Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_2}^{\text{aller}}$ ,  $\Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_3}^{\text{aller}}$ ,  $\Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_4}^{\text{aller}}$ ,  $\Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_1}^{\text{aller}}$  (στήλη 5) :

$$\Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_2}^{\text{aller}} = (O_{\Sigma_1} - E_{\Sigma_2}) = (0.826 - 1.329) \Rightarrow \Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_2}^{\text{aller}} = -0.503\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_3}^{\text{aller}} = (O_{\Sigma_2} - E_{\Sigma_3}) = (2.002 - 1.545) \Rightarrow \Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_3}^{\text{aller}} = +0.457\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_4}^{\text{aller}} = (O_{\Sigma_3} - E_{\Sigma_4}) = (0.958 - 1.332) \Rightarrow \Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_4}^{\text{aller}} = -0.374\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_1}^{\text{aller}} = (O_{\Sigma_4} - E_{\Sigma_1}) = (0.637 - 0.225) \Rightarrow \Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_1}^{\text{aller}} = +0.412\text{m}$$

2. Ομοια υπολογίζονται οι  $\Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_1}^{\text{retour}}$ ,  $\Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_2}^{\text{retour}}$ ,  $\Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_3}^{\text{retour}}$ ,  $\Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_4}^{\text{retour}}$  (στήλη 5) :

$$\Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_4}^{\text{retour}} = (O_{\Sigma_1} - E_{\Sigma_4}) = (1.256 - 1.670) \Rightarrow \Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_4}^{\text{retour}} = -0.414\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_3}^{\text{retour}} = (O_{\Sigma_4} - E_{\Sigma_3}) = (0.749 - 0.375) \Rightarrow \Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_3}^{\text{retour}} = +0.374\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_2}^{\text{retour}} = (O_{\Sigma_3} - E_{\Sigma_2}) = (1.009 - 1.468) \Rightarrow \Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_2}^{\text{retour}} = -0.459\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_1}^{\text{retour}} = (O_{\Sigma_2} - E_{\Sigma_1}) = (1.528 - 1.022) \Rightarrow \Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_1}^{\text{retour}} = +0.506\text{m}$$

3. Υπολογίζονται οι μέσοι όροι από μετάβαση και επιστροφή (στήλη 6- Προσωρινές  $\Delta H$ ) :

$$\Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_2} = \frac{|\Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_2}^{\text{aller}}| + |\Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_1}^{\text{retour}}|}{2} = \frac{|-0.503| + |0.506|}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_2} = -0.505\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_3} = \frac{|\Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_3}^{\text{aller}}| + |\Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_2}^{\text{retour}}|}{2} = \frac{|0.457| + |-0.459|}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_3} = +0.458\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_4} = \frac{|\Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_4}^{\text{aller}}| + |\Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_3}^{\text{retour}}|}{2} = \frac{|-0.374| + |0.374|}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_4} = -0.374\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_1} = \frac{|\Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_1}^{\text{aller}}| + |\Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_4}^{\text{retour}}|}{2} = \frac{|0.412| + |-0.414|}{2} \Rightarrow$$

$$\Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_1} = +0.413\text{m}$$

4. Υπολογίζεται το άθροισμα των μέσων όρων των επιμέρους υψομετρικών διαφορών,  $\Sigma \Delta H$  :

$$\Sigma \Delta H = \Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_2} + \Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_3} + \Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_4} + \Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_1} =$$

$$-0.505 + 0.458 - 0.374 + 0.413 = -0.008\text{m}$$

5. Η συνολική διόρθωση  $\delta$  είναι :

$$\delta = 0 - \sum \Delta H = 0 - (-0.008) \Rightarrow \delta = +0.008\text{m}$$

Η διαφορά αυτή ισοκατανέμεται στις επιμέρους υψομετρικές διαφορές (στήλη 7 –  $\delta\Delta H$ ), και υπολογίζονται οι τελικές υψομετρικές διαφορές (στήλη 8 – Τελικές  $\Delta H$ ):

$$\Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_2} = -0.505 + 0.002 = -0.503\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_3} = +0.458 + 0.002 = +0.460\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_4} = -0.374 + 0.002 = -0.372\text{m}$$

$$\Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_1} = +0.413 + 0.002 = +0.415\text{m}$$

6. Τέλος υπολογίζονται τα υψόμετρα των κορυφών  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$  και  $\Sigma_4$  (στήλη 9-Υψόμετρα):

$$H_{\Sigma_2} = H_{\Sigma_1} + \Delta H_{\Sigma_1-\Sigma_2} = 100.000 + (-0.503) \Rightarrow H_{\Sigma_2} = 99.497\text{m}$$

$$H_{\Sigma_3} = H_{\Sigma_2} + \Delta H_{\Sigma_2-\Sigma_3} = 99.497 + 0.460 \Rightarrow H_{\Sigma_3} = 99.957\text{m}$$

$$H_{\Sigma_4} = H_{\Sigma_3} + \Delta H_{\Sigma_3-\Sigma_4} = 99.957 + (-0.372) \Rightarrow H_{\Sigma_4} = 99.585\text{m}$$

$$H_{\Sigma_1} = H_{\Sigma_4} + \Delta H_{\Sigma_4-\Sigma_1} = 99.585 + 0.415 \Rightarrow H_{\Sigma_1} = 100.000\text{m} \text{ (για έλεγχο).}$$

#### 4.8 ΟΡΓΑΝΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΗΣΗΣ - ΧΩΡΟΒΑΤΕΣ

Το βασικό όργανο για την μέτρηση των υψομετρικών διαφορών είναι ο χωροβάτης σε συνδυασμό με τους χωροσταθμικούς πήχεις (σταδίες). Ο χωροβάτης αποτελείται από ένα τηλεσκόπιο, το οποίο υλοποιεί ένα σκοπευτικό άξονα ( $\Sigma\Sigma'$ ) και το οποίο μπορεί να περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα ( $\Pi\Pi'$ ). Ο σκοπευτικός άξονας ( $\Sigma\Sigma'$ ) οριζοντιώνεται με μεγάλη ακρίβεια με τη βοήθεια μιας σωληνωτής αεροστάθμης ή ενός ισοσταθμητή (compensator). Ο χωροβάτης έχει επίσης κοχλίες εστίασης και οριζόντιων μικροκινήσεων καθώς και μια σφαιρική αεροστάθμη (αντίστοιχη με αυτή των θεοδόλιχων) για την χονδρική οριζοντίωσή του. Για τις μετρήσεις τοποθετείται σε τρίποδα.

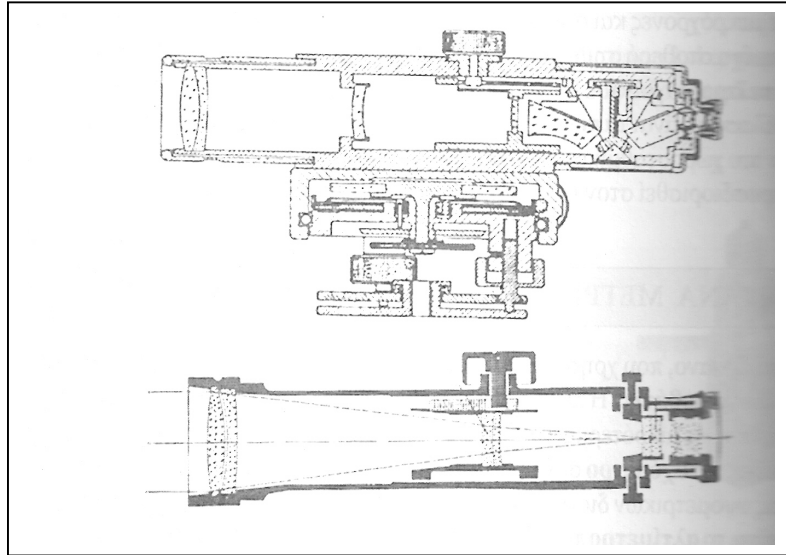
Οι χωροβάτες διακρίνονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες ανάλογα με τον τρόπο λήψης των αναγνώσεών τους : *οπτικομηχανικούς* (απευθείας αναγνώσεις στις σταδίες) και *ψηφιακούς* (αναγνώσεις σε ειδικές κωδικοποιημένες σταδίες).

##### 4.8.1 Οπτικομηχανικοί χωροβάτες

Οι οπτικομηχανικοί χωροβάτες (σχ. 4.9) ανάλογα με τον τρόπο οριζοντίωσης του σκοπευτικού άξονα ( $\Sigma\Sigma'$ ) διακρίνονται σε *απλούς* και *αυτόματους*.

Στους *απλούς χωροβάτες* η οριζοντίωση του  $\Sigma\Sigma'$  γίνεται μέσω μιας σωληνωτής αεροστάθμης. Ο σκοπευτικός άξονας είναι οριζόντιος όταν γίνει παράλληλος προς την κανονική ευθεία της αεροστάθμης ( $AA'$ ). Οι απλοί χωροβάτες τείνουν σήμερα να εκλείψουν.

Στους *αυτόματους χωροβάτες* ο σκοπευτικός άξονας είναι συνδεδεμένος με τον κατακόρυφο άξονα (ΠΠ'). Ο ΣΣ' οριζοντιώνεται αυτόματα μετά την χονδρική οριζοντίωσή του με την σφαιρική αεροστάθμη. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω του *ισοσταθμητή*, ένα σύστημα αναρτημένων πρισμάτων σε μορφή εκκρεμούς, που είναι συνδεδεμένο με το τηλεσκόπιο.



Σχήμα 4.9 Σχηματική τομή χωροβάτη [2]

#### 4.8.2 Ψηφιακοί χωροβάτες

Τη δεκαετία του 1980 εμφανίσθηκαν οι ψηφιακοί χωροβάτες (Εικόνα 4.3) σε συνδυασμό με τις ειδικές κωδικοποιημένες σταδίες (bar coded) από πολυμερές υλικό (fiberglass), οι οποίοι τείνουν σήμερα να αντικαταστήσουν τους οπτικομηχανικούς. Οι χωροβάτες αυτοί είναι αυτόματοι και έχουν την δυνατότητα αυτοελέγχου και αυτορυθμίσεων. Διαθέτουν ενσωματωμένο μικροϋπολογιστή που υποστηρίζει λογισμικό το οποίο ο χρήστης μπορεί να χρησιμοποιήσει κατά τη διάρκεια των μετρήσεων. Οι αναγνώσεις στις σταδίες γίνονται αυτόματα, ανεξάρτητα από την εκτίμηση του παρατηρητή και αποθηκεύονται στην ενσωματωμένη καταγραφική μονάδα. Έτσι, ο παρατηρητής είναι υπεύθυνος μόνον για την καλή σκόπευση στις σταδίες ενώ, λόγω της αυτόματης καταγραφής των μετρήσεων, έχουν εξαλειφθεί τα χονδροειδή σφάλματα στην ανάγνωση και καταγραφή των μετρήσεων. Η ακρίβεια των χωροβατών αυτών σε συνδυασμό με τις ειδικές σταδίες είναι της τάξης του  $\pm 1\text{mm} / \sqrt{\text{km}}$  ή και καλύτερη.



Εικόνα 4.3 Ψηφιακός χωροβάτης [12]

Τόσο οι οπτικομηχανικοί όσο και οι ψηφιακοί χωροβάτες διακρίνονται σε χωροβάτες γενικής χρήσης και χωροβάτες ακριβείας. Οι τελευταίοι διαθέτουν τηλεσκόπια με μεγάλη μεγέθυνση και μεγάλο άνοιγμα αντικειμενικού φακού, ευαίσθητα συστήματα οριζοντίωσης (αεροστάθμες μεγάλης ευαισθησίας ή ευαίσθητους ισοσταθμητές) και συστήματα ανάγνωσης ακριβείας. Συνδυάζονται με ειδικές σταδίες (σταδίες invar) και παρελκόμενα, ενώ για τους οπτικομηχανικούς χωροβάτες ακριβείας ακολουθείται ειδική διαδικασία αναγνώσεων.

### 4.8.3 Χωροβάτες Laser

Τα όργανα αυτά εμφανίστηκαν τη δεκαετία του 1980. Η αρχή λειτουργίας τους βασίζεται στην εκπομπή μιας ακτίνας laser η οποία προβάλλεται από ένα περιστρεφόμενο πρίσμα έτσι ώστε να υλοποιείται ένα οριζόντιο επίπεδο. Μια μονάδα εντοπισμού τοποθετημένη σε αριθμημένη ράβδο ή σταδία παρέχει τη δυνατότητα άμεσης ανάγνωσης των υψομετρικών διαφορών σε σχέση με το υλοποιημένο οριζόντιο επίπεδο (Εικόνα 4.4). Η ακρίβεια των χωροβατών αυτών είναι της τάξης του  $\pm 1\text{cm}$ .



Εικόνα 4.4 Χωροβάτης laser [13]

Τέλος υπάρχουν ειδικά εξαρτήματα εκπομπής laser που προσαρμόζονται είτε στο προσοφθάλμιο του τηλεσκοπίου του χωροβάτη είτε επιβατικά και υλοποιούν τον σκοπευτικό άξονα δηλ. υλοποιούν μια οριζόντια γραμμή.

### 4.8.4 Παρελκόμενα γεωμετρικής χωροστάθμησης

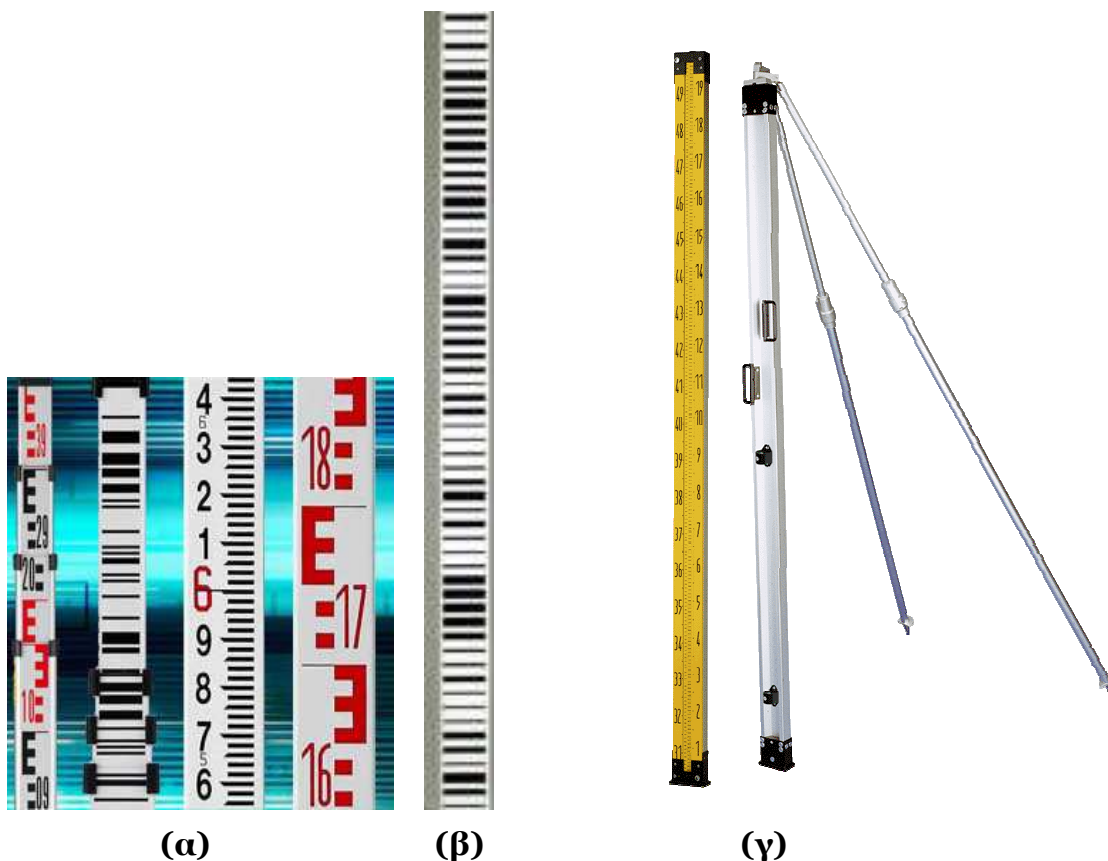
Για την πραγματοποίηση των μετρήσεων της γεωμετρικής χωροστάθμησης χρησιμοποιούνται, σε συνδυασμό με το χωροβάτη, *χωροσταθμικοί πήχεις ή σταδίες*. Οι σταδίες τοποθετούνται κατακόρυφες στα σημεία των οποίων πρόκειται να προσδιορισθεί η υψομετρική διαφορά. Στις χωροσταθμικές οδεύσεις στα σημεία αλλαγής οι σταδίες χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με τις *χωροσταθμικές βάσεις ή χελώνες*.

#### 4.8.4α Χωροσταθμικοί πήχεις ή σταδίες

Οι χωροσταθμικοί πήχεις ή σταδίες που χρησιμοποιούνται μαζί με το χωροβάτη στη γεωμετρική χωροστάθμηση είναι αριθμημένοι κανόνες με υποδιαίρεσεις ανά cm και αρίθμηση ανά 10cm (Εικόνα 4.5α). Παλαιότερα κατασκευάζονταν από ξύλο, σήμερα κατασκευάζονται από αλουμίνιο ή fiberglass, είναι πτυσσόμενες ή

τηλεσκοπικές, με αποτέλεσμα να είναι ελαφρότερες και εύχρηστες στη μεταφορά. Πολλές από αυτές δίνουν τη δυνατότητα απευθείας ανάγνωσης 1mm. Οι ψηφιακοί χωροβάτες χρησιμοποιούν ειδικές κωδικοποιημένες σταδίες από fiberglass (Εικόνα 4.5β) με μικρό συντελεστή γραμμικής διαστολής. Στις σταδίες αυτές, οι κλασσικές υποδιαιρέσεις έχουν αντικατασταθεί από barcodes.

Τόσο οι οπτικομηχανικοί όσο και οι ψηφιακοί χωροβάτες ακριβείας συνδυάζονται με έναν ειδικό τύπο σταδίων, τις *σταδίες invar* (Εικόνα 4.5γ). Έχουν ενσωματωμένη σφαιρική αεροστάθμη, και χρησιμοποιούνται με ειδικά στηρίγματα (αντηρίδες) και ειδικές βαριές χελώνες για την όσο το δυνατόν καλύτερη σταθερότητά τους. Οι σταδίες invar, συμβατικές ή κωδικοποιημένες, είναι μονοκόμματα και έχουν ενσωματωμένη ταινία από μέταλλο invar πάνω στο οποίο είναι χαραγμένες οι υποδιαιρέσεις. Οι συμβατικές σταδίες invar έχουν δύο σειρές χαραγών ανά 1cm ή 0.5cm, διπλή αρίθμηση ανά σειρά διαιρέσεων, δεξιά και αριστερά της ταινίας invar (Εικόνα 4.5γ). Σε κάθε σκόπευση, σε αυτές τις σταδίες, λαμβάνονται δύο αναγνώσεις, μια σε κάθε κλίμακα. Η διαφορά αυτών των αναγνώσεων ανά σκόπευση είναι σταθερός αριθμός και αποτελεί τη *σταθερά* της σταδίας.



Εικόνα 4.5 Τύποι σταδίων [12], [13], [14]

#### 4.8.4β Χωροσταθμικές βάσεις ή χελώνες

Οι σταδίες πρέπει να είναι κατακόρυφες κατά τη διάρκεια των μετρήσεων. Αυτό εξασφαλίζεται με τη βοήθεια σφαιρικής αεροστάθμης ενσωματωμένης ή μη. Τέλος η σταθερότητά τους κατά τη διάρκεια των μετρήσεων στα σημεία αλλαγής

επιτυγχάνεται με τη χρήση ειδικών βάσεων, τις χωροσταθμικές βάσεις ή χελώνες (Εικόνα 4.6).



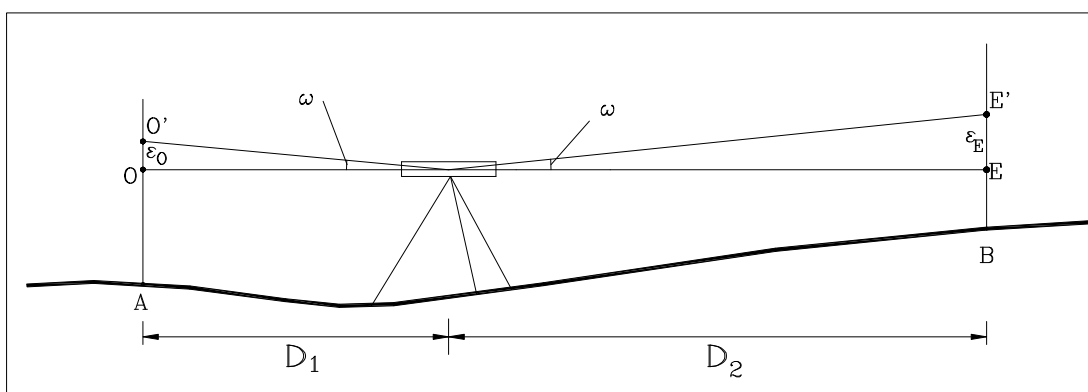
Εικόνα 4.6 Χωροσταθμική βάση [14]

#### 4.8.5 Συνθήκες ορθής λειτουργίας χωροβατών – Έλεγχοι – Αποκατάσταση

Τόσο στους οπτικομηχανικούς όσο και στους ψηφιακούς χωροβάτες πρέπει να πληρούνται οι συνθήκες ορθής λειτουργίας. Οι συνθήκες αυτές αφορούν τους βασικούς άξονες του οργάνου και τη μεταξύ τους σχέση, και είναι οι ακόλουθες :

- Ο σκοπευτικός άξονας του χωροβάτη ( $\Sigma\Sigma'$ ) να είναι οριζόντιος όταν η σωληνωτή αεροστάθμη είναι στο κανονικό της σημείο δηλ. ο σκοπευτικός άξονας  $\Sigma\Sigma'$  να είναι παράλληλος με την κανονική ευθεία  $AA'$  της αεροστάθμης όταν η τελευταία βρίσκεται στο κανονικό της σημείο ( $\Sigma\Sigma' // AA'$ ).

Η συνθήκη αυτή ονομάζεται *πρωτεύουσα* ή *κύρια συνθήκη* του χωροβάτη δεδομένου ότι, όταν πληρούνται, οι σκοπεύσεις που λαμβάνονται είναι ορθές. Στην αντίθετη περίπτωση υπάρχει σφάλμα σκοπευτικού άξονα, και οι αναγνώσεις που λαμβάνονται δεν είναι ορθές, αλλά έχουν ένα συστηματικό σφάλμα.



Σχήμα 4.10 Επίδραση από τη μη πλήρωση της κύριας συνθήκης

Όπως φαίνεται στο σχήμα 4.10, στην περίπτωση που δεν πληρούται η συνθήκη αυτή, ο σκοπευτικός άξονας σχηματίζει γωνία  $\omega$  με την κανονική ευθεία της αεροστάθμης. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα στις αναγνώσεις στις σταδίες Όπισθεν και Έμπροσθεν να περιέχονται τα γραμμικά σφάλματα  $\varepsilon_O$  και  $\varepsilon_E$ . Επομένως αντί για τις σωστές αναγνώσεις  $O$  και  $E$  λαμβάνονται οι λανθασμένες  $O'$  και  $E'$  αντίστοιχα. Από το σχήμα 4.10 είναι φανερό ότι :

$$O' = O + \varepsilon_O \text{ και } E' = E + \varepsilon_E \quad (4.14)$$



άρα :

$$\Delta H = O' - E' = (O + \varepsilon_O) - (E + \varepsilon_E) = (O - E) + (\varepsilon_O - \varepsilon_E) \quad (4.15)$$

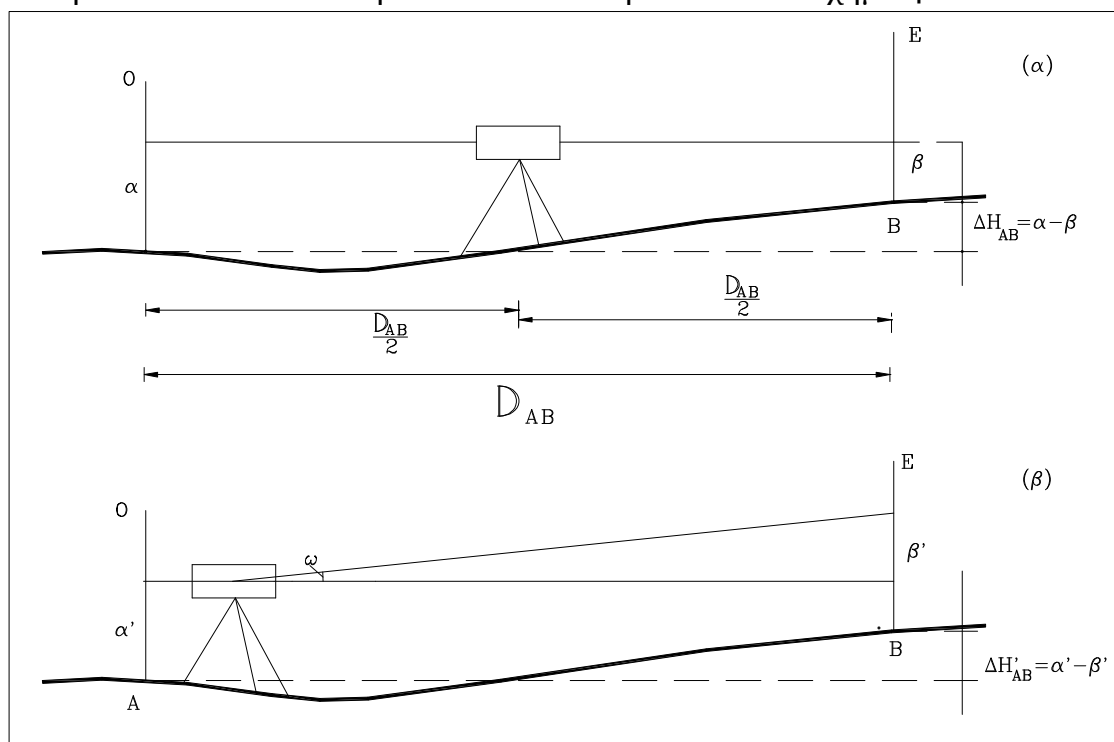
Δηλαδή, σε κάθε μετρημένη υψομετρική διαφορά υπεισέρχεται το συστηματικό σφάλμα  $(\varepsilon_O - \varepsilon_E)$ . Από το σχήμα 4.10 επίσης προκύπτει ότι :

$$\varepsilon_O = D_1 \tan \omega = D_1 \omega^{\text{rad}} \quad \text{και} \quad \varepsilon_E = D_2 \tan \omega = D_2 \omega^{\text{rad}} \quad (4.16)$$

επομένως το σφάλμα του σκοπευτικού άξονα είναι ανάλογο της απόστασης του χωροβάτη από τις σταδίες.

Στην ειδική περίπτωση που  $D_1 = D_2$ , είναι φανερό ότι τα σφάλματα  $\varepsilon_O$  και  $\varepsilon_E$  γίνονται ίσα ( $\varepsilon_O = \varepsilon_E$ ) και επομένως, μολονότι ο σκοπευτικός άξονας δεν είναι οριζόντιος, η μετρημένη υψομετρική διαφορά είναι σωστή.

Από τα παραπάνω συμπεραίνεται ότι το σφάλμα από τη μη πλήρωση της πρωτεύουσας συνθήκης μπορεί να εξαλειφθεί αν ο χωροβάτης τοποθετείται στη μεσοκάθετη της απόστασης μεταξύ των δύο σταδίων. Μολονότι η επίδραση από τη μη πλήρωση της κύριας συνθήκης μπορεί να εξαλειφθεί όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, είναι σκόπιμο να γίνεται έλεγχος για τη ύπαρξη σφάλματος στον σκοπευτικό άξονα πριν την έναρξη των μετρήσεων. Ο έλεγχος αυτός γίνεται στο ύπαιθρο και ακολουθείται η διαδικασία που φαίνεται στο σχήμα 4.11.



Σχήμα 4.11 Έλεγχος πλήρωσης κύριας συνθήκης χωροβάτη

α. Ο χωροβάτης τοποθετείται στη μεσοκάθετη της απόστασης μεταξύ των δύο σταδίων και προσδιορίζεται η υψομετρική διαφορά  $\Delta H_{AB}$  (σχ. 4.11 - α)

β. Ο χωροβάτης τοποθετείται κοντά στο A (σταδία Όπισθεν) ή στο B (σταδία Έμπροσθεν) και προσδιορίζεται η υψομετρική διαφορά  $\Delta H'_{AB}$  (σχ. 4.11 - β) .

Αν  $\Delta H_{AB} = \Delta H'_{AB}$  ο σκοπευτικός άξονας του οργάνου είναι οριζόντιος. Στην αντίθετη περίπτωση ( $\Delta H_{AB} \neq \Delta H'_{AB}$ ) ο σκοπευτικός άξονας παρουσιάζει κλίση ως προς την (οριζόντια) κανονική ευθεία της αεροστάθμης. Η γωνία κλίσης εκφρασμένη σε ακτίνια (*rad*) υπολογίζεται από την παρακάτω σχέση :

$$\omega = \frac{\Delta H'_{AB} - \Delta H_{AB}}{D_{AB}} \quad (4.17)$$

όπου  $D_{AB}$  η απόσταση των δύο σταδίων.

Ο έλεγχος αυτός είναι γνωστός και ως «έλεγχος άκρου – μέσου» και ισχύει για όλες τις κατηγορίες των χωροβατών (απλούς ή αυτόματους, οπτικομηχανικούς ή ψηφιακούς). Η εξάλειψη του σφάλματος γίνεται όπως αναφέρθηκε παραπάνω με τον χωροβάτη στη μεσοκάθετη μεταξύ των σταδίων.

Οι ψηφιακοί χωροβάτες διαθέτουν στο λογισμικό τους υπορουτίνα με την οποία, μέσω ειδικής διαδικασίας, ελέγχεται η πλήρωση της κύριας συνθήκης του οργάνου (υπορουτίνα «*Check & Adjust*»). Με την υπορουτίνα αυτή προσδιορίζεται κάθε φορά η γωνία  $\omega$  που σχηματίζει ο σκοπευτικός άξονας με το οριζόντιο επίπεδο. Η γωνία εκφράζεται σε εξηκονταδικά δευτερόλεπτα (") και έχει θετικό πρόσημο, αν ο σκοπευτικός άξονας είναι πάνω από το οριζόντιο επίπεδο ή αρνητικό στην αντίθετη περίπτωση. Η τιμή αυτή αποθηκεύεται στην εσωτερική μνήμη του οργάνου έτσι ώστε, κάθε φορά που το όργανο πραγματοποιεί μια μέτρηση, να υπολογίζεται η αντίστοιχη διόρθωση και να καταγράφεται η διορθωμένη, σωστή μέτρηση. Για τον λόγο αυτό, με τους ψηφιακούς χωροβάτες δεν υπάρχει η απαίτηση της τοποθέτησής τους στη μεσοκάθετη μεταξύ των σταδίων, αλλά αρκεί οι αποστάσεις οργάνου - σταδίων να μην υπερβαίνουν το λόγο 1 : 2.

- Η κανονική ευθεία ( $AA'$ ) της αεροστάθμης να είναι κάθετη στον κατακόρυφο άξονα ( $PPP'$ ) του οργάνου ( $AA' \perp PPP'$ ).

Η συνθήκη αυτή ονομάζεται και *δευτερεύουσα* συνθήκη. Όταν πληρούνται αποφεύγονται οι μεγάλες αποκλίσεις της αεροστάθμης και δεν χρειάζεται να διορθώνεται η αεροστάθμη σε κάθε σκόπευση. Η συνθήκη ελέγχεται και αποκαθίσταται όπως στα θεοδόλιχα.

- Το ένα από τα δύο νήματα του σταυρονήματος του προσοφθάλμιου να είναι οριζόντιο.

#### 4.9 ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΗΣΕΙΣ

Όπως και σε κάθε είδος μετρήσεων έτσι και στις χωροσταθμήσεις τα σφάλματα των μετρήσεων διακρίνονται σε τρεις βασικές κατηγορίες (ενότητα 1.2.3):

- Χονδροειδή σφάλματα
- Συστηματικά σφάλματα
- Τυχαία σφάλματα

Τα *χονδροειδή* σφάλματα αφορούν λάθος ανάγνωση στη σταδία, λάθος καταγραφή των μετρήσεων, μετακίνηση της σταδίας σε σημείο αλλαγής χωρίς αυτό να γίνει αντιληπτό. Σήμερα, με την χρήση των ψηφιακών χωροβατών η επίδραση των χονδροειδών σφαλμάτων έχει ελαχιστοποιηθεί, δεδομένου ότι η

ανάγνωση στη σταδία και η καταγραφή της γίνεται από το όργανο χωρίς την παρεμβολή του παρατηρητή.

Τα *τυχαία* σφάλματα περιγράφονται στο αντίστοιχο κεφάλαιο περί σφαλμάτων. Στη συνέχεια εξετάζονται αναλυτικά τα συστηματικά σφάλματα που εμφανίζονται στις μετρήσεις υψομετρικών διαφορών με τη μέθοδο της γεωμετρικής χωροστάθμησης. Τα σφάλματα αυτά οφείλονται στη μη ορθή λειτουργία των οργάνων (π.χ. μη πλήρωση συνθηκών), σε κατασκευαστικές ατέλειες ή σε λάθη στη χρήση τους (π.χ. σφάλματα υποδιαιρέσεων στις σταδίες, μη κατακόρυφες σταδίες κατά τις μετρήσεις), στο περιβάλλον στο οποίο πραγματοποιούνται οι μετρήσεις (καμπυλότητα της γης) και στις συνθήκες μέτρησης (ατμοσφαιρική διάθλαση).

#### **4.9.1 Συστηματικά σφάλματα που οφείλονται στο χωροβάτη**

Προέρχονται από την μη πλήρωση των συνθηκών ορθής λειτουργίας του (ενότητα 4.8.5), ιδιαίτερα της κύριας συνθήκης. Όπως αναφέρθηκε στην αντίστοιχη ενότητα (4.8.5) εξαλείφονται με την τοποθέτηση του χωροβάτη στη μεσοκάθετη μεταξύ των δύο σταδίων.

#### **4.9.2 Συστηματικά σφάλματα που οφείλονται στις σταδίες**

Τα σφάλματα αυτά προέρχονται από σφάλμα στο μηδέν (αρχή) της σταδίας, ανώμαλες υποδιαιρέσεις στις σταδίες (αμελητέα για χωροσταθμίσεις συνηθισμένης ακρίβειας), μεταβολή του μήκους της σταδίας από την επίδραση της θερμοκρασίας (διαστολές – συστολές), σφάλμα στη σφαιρική αεροστάθμη της σταδίας, σφάλμα μη κατακόρυφης θέσης της σταδίας.

Το σφάλμα στο μηδέν της σταδίας εξαλείφεται όταν στις χωροσταθμίσεις χρησιμοποιείται μία μόνον σταδία, στην αντίθετη περίπτωση εξαλείφεται όταν το πλήθος των στάσεων του χωροβάτη είναι άρτιο.

Η κατακόρυφη τοποθέτηση της σταδίας ελέγχεται με τη βοήθεια της σφαιρικής αεροστάθμης (ενσωματωμένης ή επιβατικής), ενώ πιθανό σφάλμα στην σφαιρική αεροστάθμη αντιμετωπίζεται με τον έλεγχο της κατακόρυφης θέσης της σταδίας από τον παρατηρητή, χρησιμοποιώντας το κατακόρυφο νήμα του σταυρονήματος του οργάνου, σε δύο θέσεις της σταδίας κάθετες μεταξύ τους.

Συστηματικά σφάλματα παρουσιάζονται επίσης από την υποχώρηση του τρίποδα του οργάνου ή των χωροσταθμικών βάσεων κατά τη διάρκεια των μετρήσεων. Για την ελαχιστοποίηση τέτοιων σφαλμάτων πρέπει τόσο ο χωροβάτης όσο και οι σταδίες να τοποθετούνται σε σταθερό έδαφος και οι μετρήσεις σε κάθε στάση του οργάνου να ολοκληρώνονται χωρίς μεγάλη καθυστέρηση.

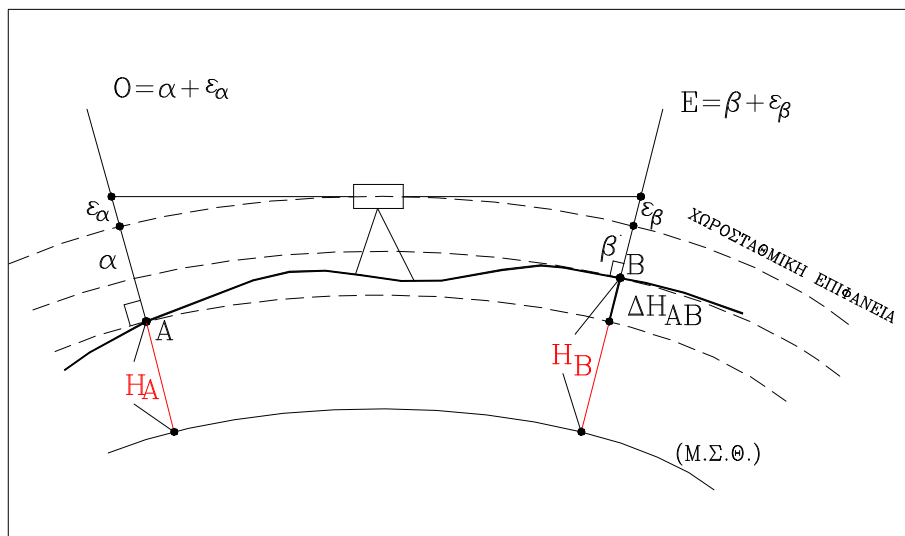
#### **4.9.3 Συστηματικά σφάλματα που οφείλονται στη διάθλαση και την καμπυλότητα της γης.**

Απομακρυσμένα σημεία του εδάφους φαίνονται ψηλότερα από ότι είναι στην πραγματικότητα εξαιτίας της ατμοσφαιρικής διάθλασης. Αντίθετα, εξαιτίας της καμπυλότητας της γης, φαίνονται χαμηλότερα (παράρτημα II).

Για τις συνηθισμένες αποστάσεις μεταξύ σταδίων και χωροβάτη και για χωροσταθμίσεις μέσης ακρίβειας η επίδραση των δύο παραπάνω παραγόντων

είναι αμελητέα. Σε κάθε περίπτωση δε, εξαλείφονται όταν ο χωροβάτης τοποθετείται στη μεσοκάθετη μεταξύ των δύο σταδίων. Πράγματι, όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.12, όταν ο χωροβάτης βρίσκεται στη μεσοκάθετη της απόστασης AB τα σφάλματα  $\varepsilon_\alpha$  και  $\varepsilon_\beta$  στις αναγνώσεις στις σταδίες Όπισθεν και Έμπροσθεν, που οφείλονται στην επίδραση της ατμοσφαιρικής διάθλασης και της καμπυλότητας της γης είναι ίσα ( $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$ ). Επομένως, μολονότι λαμβάνονται οι «εσφαλμένες αναγνώσεις  $(\alpha + \varepsilon_\alpha)$  και  $(\beta + \varepsilon_\beta)$  στις σταδίες Όπισθεν και Έμπροσθεν αντίστοιχα, η υψομετρική διαφορά  $\Delta H_{AB}$  θα είναι απαλλαγμένη από την επίδρασή τους :

$$\Delta H_{AB} = O - E = (\alpha + \varepsilon_\alpha) - (\beta + \varepsilon_\beta) = \alpha - \beta \quad (4.18)$$



**Σχήμα 4.12** Επίδραση της διάθλασης και της καμπυλότητας της γης στη Γεωμετρική Χωροστάθμιση

Στις περιπτώσεις χωροσταθμίσεων σε εδάφη με μεγάλες κλίσεις θα πρέπει να αποφεύγονται οι πολύ χαμηλές ή πολύ ψηλές σκοπεύσεις στις σταδίες γιατί τότε η επίδραση της διάθλασης είναι ανομοιόμορφη.

Στους ψηφιακούς χωροβάτες υπάρχουν ειδικές υπορουτίνες για τον υπολογισμό της επίδρασης της καμπυλότητας της γης και την αυτόματη διόρθωση των καταγραφών των μετρήσεων, ενώ στη περίπτωση των πολύ χαμηλών ή πολύ ψηλών σκοπεύσεων ο χωροβάτης δεν παίρνει μέτρηση αλλά εμφανίζει στην οθόνη μήνυμα σφάλματος.

Τέλος πρέπει να αναφερθεί ότι στις χωροσταθμίσεις ακριβείας πρέπει να γίνεται η αντίστοιχη ορθομετρική διόρθωση λόγω της μη παραλληλίας των χωροσταθμικών επιφανειών. Στην αντίθετη περίπτωση στις προσδιοριζόμενες υψομετρικές διαφορές θα υπάρχει συστηματικό σφάλμα μεγέθους κατά απόλυτη τιμή ίσο με τη διόρθωση αυτή.

#### 4.10 ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΗΣΗΣ

Η ακρίβεια των μετρήσεων με τη μέθοδο της Γεωμετρικής Χωροστάθμισης είναι συνάρτηση των τυχαίων σφαλμάτων τα οποία επηρεάζουν το αποτέλεσμα των

μετρήσεων. Σφάλματα χονδροειδή και συστηματικά θεωρείται ότι έχουν ήδη εξαλειφθεί από τις μετρήσεις.

Η αβεβαιότητα ( $\sigma_{\Delta H}^{\mu}$ ) μιας μοναδιαίας χωροστάθμησης προσδιορίζεται από την παρακάτω σχέση (Εφαρμογή του νόμου μετάδοσης μεταβλητοτήτων στη σχέση  $\Delta H = O - E$ ):

$$\sigma_{\Delta H}^{\mu} = \pm \sqrt{\sigma_O^2 + \sigma_E^2} \quad (4.19)$$

όπου  $\sigma_O$ ,  $\sigma_E$  η αβεβαιότητα στην μέτρηση στη σταδία Όπισθεν και Έμπροσθεν αντίστοιχα. Οι αβεβαιότητες αυτές είναι συνάρτηση των τυχαίων σφαλμάτων στη σκόπευση και την ανάγνωση στις σταδίες καθώς και στο τυχαίο σφάλμα τοποθέτησης της αεροστάθμης στο κανονικό της σημείο.

Κάνοντας την παραδοχή ότι  $\sigma_O = \sigma_E = \sigma$  η σχέση (4.19) γίνεται :

$$\sigma_{\Delta H}^{\mu} = \pm \sqrt{2\sigma^2} = \pm \sigma\sqrt{2} \quad (4.20)$$

Σε μια χωροσταθμική όδευση στην οποία απαιτούνται  $n$  στάσεις χωροβάτη ισχύει:  $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \dots + \Delta H_n$

και :

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta H} &= \pm \sqrt{\sigma_{\Delta H_1}^2 + \sigma_{\Delta H_2}^2 + \dots + \sigma_{\Delta H_n}^2} = \pm \sqrt{n\sigma_{\Delta H}^2} = \\ &\pm \sqrt{n\sigma_{\Delta H,\mu}^2} \Rightarrow \sigma_{\Delta H} = \pm \sigma\sqrt{2n} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Η τελική τιμή μιας διπλής γεωμετρικής χωροστάθμησης δίνεται από τη σχέση (4.10):

$$\overline{\Delta H} = \frac{|\Delta H_{\text{aller}}| + |\Delta H_{\text{retour}}|}{2}$$

ενώ η αβεβαιότητά της υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\sigma_{\overline{\Delta H}} = \pm \frac{\sqrt{\sigma_{\Delta H_{\text{aller}}}^2 + \sigma_{\Delta H_{\text{retour}}}^2}}{2} \quad (4.22)$$

Αν έχουν απαιτηθεί  $n_1$  στάσεις χωροβάτη για τη μετάβαση και αντίστοιχα  $n_2$  στάσεις για την επιστροφή, η σχέση (4.22), μέσω της σχέσης (4.21), γίνεται :

$$\sigma_{\overline{\Delta H}} = \pm \frac{\sigma}{2} \sqrt{2(n_1 + n_2)} \quad (4.23)$$

ενώ με την παραδοχή  $n_1 = n_2 = n$  :

$$\sigma_{\overline{\Delta H}} = \pm \sigma\sqrt{n} \quad (4.24)$$

Δηλαδή η ακρίβεια της διπλής γεωμετρικής χωροστάθμησης εκφράζεται σαν συνάρτηση της αβεβαιότητας στη σκόπευση στη σταδία και του πλήθους των στάσεων του χωροβάτη.

Για παράδειγμα, σε μια διπλή γεωμετρική χωροστάθμηση μήκους 1km, κάνοντας την παραδοχή ότι μια μέση απόσταση χωροβάτη – σταδίας είναι της τάξης των

25m, θα απαιτηθούν  $1000\text{m}/2 \cdot 25\text{m}=20$  στάσεις χωροβάτη. Χρησιμοποιώντας χωροβάτη με αβεβαιότητα στη μοναδιαία σκόπευση  $\pm 1\text{mm}$ , η ακρίβεια της παραπάνω χωροστάθμησης, σύμφωνα με τη σχέση (4.24), υπολογίζεται :

$$\sigma_{\Delta H_{1\text{km}}} = \pm 1\text{mm}\sqrt{20} = \pm 1\text{mm}\sqrt{20} \Rightarrow \sigma_{\Delta H_{1\text{km}}} \cong \pm 5\text{mm}$$

Όμοια, για μια διπλή γεωμετρική χωροστάθμηση μήκους 3km, που θα μετρηθεί με το ίδιο όργανο, θα απαιτηθούν  $3 \cdot 20 = 60$  στάσεις χωροβάτη, και η ακρίβειά της εκτιμάται :

$$\sigma_{\Delta H} = \pm 1\text{mm}\sqrt{3 \cdot 20} = \pm 1\text{mm}\sqrt{3 \cdot 20} = \pm \sigma_{\Delta H_{1\text{km}}} \sqrt{3} \Rightarrow \sigma_{\Delta H} \cong \pm 8\text{mm}$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνεται ότι η ακρίβεια μιας χωροστάθμησης μετρημένης με συγκεκριμένο σύστημα «χωροβάτης – σταδίες» είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του μήκους της εκφρασμένου σε km, καθώς και της ακρίβειας μιας χωροστάθμησης μήκους 1km μετρημένης με το ίδιο σύστημα. Για το λόγο αυτό οι κατασκευαστές των οργάνων εκφράζουν την ακρίβεια ενός χωροβάτη για διπλή χωροστάθμηση με τη μορφή  $\pm a\text{mm} / \sqrt{\text{km}}$  όπου η ποσότητα  $a$  εκφράζει την ακρίβεια που επιτυγχάνεται με το συγκεκριμένο όργανο σε μια διπλή χωροστάθμηση μήκους 1km.

Σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί οι υψομετρικές διαφορές που προκύπτουν στην μετάβαση και την επιστροφή πρέπει να είναι ίσες κατ' απόλυτη τιμή ( $|\Delta H_{\text{aller}}| = |\Delta H_{\text{retour}}|$ ). Στην πραγματικότητα, αυτό δεν συμβαίνει εξαιτίας των τυχαίων σφαλμάτων που υπεισέρχονται στις μετρήσεις. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.20) και (4.21) είναι δυνατόν, για το συγκεκριμένο σύστημα «χωροβάτης – σταδίες» που χρησιμοποιήθηκε στις μετρήσεις, να τεθεί ένα όριο πάνω από το οποίο το σφάλμα κλεισίματος της χωροστάθμησης  $w$ , που είναι ίσο με το άθροισμα μετάβασης και επιστροφής ( $w = \Delta H_{\text{aller}} + \Delta H_{\text{retour}}$ ) δεν μπορεί να γίνει αποδεκτό.

Εφαρμόζοντας τον νόμο μετάδοσης σφαλμάτων στη σχέση που υπολογίζει το σφάλμα κλεισίματος προκύπτει :

$$\sigma_w^2 = \sigma_{\Delta H_{\text{aller}}}^2 + \sigma_{\Delta H_{\text{retour}}}^2 \quad (4.25)$$

Η αβεβαιότητα  $\sigma_{\Delta H_{\text{aller}}}$  της χωροστάθμησης στη μετάβαση, όπου έχουν γίνει  $n_1$  στάσεις χωροβάτη, είναι :

$$\sigma_{\Delta H_{\text{aller}}} = \pm \sqrt{2n_1\sigma^2} = \pm \sigma\sqrt{2n_1} ,$$

Αντίστοιχα, η αβεβαιότητα  $\sigma_{\Delta H_{\text{retour}}}$  της χωροστάθμησης στην επιστροφή (με  $n_2$  στάσεις χωροβάτη, είναι :

$$\sigma_{\Delta H_{\text{retour}}} = \pm \sqrt{2n_2\sigma^2} = \pm \sigma\sqrt{2n_2} ,$$

με  $\sigma$  την αβεβαιότητα στη μέτρηση του χωροβάτη στη σταδία.

Έτσι, η σχέση (4.25) γίνεται :

$$\sigma_w^2 = \sigma_{\Delta H_{\text{aller}}}^2 + \sigma_{\Delta H_{\text{retour}}}^2 = \sigma^2 \cdot 2(n_1 + n_2)$$

και για  $n_1 = n_2 = n$  :

$$\sigma_w = \pm 2\sigma\sqrt{n} \quad (4.26)$$

Αφού υπολογισθεί η ποσότητα  $\sigma_w$  ελέγχεται αν το κλείσιμο  $w$  της χωροστάθμησης σε μετάβαση και επιστροφή βρίσκεται μέσα στο διάστημα  $(-t \cdot \sigma_w, +t \cdot \sigma_w)$ . Η τιμή του μεγέθους  $t$ , εξαρτάται από το επίπεδο εμπιστοσύνης, την πιθανότητα δηλ. το κλείσιμο  $w$  να βρίσκεται μέσα στο συγκεκριμένο διάστημα. Συνήθως επιλέγεται επίπεδο εμπιστοσύνης 95%, οπότε το μέγεθος  $t$  έχει την τιμή  $t=1.96$ . Αν :

$$|w| \leq 1.96 \cdot |\sigma_w| \quad (4.27)$$

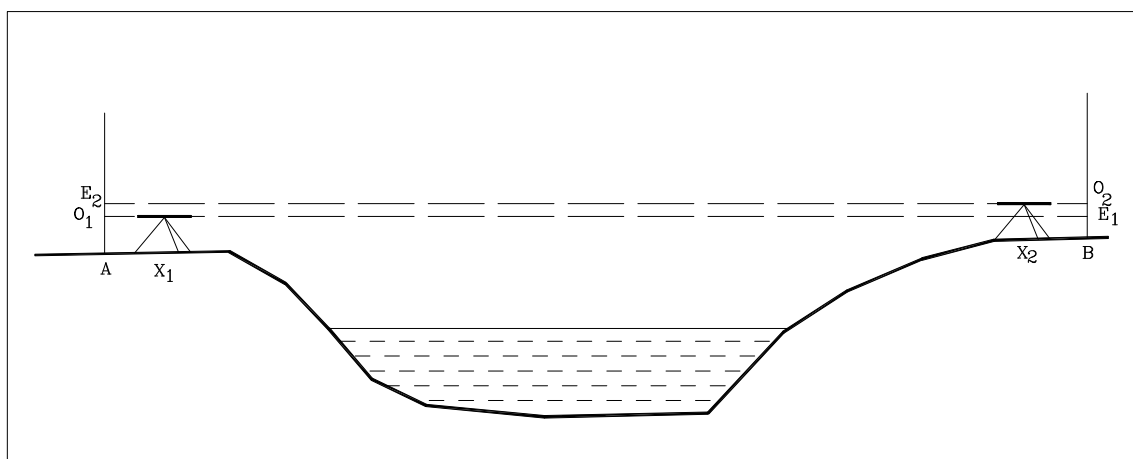
το κλείσιμο της χωροστάθμησης θεωρείται αποδεκτό. Στην αντίθετη περίπτωση η χωροστάθμηση πρέπει να επαναληφθεί στο σύνολό της.

#### **4.11 ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΗΣΗΣ**

Οι ειδικές αυτές περιπτώσεις που εξετάζονται στις επόμενες παραγράφους περιγράφουν μεθοδολογίες μέτρησης για τον προσδιορισμό υψομετρικών διαφορών όταν δεν είναι δυνατή η εφαρμογή της μεθόδου όπως περιγράφηκε στις προηγούμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου.

##### **4.11.1 Αμοιβαία Χωροστάθμηση**

Όταν μεταξύ των σημείων των οποίων πρόκειται να υπολογισθεί η υψομετρική διαφορά με γεωμετρική χωροστάθμηση παρεμβάλλεται φυσικό εμπόδιο (ποταμός, θαλάσσια διώρυγα, λίμνη κλπ.) δεν είναι δυνατόν να εφαρμοσθεί η γνωστή διαδικασία της γεωμετρικής χωροστάθμησης (ο χωροβάτης στη μεσοκάθετη της απόστασης των σημείων) για την εξάλειψη της επίδρασης των συστηματικών σφαλμάτων από τη μη πλήρωση της βασικής συνθήκης του χωροβάτη, καθώς και την επίδραση της καμπυλότητας της γης και της ατμοσφαιρικής διάθλασης. Για να είναι τα αποτελέσματα απαλλαγμένα από την επίδραση των παραπάνω συστηματικών σφαλμάτων ακολουθείται ειδική διαδικασία η οποία σχηματικά παρουσιάζεται στο σχήμα 4.13 που ακολουθεί. Η διαδικασία των μετρήσεων ονομάζεται *αμοιβαία χωροστάθμηση*.



Σχήμα 4.13 Αμοιβαία χωροστάθμηση

Για την εφαρμογή της μεθόδου απαιτούνται ένας χωροβάτης με ισχυρό τηλεσκόπιο και δύο σταδίες. Ο χωροβάτης τοποθετείται αρχικά τόσο κοντά στη σταδία στο A, όσο είναι η ελάχιστη απόσταση εστίασης (θέση X<sub>1</sub>), και λαμβάνονται οι αναγνώσεις O<sub>1</sub> (σταδία στο A) και E<sub>1</sub> (σταδία στο σημείο B). Στη συνέχεια, ο χωροβάτης μεταφέρεται στη θέση X<sub>2</sub>, αντίστοιχα κοντά στο σημείο B, και λαμβάνονται οι αναγνώσεις O<sub>2</sub> (σταδία στο B) και E<sub>2</sub> (σταδία στο A).

Αν οι μετρήσεις ολοκληρωθούν σε σύντομο χρονικό διάστημα μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι η επίδραση της ατμοσφαιρικής διάθλασης είναι ίδια για τα δύο ζεύγη μετρήσεων. Εστω  $\varepsilon_1$  το σφάλμα από την επίδραση της μη πλήρωσης της κύριας συνθήκης του χωροβάτη, ενώ  $\varepsilon_2$  είναι το σφάλμα από τη συνδυασμένη επίδραση της διάθλασης και της καμπυλότητας της γης (που φυσικά είναι ίδια και για τις δύο υψομετρικές διαφορές  $\Delta H_{AB}$  και  $\Delta H_{BA}$ ). Τα σφάλματα αυτά θα επηρεάζουν τις αναγνώσεις στις σταδίες E<sub>1</sub> και E<sub>2</sub> (μακρινές σκοπεύσεις). Αν  $\Delta H'_{AB}$  και  $\Delta H'_{BA}$  οι ορθές υψομετρικές διαφορές, ισχύει :

$$\Delta H'_{AB} = O_1 - (E_1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (O_1 - E_1) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \Delta H_{AB} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (4.28)$$

$$\Delta H'_{BA} = O_2 - (E_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) = (O_2 - E_2) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \Delta H_{BA} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (4.28^a)$$

Η τελική υψομετρική διαφορά  $\Delta H'_{AB}$ , που είναι ο μέσος όρος από μετάβαση και επιστροφή, θα είναι απαλλαγμένη από την επίδραση των παραπάνω σφαλμάτων, αφού αυτά αλληλοαναιρούνται:

$$\Delta H'_{AB} = \frac{|\Delta H'_{AB}| + |\Delta H'_{BA}|}{2} = \frac{\Delta H'_{AB} - \Delta H'_{BA}}{2} = \frac{[\Delta H_{AB} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] - [\Delta H_{BA} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]}{2} \Rightarrow \Delta H'_{AB} = \frac{\Delta H_{AB} - \Delta H_{BA}}{2} \quad (4.29)$$

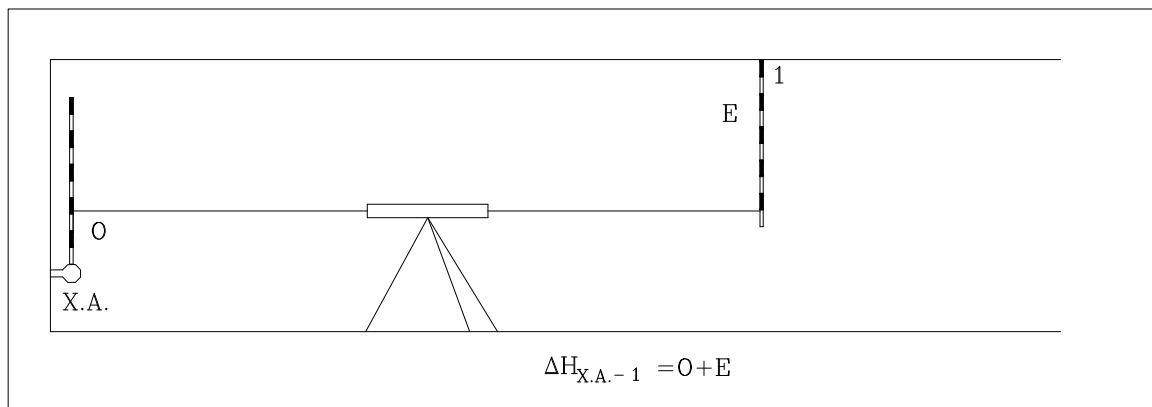
Όταν η απόσταση μεταξύ των A και B είναι μεγάλη ή απαιτείται ακρίβεια στα αποτελέσματα, χρησιμοποιούνται δύο χωροβάτες (της θέσεις X<sub>1</sub> και X<sub>2</sub> αντίστοιχα). Οι μετρήσεις γίνονται τότε ταυτόχρονα, ώστε να εξαλειφθούν πλήρως τα σφάλματα από την επίδραση της διάθλασης και της καμπυλότητας της γης και σε δύο φάσεις (εναλλάσσονται δηλαδή οι χωροβάτες της θέσεις X<sub>1</sub> και X<sub>2</sub>) για να εξαλειφθούν και τα σφάλματα από τη μη πλήρωση της βασικής συνθήκης και στα δύο όργανα.



#### 4.11.2 Χωροσταθμίσεις για τον προσδιορισμό υψομέτρων οροφών

Πολλές φορές απαιτείται ο προσδιορισμός υψομέτρων πελμάτων πλακών ή δοκών π.χ. για τον έλεγχο της οριζοντιότητας τους, ή για τον προσδιορισμό του πάχους τους με ακρίβεια της τάξης των μερικών mm. Αφού επιλεγούν τα σημεία πάνω στα δομικά στοιχεία, και σημειωθούν κατάλληλα, εφαρμόζεται η μέθοδος της γεωμετρικής χωροστάθμησης. Ο χωροβάτης τοποθετείται σε κατάλληλη θέση, και λαμβάνεται η ανάγνωση στη σταδία Όπισθεν τοποθετημένη σε χωροσταθμική αφετηρία γνωστού υψομέτρου. Στη συνέχεια η σταδία τοποθετείται ανεστραμμένη διαδοχικά στα σημεία της οροφής και λαμβάνονται αναγνώσεις Έμπροσθεν για κάθε σημείο. Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.14 στην περίπτωση αυτή το υψόμετρο του  $i$  σημείου θα δίνεται από τη σχέση:

$$H_i = H_R + \Delta H_{Ri} = H_R + (O + E_i) \quad (4.30)$$



Σχήμα 4.14 Χωροστάθμηση για τον προσδιορισμό υψομέτρων πελμάτων πλακών

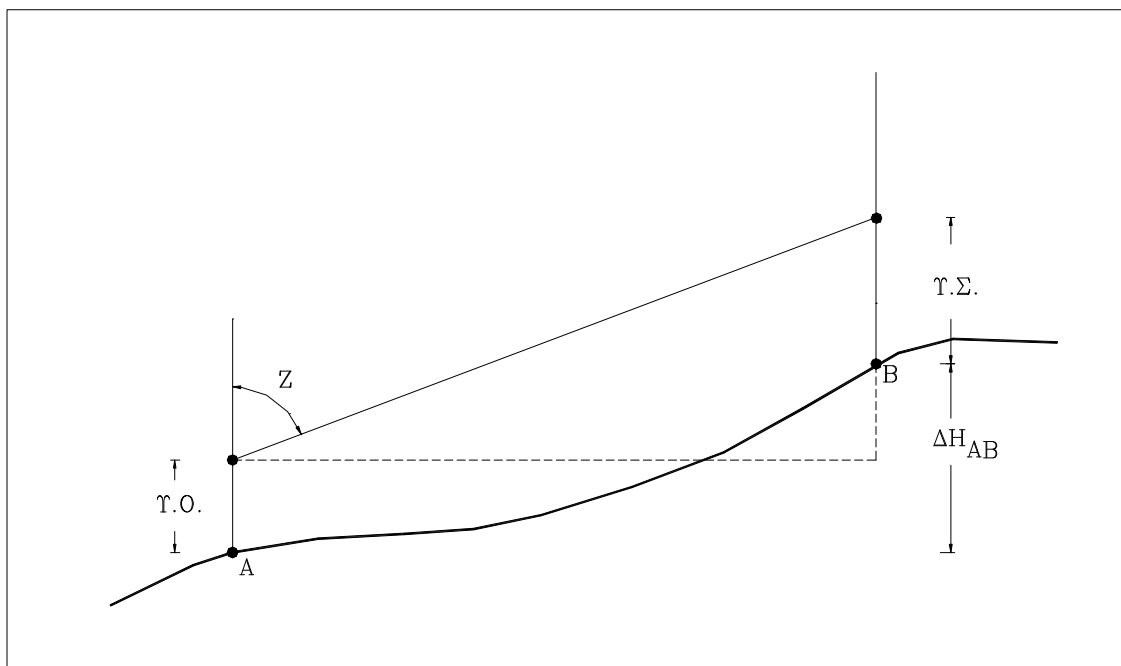
#### 4.12 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΥΨΟΜΕΤΡΙΑ

Η τριγωνομετρική υψομετρία είναι έμμεση μέθοδος προσδιορισμού υψομετρικών διαφορών. Εφαρμόζεται στις περιπτώσεις εκείνες που είτε η απόσταση μεταξύ των σημείων των οποίων ζητείται η υψομετρική διαφορά είναι μεγάλη, είτε είναι μεγάλη η υψομετρική τους διαφορά καθώς και σε περιπτώσεις που δεν είναι δυνατή η εφαρμογή της γεωμετρικής χωροστάθμησης.

##### 4.12.1 Αρχή της μεθόδου

Η τριγωνομετρική υψομετρία βασίζεται στην επίλυση ενός ορθογώνιου τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την ευθεία AB και την προβολή της στο οριζόντιο επίπεδο στο οποίο ανήκει το A.

Η αρχή της μεθόδου φαίνεται στο σχήμα 4.15. Για τον προσδιορισμό της υψομετρικής διαφοράς μεταξύ δύο σημείων A και B ( $\Delta H_{AB}$ ) κεντρώνεται στο σημείο A και οριζοντιώνεται γωνιομετρικό όργανο ενώ στο σημείο B τοποθετείται κατάλληλος στόχος ο οποίος σκοπεύεται με το όργανο σε συγκεκριμένη θέση. Από το σχήμα γίνεται φανερό ότι αρκεί να μετρηθεί η κατακόρυφη γωνία  $Z_{AB}$ , το κεκλιμένο μήκος  $S_{AB}$  ή το οριζόντιο μήκος  $D_{AB}$ , το Ύψος Οργάνου (Υ.Ο. - απόσταση του σημείου τομής των αξόνων από την κεφαλή της σήμανσης που υλοποιεί το σημείο A) και το Ύψος Σκόπευσης (Υ.Σ. - απόσταση του σημείου που σκοπεύθηκε από την κεφαλή της σήμανσης που υλοποιεί το σημείο B).



Σχήμα 4.15 Αρχή της Τριγωνομετρικής Υψομετρίας

Η μέτρηση της κατακόρυφης γωνίας γίνεται με θεοδόλιχο ή γεωδαιτικό σταθμό, οπωσδήποτε σε δύο θέσεις τηλεσκοπίου και συνήθως, (ιδιαίτερα αν η απόσταση μεταξύ των δύο σημείων είναι μεγάλη), σε δύο περιόδους. Η μέτρηση του μήκους γίνεται με μετροταινία ή γεωδαιτικό σταθμό. Σήμερα η μέτρηση γωνιών και μηκών γίνεται ταυτόχρονα με τη χρήση γεωδαιτικού σταθμού.

Στην περίπτωση που μετρηθεί το κεκλιμένο μήκος  $S_{AB}$  η υψομετρική διαφορά  $\Delta H_{AB}$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\Delta H_{AB} = S_{AB} \cdot \cos Z_{AB} + Y.O. - Y.\Sigma. \quad (4.31)$$

ενώ, στην περίπτωση που μετρηθεί το οριζόντιο μήκος  $D_{AB}$ , η αντίστοιχη σχέση υπολογισμού της υψομετρικής διαφοράς  $\Delta H_{AB}$  είναι :

$$\Delta H_{AB} = \frac{D_{AB}}{\tan Z_{AB}} + Y.O. - Y.\Sigma. = D_{AB} \cdot \cot Z_{AB} + Y.O. - Y.\Sigma. \quad (4.31a)$$

Το οριζόντιο μήκος  $D_{AB}$  μπορεί να μετρηθεί απευθείας ή να προσδιορισθεί από το 2<sup>ο</sup> θεμελιώδες πρόβλημα, εφόσον είναι γνωστές οι συντεταγμένες των A και B. Αν οι συντεταγμένες των A και B αναφέρονται στο Κρατικό Σύστημα Αναφοράς, το μήκος  $D_{AB}$  πρέπει να αναχθεί από το προβολικό επίπεδο στην επιφάνεια αναφοράς (εφόσον αυτό απαιτείται λόγω της προβολής που χρησιμοποιείται) και στη συνέχεια να αναχθεί στη χωροσταθμική επιφάνεια που περνά από το A.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τον υπολογισμό της υψομετρικής διαφοράς  $\Delta H_{AB}$  μετρήθηκαν τα ακόλουθα στοιχεία :

$$Z_{AB} = 98.535^{\circ} \text{ (τελική τιμή)}, S_{AB} = 258.246\text{m}, Y.O. = 1.49 \text{ m}, Y.\Sigma. = 1.70\text{m}.$$

Αν το υψόμετρο του Α είναι  $H_A = 386.97\text{m}$  να υπολογισθεί το υψόμετρο του σημείου Β.

Είναι :

$$\Delta H_{AB} = S_{AB} \cdot \cos Z_{AB} + Y.O. - Y.Σ. = 258.246 \cdot \cos(98.535^g) + 1.49 - 1.70 = 5.73\text{m} \Rightarrow H_B = H_A + \Delta H_{AB} = 386.97 + 5.73 \Rightarrow H_B = 392.70\text{m}$$

#### 4.13 ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΥΨΟΜΕΤΡΙΑ

Στον προσδιορισμό μιας υψομετρικής διαφοράς με τη μέθοδο της τριγωνομετρικής υψομετρίας υπεισέρχονται σφάλματα χονδροειδή, συστηματικά και τυχαία.

Τα *χονδροειδή* σφάλματα αφορούν κυρίως λάθη στην ανάγνωση ή την καταγραφή των μετρήσεων των μεγεθών που χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό της υψομετρικής διαφοράς (κατακόρυφη γωνία, κεκλιμένο μήκος, ύψη οργάνου και στόχου). Σήμερα η χρήση των Γεωδαιτικών Σταθμών έχει ελαχιστοποιήσει την επίδραση των χονδροειδών σφαλμάτων που αφορούν τα δύο πρώτα μεγέθη (κατακόρυφες γωνίες και μήκη) δεδομένου ότι τα όργανα αυτά έχουν τη δυνατότητα καταγραφής των μετρήσεων στη μνήμη του μικρο-υπολογιστή που διαθέτουν. Έτσι, το συνηθέστερο χονδροειδές σφάλμα οφείλεται σε εσφαλμένη μέτρηση ή καταγραφή των υψών οργάνου και στόχου.

Τα *συστηματικά* σφάλματα οφείλονται στη :

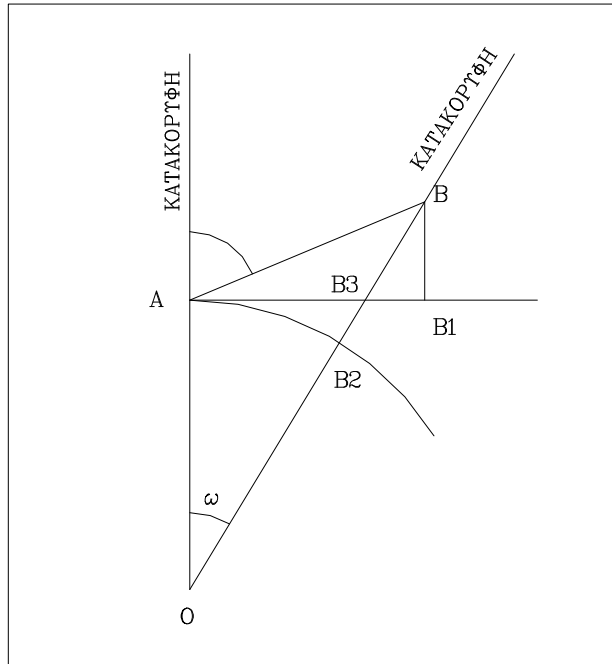
- μη ορθή λειτουργία των οργάνων εξαιτίας της μη πλήρωσης των βασικών τους συνθηκών,
- επίδραση της καμπυλότητας της γης,
- επίδραση του περιβάλλοντος των μετρήσεων (ατμοσφαιρική διάθλαση),

Η πρώτη ομάδα συστηματικών σφαλμάτων εξαλείφεται με εργαστηριακούς ελέγχους των οργάνων που εξασφαλίζουν την ορθή λειτουργία τους. Στις επόμενες παραγράφους εξετάζεται αναλυτικά η επίδραση των άλλων δύο συστηματικών σφαλμάτων (καμπυλότητα της γης και διάθλαση).

##### 4.13.1 Επίδραση της καμπυλότητας της γης

Για μικρές αποστάσεις μεταξύ των σημείων Α και Β γίνεται η παραδοχή ότι αυτά προβάλλονται στο οριζόντιο επίπεδο το οποίο εφάπτεται στη σφαιρική γη στο σημείο Α. Στην περίπτωση αυτή, οι κατακόρυφες που περνούν από τα σημεία Α και Β είναι παράλληλες μεταξύ τους, και η υψομετρική διαφορά των σημείων προσδιορίζεται από τη σχέση 4.31 ή 4.31α. Όσο όμως η απόσταση μεταξύ των Α και Β μεγαλώνει, δεν μπορεί να αγνοηθεί το γεγονός ότι στην πραγματικότητα οι κατακόρυφες δεν είναι μεταξύ τους παράλληλες αλλά συγκλίνουν στο κέντρο της γης: υπεισέρχεται δηλαδή η επίδραση της καμπυλότητας της γης.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα 4.16, αν εφαρμοσθεί η σχέση 4.31, θα υπολογισθεί η  $BB_1$  αντί της  $BB_2$ , που είναι η ορθή υψομετρική διαφορά.



**Σχήμα 4.16** Επίδραση της καμπυλότητας της γης στην Τριγωνομετρική Υψομετρία

Στο τρίγωνο  $B_3BB_1$  η γωνία  $B_3 - B - B_1 = \omega$  (γεωκεντρική γωνία). Η γωνία  $\omega$  είναι πολύ μικρή (περίπου  $1^\circ$  για μήκος 1km πάνω στη σφαίρα), επομένως μπορεί να θεωρηθεί ότι:  $BB_1 \cong BB_3$ , και  $AB_1 = D_{AB} \cong AB_3$ , όπου  $D_{AB}$  το (οριζόντιο) μήκος πάνω στο οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το A.

Τότε, η ορθή υψομετρική διαφορά είναι  $\Delta h_{AB} = BB_2 = BB_3 + B_3B_2$ . Από το σχήμα φαίνεται ότι:

$$(R + h_A)^2 + D_{AB}^2 = [(R + h_A) + B_3B_2]^2 \Rightarrow D_{AB}^2 = 2(R + h_A)(B_3B_2) + (B_3B_2)^2 \Rightarrow$$

$$(B_3B_2) \cong \frac{D_{AB}^2}{2(R + h_A)} \cong \frac{D_{AB}^2}{2R}.$$

Για ένα μήκος  $D_{AB} = 500\text{m}$  η  $B_3B_2 = 0.020\text{m}$ , άρα η επίδραση της καμπυλότητας της γης πρέπει να λαμβάνεται υπόψη στον υπολογισμό υψομετρικών διαφορών με τη μέθοδο της Τριγωνομετρικής Υψομετρίας. Η διόρθωση, όπως φαίνεται και από το σχήμα 4.16, είναι προσθετική και ίση με :

$$\delta\Delta H_{\text{καμπ.}} = \frac{D_{AB}^2}{2R} \quad (4.32)$$

Ετσι,

$$\Delta h_{AB} = S_{AB} \cos Z + \frac{D_{AB}^2}{2R} + (\text{Υ.Ο.} - \text{Υ.Σ.}) \quad (4.33)$$

#### 4.13.2 Επίδραση της διάθλασης

Η οπτική ακτίνα, καθώς διέρχεται από την ατμόσφαιρα, συναντά στρώματα διαφορετικής πυκνότητας, με αποτέλεσμα να διαθλάται και να καμπυλώνεται

στρέφοντας τα κοίλα προς τα κάτω. Εξαιτίας της καμπύλωσης της οπτικής ακτίνας ο παρατηρητής στο A βλέπει το στόχο στο B' αντί για το B (σχ. 4.17). Το B' είναι το σημείο στο οποίο η εφαπτόμενη στην καμπυλωμένη οπτική ακτίνα συναντά την κατακόρυφο στο B. Η επίδραση της διάθλασης έχει, επομένως, σαν αποτέλεσμα τα σημεία τα οποία σκοπεύονται να φαίνονται ψηλότερα από την πραγματική τους θέση (σχ. 4.17).

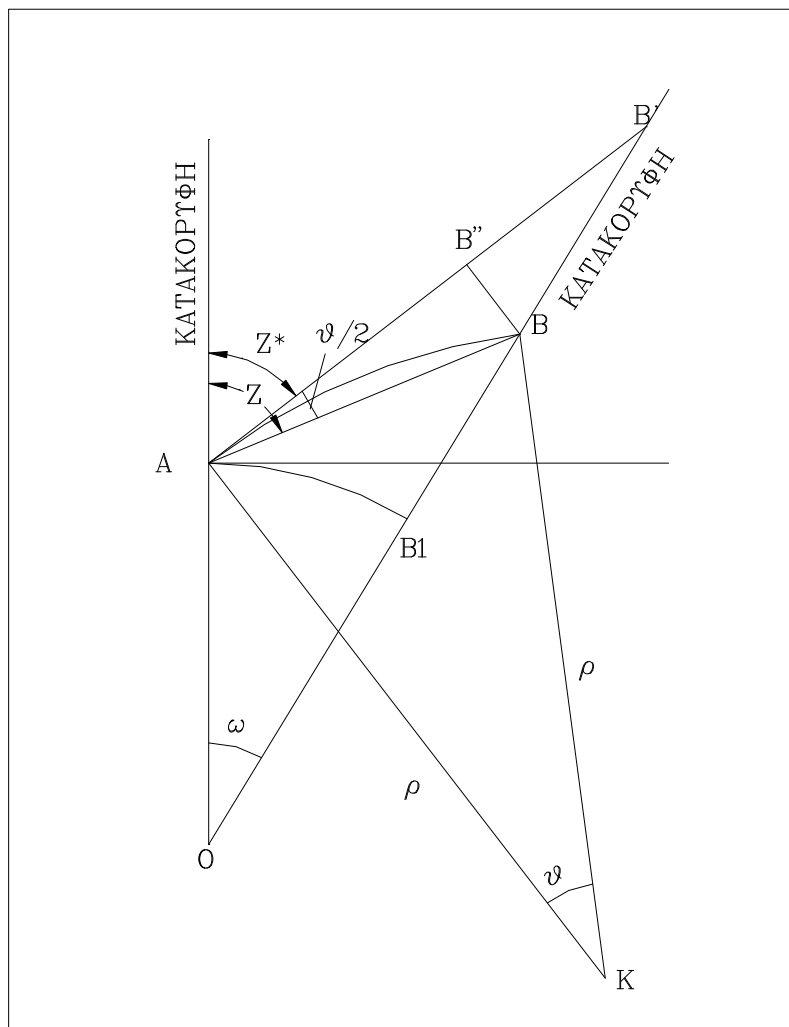
Στο σχήμα 4.17 φαίνεται ότι αντί να μετρηθεί από το A η κατακόρυφη γωνία Z στην πραγματικότητα μετράται η Z\*. Η διαφορά των δύο γωνιών (Z - Z\*) ονομάζεται γωνία διάθλασης δ.

Για αποστάσεις μέχρι 3Km μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι η καμπύλη οπτική ακτίνα είναι τόξο κύκλου ακτίνας ρ. Στην περίπτωση αυτή (σχ. 4.17) ισχύει η σχέση :

$$\delta = Z - Z^* = \frac{\theta}{2} \quad (4.34)$$

όπου θ η επίκεντρη γωνία του κύκλου με ακτίνα ρ που βαίνει στο τόξο AB :

$$\theta = \frac{AB}{\rho} \cong \frac{S_{AB}}{\rho} \quad (4.35)$$



Σχήμα 4.17 Επίδραση της διάθλασης στην Τριγωνομετρική Υψομετρία

Ο λόγος της ακτίνας R της σφαιρικής γης προς την ακτίνα καμπυλότητας ρ της οπτικής ακτίνας ονομάζεται *συντελεστής γεωδαιτικής διάθλασης*, k:

$$k = \frac{R}{\rho} \quad (4.36)$$

Από τη σχέση (4.36) είναι φανερό ότι ο συντελεστής γεωδαιτικής διάθλασης εξαρτάται από την καμπυλότητα της οπτικής ακτίνας δηλ. από τις ατμοσφαιρικές συνθήκες που επικρατούν κατά μήκος της διαδρομής της οπτικής ακτίνας.

Η σχέση (4.35) λόγω της (4.36) γίνεται  $\theta = \frac{kS_{AB}}{R}$ , επομένως η γωνία διάθλασης είναι :

$$\delta^{\text{rad}} = \frac{\theta}{2} = \frac{kS_{AB}}{2R} \quad (4.37)$$

$$\text{ή} \quad \delta^{\text{cc}} = \frac{\theta}{2} = \frac{kS_{AB}}{2R} \rho^{\text{cc}} \quad (4.37^{\text{a}})$$

Υπολογίζοντας τη γωνία δ μπορεί να διορθωθεί η μετρημένη κατακόρυφη γωνία Z\* από την επίδραση της διάθλασης, και στη συνέχεια να υπολογισθεί η υψομετρική διαφορά από τη σχέση (4.33).

Αν στη σχέση (4.33) αντικαταστήσουμε όπου Z το (Z\* + δ) έχουμε :

$$\begin{aligned} \Delta h_{AB} &= S_{AB} \cos(Z^* + \delta) + \frac{D_{AB}^2}{2R} + (Y.O. - Y.Σ.) = \\ S_{AB} \cos Z^* \cos \delta - S_{AB} \sin Z^* \sin \delta + \frac{D_{AB}^2}{2R} + (Y.O. - Y.Σ.) &= \\ S_{AB} \cos Z^* - S_{AB} \sin Z^* \delta^{\text{rad}} + \frac{D_{AB}^2}{2R} + (Y.O. - Y.Σ.) &= \\ S_{AB} \cos Z^* - S_{AB} \sin Z^* \frac{kS_{AB}}{2R} + \frac{D_{AB}^2}{2R} + (Y.O. - Y.Σ.) &= \\ S_{AB} \cos Z^* - \frac{kS_{AB}^2 \sin Z^*}{2R} + \frac{D_{AB}^2}{2R} + (Y.O. - Y.Σ.) \end{aligned}$$

Ο όρος  $\frac{kS_{AB}^2 \sin Z^*}{2R}$  μπορεί να αντικατασταθεί με τον όρο  $\frac{kD_{AB}^2}{2R}$  αφού η διαφορά τους για μήκη μέχρι 5km είναι μικρότερη από 1mm, οπότε :

$$\Delta h_{AB} = S_{AB} \cos Z^* + (1 - k) \frac{D_{AB}^2}{2R} + (Y.O. - Y.Σ.) \quad (4.38)$$

$$\text{ή} \quad \Delta h_{AB} = D_{AB} \cot Z^* + (1 - k) \frac{D_{AB}^2}{2R} + (Y.O. - Y.Σ.) \quad (4.38^{\text{a}})$$

όπου :

- Z\* : η μετρημένη κατακόρυφη γωνία.

Στην περίπτωση που ως επιφάνεια αναφοράς θεωρηθεί το ελλειψοειδές αναφοράς και όχι η σφαίρα, η κατακόρυφη γωνία θα πρέπει να διορθωθεί από την επίδραση της *απόκλισης της κατακορύφου*. Η διόρθωση αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι η κατακόρυφος (διεύθυνση αναφοράς για τη μέτρηση των κατακόρυφων γωνιών) στο σημείο από το οποίο γίνεται η μέτρηση της κατακόρυφης γωνίας δεν ταυτίζεται με την κάθετη στο ΕΕΠ στο ίδιο σημείο.

- $S_{AB}$  : το κεκλιμένο μήκος, διορθωμένο από την επίδραση των πιθανών σφαλμάτων του συστήματος «Όργανο – Ανακλαστήρας», την επίδραση της θερμοκρασίας και της πίεσης, καθώς και την επίδραση της διάθλασης (για μήκη  $\geq 10\text{km}$ ). (Ενότητα 3.2),
- $D_{AB}$  : το οριζόντιο μήκος που προκύπτει από την προβολή του σημείου B πάνω στο οριζόντιο επίπεδο που εφάπτεται στο σημείο A στην χωροσταθμική επιφάνεια που περνάει από αυτό.
- $k$  : ο συντελεστής γεωδαιτικής διάθλασης.

Με τη σχέση (4.38) ή (4.38<sup>a</sup>) υπολογίζεται η υψομετρική διαφορά των A, B διορθωμένη ταυτόχρονα από την επίδραση της διάθλασης και της καμπυλότητας της γης.

Από όσα αναφέρθηκαν παραπάνω γίνεται φανερό ότι, αν για τον προσδιορισμό της υψομετρικής διαφοράς μεταξύ δύο σημείων A και B γίνουν αμοιβαίες παρατηρήσεις κατακόρυφων γωνιών, η επίδραση της καμπυλότητας της γης εξαλείφεται, ενώ, αν οι μετρήσεις των κατακόρυφων γωνιών εκτός από αμοιβαίες είναι και ταυτόχρονες, εξαλείφεται και η επίδραση της διάθλασης. Πράγματι :

$$\Delta h_{AB} = S_{AB} \cos Z_{AB}^* + (1 - k) \frac{D_{AB}^2}{2R} + (Y.O._A - Y.Σ._B) , \text{ και}$$

$$\Delta h_{BA} = S_{BA} \cos Z_{BA}^* + (1 - k) \frac{D_{AB}^2}{2R} + (Y.O._B - Y.Σ._A)$$

Τότε :

$$\overline{\Delta h}_{AB} = \frac{|\Delta h_{AB}| + |\Delta h_{BA}|}{2} = \frac{\Delta h_{AB} - \Delta h_{BA}}{2} \Rightarrow$$

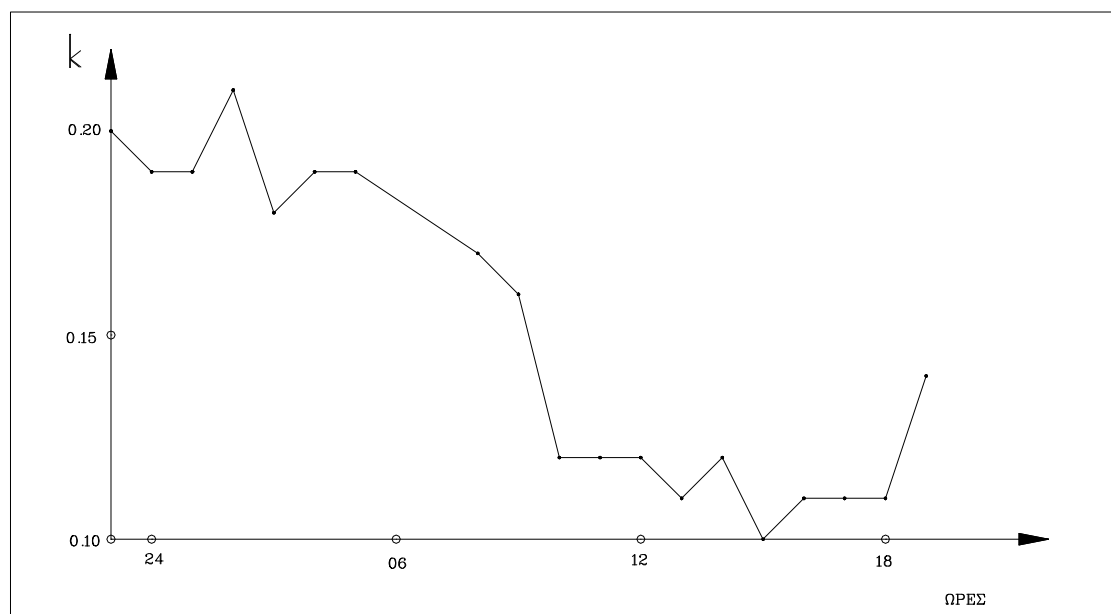
$$\overline{\Delta h}_{AB} = \frac{1}{2} \left[ (S_{AB} \cos Z_{AB}^* - S_{BA} \cos Z_{BA}^*) + (Y.O._A - Y.Σ._B) - (Y.O._B - Y.Σ._A) \right] \quad (4.39)$$

Τέλος, πρέπει να επισημανθεί το γεγονός ότι, στην περίπτωση κατά την οποία η απόσταση μεταξύ των A, B έχει μέγεθος τέτοιο που επιβάλλει τη διόρθωση λόγω καμπυλότητας της γης, υπολογίζονται γεωμετρικές υψομετρικές διαφορές ( $\Delta h_{AB}$ ) και όχι ορθομετρικές  $\Delta H_{AB}$ . Ωστόσο, μπορεί να γίνει η παραδοχή ότι τα υψόμετρα του γεωειδούς στα σημεία A και B είναι ίσα ( $N_A = N_B$ ), για αποστάσεις μεταξύ των σημείων της τάξης των 3km, οπότε  $\Delta H_{AB} \cong \Delta h_{AB}$ .

#### 4.13.3 Προσδιορισμός του συντελεστή γεωδαιτικής διάθλασης k

Ο συντελεστής γεωδαιτικής διάθλασης k μεταβάλλεται στη διάρκεια του εικοσιτετράωρου. Παίρνει τις μέγιστες τιμές του τις νυχτερινές ώρες, αρχίζει να

μειώνεται νωρίς το πρωί, ενώ έχει τις μικρότερες τιμές του τις μεσημεριανές ώρες, οπότε παραμένει σταθερός και ξαναρχίζει να αυξάνεται νωρίς το απόγευμα (σχ. 4.18). Το εύρος της απόκλισης (μέγιστο - ελάχιστο) εξαρτάται από την εποχή, την απόσταση που διανύει η οπτική ακτίνα και το είδος της περιοχής πάνω από την οποία περνάει (στεριά ή υδάτινη επιφάνεια ή συνδυασμός των δύο), καθώς και την υψομετρική διαφορά των άκρων της οπτικής ακτίνας. Έχει επίσης παρατηρηθεί αντιστροφή του μέγιστου και ελάχιστου όταν η οπτική ακτίνα περνά σε μικρό ύψος πάνω από υδάτινη επιφάνεια. Ο κύκλος αυτός έχει άμεση σχέση με τον κύκλο της ηλιοφάνειας και της θερμοκρασίας και υφίσταται διαταραχές αρκετά αισθητές όταν μεταβληθούν οι καιρικές συνθήκες. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι οι ώρες, κατά τις οποίες ο συντελεστής παίρνει τις ελάχιστες τιμές του και παρουσιάζει σταθερότητα, είναι ιδανικές για παρατηρήσεις κατακόρυφων γωνιών. Ταυτόχρονα όμως, σε αυτό το χρονικό διάστημα, η θερμοκρασία παίρνει τις μέγιστες τιμές της, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται έντονες ατμοσφαιρικές διακυμάνσεις, που αλλοιώνουν τη μορφή των ειδώλων των στόχων και έτσι να έχουμε τη μεγαλύτερη αβεβαιότητα στην παρατήρηση. Παρ' όλα αυτά οι ώρες αυτές θεωρούνται οι βέλτιστες για παρατηρήσεις κατακόρυφων γωνιών.



Σχήμα 4.18 Διάγραμμα μεταβολής του k

Στην Ελλάδα έχουν παρατηρηθεί τιμές του συντελεστή που κυμαίνονται από 0.11 έως 0.30. Μια μέση τιμή του για τον ελλαδικό χώρο θεωρείται η  $k = 0.16$ .

Ο συντελεστής γεωδαιτικής διάθλασης προσδιορίζεται από μετεωρολογικά δεδομένα (μέθοδος της θερμοβαθμίδας) είτε, συνηθέστερα, από παρατηρήσεις κατακόρυφων γωνιών, με αμοιβαίες ταυτόχρονες σκοπεύσεις από τα δύο άκρα της οπτικής ακτίνας ή με απλές σκοπεύσεις από το ένα άκρο, εφόσον είναι γνωστή η απόσταση των δύο σημείων και η υψομετρική τους διαφορά.



### 4.13.3α Μέθοδος των αμοιβαίων, ταυτόχρονων σκοπεύσεων κατακόρυφων γωνιών

Για τη μέθοδο αυτή απαιτούνται δύο θεοδόλιχα και δύο κατάλληλοι στόχοι που τοποθετούνται στα δύο σημεία (έστω A και B). Σε προκαθορισμένες χρονικές στιγμές πραγματοποιούνται παρατηρήσεις κατακόρυφων γωνιών σε τουλάχιστον δύο πλήρεις περιόδους από το A προς το B και αντίστροφα. Με την παραδοχή ότι η καμπυλωμένη οπτική ακτίνα είναι τμήμα κυκλικού τόξου, και δεδομένου ότι οι κατακόρυφες γωνίες παρατηρούνται την ίδια χρονική στιγμή οι γωνίες διάθλασης  $\delta$  είναι ίσες. Από το σχ. 4.18 φαίνεται ότι :

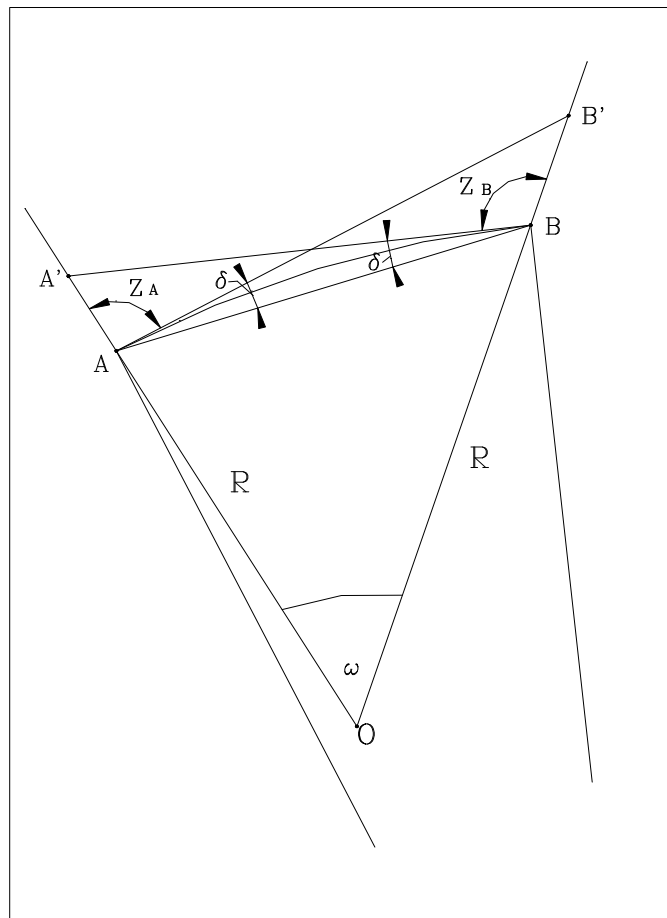
$$(Z_A + \delta) + (Z_B + \delta) - \omega = 200^g \Rightarrow (Z_A + Z_B) + 2\delta - \omega = 200^g \Rightarrow$$

$$\frac{kL_{AB}}{R} - \frac{S'_{AB}}{R} \cong [200 - (Z_A + Z_B)]^{cc} / \rho^{cc}$$

Με την παραδοχή ότι  $L_{AB} \cong S'_{AB}$ , ( $S'_{AB}$  το μήκος στην επιφάνεια αναφοράς),

$$(k - 1) \frac{S'_{AB}}{R} = [200 - (Z_A + Z_B)]^{cc} / \rho^{cc}, \text{ δηλ.}$$

$$k = 1 + \frac{[200 - (Z_A + Z_B)]^{cc} / \rho^{cc}}{S'_{AB}/R} \quad \text{ή} \quad k = 1 + \frac{\pi - (Z_A + Z_B)^{\text{rad}}}{\omega} \quad (4.40)$$



Σχήμα 4.18 Υπολογισμός k από αμοιβαίες ταυτόχρονες παρατηρήσεις κατακόρυφων γωνιών

Οι κατακόρυφες γωνίες που χρησιμοποιούνται στη σχέση (5.40) πρέπει να διορθωθούν, έτσι ώστε να αναφέρονται στην ίδια σκοπευτική γραμμή AB. Πρέπει επίσης να διορθωθούν από την επίδραση της απόκλισης της κατακόρυφου εφόσον τα σημεία A, B απέχουν μεταξύ τους απόσταση μεγαλύτερη από 5km. Στην αντίθετη περίπτωση, οι διορθώσεις στις δύο κατακόρυφες γωνίες από την επίδραση της απόκλισης θεωρούνται ίσες και αλληλοαναιρούνται.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή γεωδαιτικής διάθλασης  $k$  μεταξύ των σημείων A και B έγιναν αμοιβαίες και ταυτόχρονες παρατηρήσεις κατακόρυφων γωνιών από τα A και B. Τα τελικά αποτελέσματα, έχουν αναχθεί στη σκοπευτική γραμμή AB και έχουν διορθωθεί από την επίδραση της απόκλισης της κατακόρυφου. Δίνονται :

$Z_A = 100.8338^g$ ,  $Z_B = 99.4086^g$ , το μήκος AB στην επιφάνεια αναφοράς  $D_{AB} = 28699.651m$  και η μέση ακτίνα καμπυλότητας της γης στην περιοχή  $R = 6371000m$ .

$$\text{Είναι : } \omega = \frac{28699.651}{6371000} = 0.004505^{\text{rad}}$$

$$200 - (Z_A + Z_B) = -0.2424^g = -0.003808^{\text{rad}}$$

$$\text{Άρα : } k = 0.15$$

#### 4.13.3β Μέθοδος των απλών σκοπεύσεων

Αν η σχέση (4.38) επιλυθεί ως προς  $k$  προκύπτει :

$$k = 1 + \frac{2R}{D_{AB}^2} [D_{AB} \cot Z_A - \Delta h_{AB} + (Y.O._A - Y.Σ._B)] \quad (4.41)$$

Είναι φανερό ότι για τον υπολογισμό του συντελεστή γεωδαιτικής διάθλασης πρέπει να είναι γνωστή η υψομετρική διαφορά και το μήκος  $D_{AB}$  (μετρημένο ή υπολογισμένο από συντεταγμένες και αναγμένο στην επιφάνεια αναφοράς), ενώ πρέπει να μετρηθούν η κατακόρυφη γωνία  $Z_A$ , καθώς και τα ύψη οργάνου και στόχου. Αν ως επιφάνεια αναφοράς θεωρηθεί ελλειψοειδές εκ περιστροφής, η γωνία  $Z_A$  πρέπει επιπλέον να διορθωθεί από την απόκλιση της κατακόρυφου.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τον προσδιορισμό του συντελεστή γεωδαιτικής διάθλασης  $k$  μεταξύ των σημείων A και B μετρήθηκε η κατακόρυφη γωνία από το σημείο A σε δύο πλήρεις περιόδους. Η τελική τιμή της κατακόρυφης γωνίας είναι:  $Z_A = 95.2387^g$ . Το μήκος AB στην επιφάνεια αναφοράς προσδιορίστηκε  $D_{AB} = 2332.335m$ , η υψομετρική διαφορά των A και B είναι  $\Delta h_{AB} = 175.140m$ , η μέση ακτίνα καμπυλότητας της γης στην περιοχή είναι  $R = 6371000m$ , ενώ ισχύει  $Y.O. = Y.Σ.$

Είναι :

$$k = 1 + \frac{2R}{D_{AB}^2} [D_{AB} \cot Z_A - \Delta h_{AB} + (Y.O._A - Y.\Sigma._B)] = 1 + \frac{2R}{D_{AB}^2} [D_{AB} \cot Z_A - \Delta h_{AB}] \Rightarrow$$

$$k = 1 + \frac{2 \cdot 6371000}{(2332.335)^2} \left[ \frac{2332.335}{\tan(95.2387^g)} - 175.140 \right] = 1 + \frac{2 \cdot 6371000}{(2332.335)^2} (-0.3783) \Rightarrow$$

$$k = 1 - 0.89 \Rightarrow k = 0.11$$

#### 4.14 ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΥΨΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗΣ ΥΨΟΜΕΤΡΙΑΣ

Από την εφαρμογή του νόμου μετάδοσης σφαλμάτων στη σχέση (4.38<sup>α</sup>) μπορεί να εκτιμηθεί η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της υψομετρικής διαφοράς με τη μέθοδο της Τριγωνομετρικής Υψομετρίας.

$$\sigma_{\Delta h}^2 = \left( \frac{\partial \Delta h}{\partial D} \right)^2 \sigma_D^2 + \left( \frac{\partial \Delta h}{\partial Z} \right)^2 \left( \frac{\sigma_Z}{\rho^{cc}} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Delta h}{\partial k} \right)^2 \sigma_k^2 + \left( \frac{\partial \Delta h}{\partial R} \right)^2 \sigma_R^2 +$$

$$+ \left( \frac{\partial \Delta h}{\partial YO} \right)^2 \sigma_{YO}^2 + \left( \frac{\partial \Delta h}{\partial Y\Sigma} \right)^2 \sigma_{Y\Sigma}^2 \quad (4.42)$$

Στη συνέχεια εξετάζεται αναλυτικά η επίδραση κάθε ενός από τα μετρούμενα μεγέθη στην αβεβαιότητα της υψομετρικής διαφοράς.

- *Επίδραση της αβεβαιότητας του D*

$$\left( \frac{\partial \Delta h}{\partial D} \right) \cdot \sigma_D = \left[ \cot Z + (1 - k) \frac{D}{R} \right] \cdot \sigma_D$$

Για  $D = 10\text{km}$  και  $k = 0.16$  ο όρος  $\left( 1 - k \frac{D}{R} \right)$  είναι ίσος με  $0.001\text{m}$ , και επομένως μπορεί να αγνοηθεί. Τότε :

$$\left( \frac{\partial \Delta h}{\partial D} \right) \cdot \sigma_D \cong \cot Z \cdot \sigma_D$$

Σύμφωνα με την παραπάνω σχέση η επίδραση της αβεβαιότητας του μήκους αυξάνει όσο μικραίνει η κατακόρυφη γωνία  $Z$ .

Αν για τη μέτρηση ενός μήκους  $D = 2000\text{m}$  χρησιμοποιηθεί Total Station ονομαστικής ακρίβειας  $\pm (3\text{mm} + 2\text{ppm})$  τότε  $\sigma_D = \pm 5\text{mm}$  και για

$$Z = 99^g \quad \left( \frac{\partial \Delta h}{\partial D} \right) \cdot \sigma_D \cong 0.1\text{mm}, \quad \text{ενώ για}$$

$$Z = 90^g \quad \left( \frac{\partial \Delta h}{\partial D} \right) \cdot \sigma_D \cong 1\text{mm}^2$$

- *Επίδραση της αβεβαιότητας της κατακόρυφης γωνίας Z*

$$\left(\frac{\partial \Delta h}{\partial Z}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_Z}{\rho^{cc}}\right) = \left(\frac{D}{\sin^2 Z}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_Z}{\rho^{cc}}\right)$$

Ο όρος αυτός παίρνει την ελάχιστη τιμή του για  $Z = 100^g$ .

Για  $D = 2000m$ ,  $Z = 99^g$  και  $\sigma_Z = \pm 10^{cc}$

$$\left(\frac{\partial \Delta h}{\partial Z}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_Z}{\rho^{cc}}\right) = 0.031m^2, \text{ ενώ για :}$$

$D = 2000m$ ,  $Z = 99^g$  και  $\sigma_Z = \pm 50^{cc}$

$$\left(\frac{\partial \Delta h}{\partial Z}\right) \cdot \left(\frac{\sigma_Z}{\rho^{cc}}\right) = 0.157m$$

- *Επίδραση της αβεβαιότητας του συντελεστή k*

$$\left(\frac{\partial \Delta h}{\partial k}\right) \cdot \sigma_k = \left(\frac{D^2}{2R}\right) \sigma_k$$

Σύμφωνα με τον όρο αυτό η επίδραση της αβεβαιότητας του συντελεστή k αυξάνει όσο αυξάνει το μήκος D.

Για  $D = 2000m$ , και  $\sigma_k = \pm 0.05 \Rightarrow \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial k}\right) \cdot \sigma_k = 0.016m$ , ενώ

για  $D = 3000m$ , και  $\sigma_k = \pm 0.05 \Rightarrow \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial k}\right) \cdot \sigma_k = 0.035m$

- *Επίδραση της αβεβαιότητας στη μέτρηση των YO και YΣ*

$$\text{Θεωρώντας ότι : } \sigma_{YO} = \sigma_{Y\Sigma} \Rightarrow \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial YO}\right)^2 \sigma_{YO}^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial Y\Sigma}\right)^2 \sigma_{Y\Sigma}^2 = 2\sigma_{YO}^2$$

$$\text{Για } \sigma_{YO} = \sigma_{Y\Sigma} = \pm 0.01m \Rightarrow \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial YO}\right)^2 \sigma_{YO}^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial Y\Sigma}\right)^2 \sigma_{Y\Sigma}^2 = 0.0002m^2$$

Τέλος η επίδραση της αβεβαιότητας στον προσδιορισμό της ακτίνας R είναι αμελητέα.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι τη μεγαλύτερη συμμετοχή στη διαμόρφωση της αβεβαιότητας προσδιορισμού της υψομετρικής διαφοράς με τη μέθοδο της τριγωνομετρικής υψομετρίας έχει η αβεβαιότητα στη μέτρηση της κατακόρυφης γωνίας, και ακολουθεί η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό του συντελεστή γεωδαιτικής διάθλασης και η αβεβαιότητα στη μέτρηση των υψών οργάνου και στόχου. Πράγματι :

- Για  $D = 2000m$ ,  $\sigma_D = \pm 5mm$ ,  $Z = 99^g$ ,  $\sigma_Z = \pm 50^{cc}$ ,  $\sigma_k = \pm 0.05$  και  $\sigma_{YO} = \sigma_{Y\Sigma} = \pm 0.01m$  :

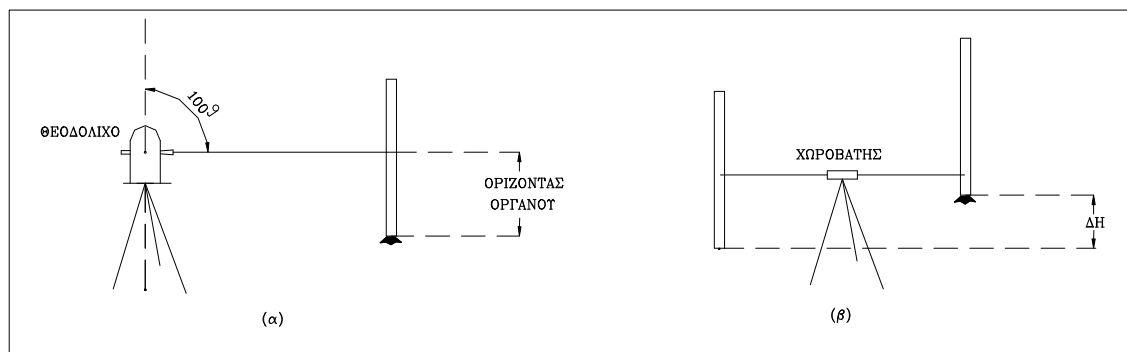
$$\sigma_{\Delta h}^2 = (0.0001)^2 + (0.1571)^2 + (0.0157)^2 + 2(0.01)^2 \Rightarrow \sigma_{\Delta h} = \pm 0.159m, \text{ ενώ για :}$$

- Για  $D = 2000\text{m}$ ,  $\sigma_D = \pm 5\text{mm}$ ,  $Z = 99^\circ$ ,  $\sigma_Z = \pm 10^{\text{cc}}$ ,  $\sigma_k = \pm 0.05$  και  $\sigma_{\gamma O} = \sigma_{\gamma \Sigma} = \pm 0.01\text{m}$ :

$$\sigma_{\Delta h}^2 = (0.0001)^2 + (0.0314)^2 + (0.0157)^2 + 2(0.01)^2 \Rightarrow \sigma_{\Delta h} = \pm 0.038\text{m}$$

#### 4.14.1 Προσδιορισμός των υψών Οργάνου (Υ.Ο.) και Στόχου (Υ.Σ.) με ακρίβεια καλύτερη του $\pm 1\text{mm}$

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζεται μία μέθοδος με την οποία τα ύψη οργάνου και στόχου προσδιορίζονται με ακρίβεια καλύτερη του  $\pm 1\text{mm}$ . Για την εφαρμογή της απαιτείται ένας χωροβάτης, μια σταδία με υποδιαιρέσεις mm και μία χωροσταθμική βάση (χελώνα). Η μέθοδος φαίνεται στο σχήμα 4.19.



Σχήμα 4.19 Μέθοδος προσδιορισμού του ύψους οργάνου

Σε κατάλληλη θέση κοντά στο γωνιομετρικό όργανο ή τον γεωδαιτικό σταθμό του οποίου ζητείται το ύψος οργάνου, τοποθετείται η χωροσταθμική βάση και πάνω σ' αυτή τοποθετείται κατακόρυφη η σταδία.

- Με τον κατακόρυφο δίσκο του οργάνου στους  $100^\circ$  (τηλεσκόπιο οριζόντιο) σκοπεύεται η σταδία και λαμβάνεται η ανάγνωση  $H_1$ . Στη συνέχεια, με το τηλεσκόπιο σε θέση II και τον κατακόρυφο δίσκο στους  $300^\circ$  σκοπεύεται και πάλι η σταδία και λαμβάνεται η ανάγνωση  $H_2$ . (σχ. 4.19α)

- Υπολογίζεται ο οριζοντας του οργάνου  $H_{op} = \frac{H_1 + H_2}{2}$

- Προσδιορίζεται η υψομετρική διαφορά  $\Delta H$  Στάσης Οργάνου - Χωροσταθμικής Βάσης με διπλή γεωμετρική χωροστάθμηση (aller - retour). (σχ. 4.19β)

- Τελικά  $Υ.Ο. = \Delta H + H_{op}$

#### Ακρίβεια της μεθόδου

Αν η ακρίβεια στην ανάγνωση στη σταδία είναι  $\sigma_i = \pm 0.25\text{mm}$ , τότε

$$\sigma_{H_{op}}^2 = \frac{\sigma_i^2}{2}, \quad \sigma_{\Delta H}^2 = \frac{\sigma_{\text{aller}}^2 + \sigma_{\text{retour}}^2}{4} = \frac{\sigma_{\text{aller}}^2}{2} \quad (\sigma_{\text{aller}} = \sigma_{\text{retour}} = \sigma_i \sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$\sigma_{\Delta H}^2 = \sigma_i^2.$$

$$\text{Τελικά : } \sigma_{\text{YO}}^2 = \sigma_{\Delta\text{H}}^2 + \sigma_{\text{H}\rho}^2 = 1.5 \cdot \sigma_i^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{\text{YO}} \cong \pm 0.5\text{mm}$$

Αν για τη μέτρηση της κατακόρυφης γωνίας και του μήκους χρησιμοποιηθεί ειδικός στόχος (συνδυασμός στόχου γωνιομετρήσεων και ανακλαστήρα) σε τρίποδα, η ίδια μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί για τον προσδιορισμό του ύψους του στόχου. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να μετρηθεί ανεξάρτητα το ύψος  $\Delta h_1$  του στόχου από το κέντρο του (σημείο σκόπευσης για την κατακόρυφη γωνία και μέτρησης του μήκους) μέχρι την κεφαλή του τρίποδα χρησιμοποιώντας μετροταινία με υποδιαίρεσεις mm. Στη συνέχεια αφαιρείται ο στόχος, τοποθετείται ο γεωδαιτικός σταθμός και εφαρμόζεται η μέθοδος που περιγράφηκε παραπάνω. Η διαδικασία ολοκληρώνεται με τη μέτρηση του ύψους  $\Delta h_2$  του οργάνου από την κεφαλή του τρίποδα μέχρι το σημείο τομής των αξόνων του. Έτσι:

$$Υ.Σ. = \Delta\text{H} + (\text{H}\rho - \Delta h_2) + \Delta h_1$$

Ιδιαίτερη προσοχή θα πρέπει να δοθεί στην εναλλαγή στόχου – οργάνου στον τρίποδα ώστε να μην χαλάσει η κέντρωση.

#### 4.15 ΥΔΡΑΥΛΙΚΗ ΧΩΡΟΣΤΑΘΜΗΣΗ

Η μέθοδος αυτή προσδιορισμού υψομετρικών διαφορών βασίζεται στην αρχή των συγκοινωνούντων δοχείων. Σύμφωνα με αυτή, οι επιφάνειες υγρού που ηρεμεί μέσα σε δύο συγκοινωνούντα δοχεία βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, επομένως ορίζουν την ίδια χωροσταθμική επιφάνεια. Επομένως, η υδραυλική χωροστάθμηση εφαρμόζεται στην περίπτωση προσδιορισμού μικρών υψομετρικών διαφορών.

Η πιο συνηθισμένη εφαρμογή της μεθόδου είναι το αλφαδολάστιχο, διαφανής πλαστικός σωλήνας με νερό, που χρησιμοποιείται στις οικοδομές για τον έλεγχο της οριζοντιότητας (αλφάδιασμα) δομικών στοιχείων, κυρίως πλακών, αλλά και για την χάραξη μικρών κλίσεων. Η ακρίβειά του είναι της τάξης του 1 έως 2cm.

Χρησιμοποιώντας ειδικές συσκευές η ακρίβεια στον προσδιορισμό της υψομετρικής διαφοράς με την υδραυλική χωροστάθμηση μπορεί να φθάσει την ακρίβεια της γεωμετρικής χωροστάθμησης ακριβείας. Μια τέτοια συσκευή είναι η συσκευή Meiser. Η συσκευή αποτελείται από δύο γυάλινους μετρητικούς σωλήνες οι οποίοι συνδέονται με διαφανή πλαστικό σωλήνα, γεμάτο με υγρό. Σε κάθε σωλήνα υπάρχει ακίδα η οποία δίνει τη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού. Η ακίδα έχει τη δυνατότητα να μετακινηθεί κατά 100mm μέσα στον σωλήνα, ενώ συνδέεται με μετρητική διάταξη η οποία δίνει τη δυνατότητα ανάγνωσης με ακρίβεια  $\pm 0.01\text{mm}$ . Οι δύο σωλήνες έχουν τη δυνατότητα να αναρτώνται σε ειδικά μπουλόνια τα οποία υλοποιούν τα σημεία των οποίων ζητείται η υψομετρική τους διαφορά. Οι σωλήνες κατακορυφώνονται με τη βοήθεια σφαιρικής αεροστάθμης. Η διαφορά των αναγνώσεων στους δύο σωλήνες δίνει άμεσα την υψομετρική διαφορά των σημείων. Για να αποφευχθούν συστηματικά σφάλματα στις αναγνώσεις οι σωλήνες εναλλάσσονται στα δύο σημεία ενώ παίρνονται περισσότερες της μιας αναγνώσεις σε κάθε σημείο. Με τη συσκευή αυτή προσδιορίζονται υψομετρικές διαφορές μεγέθους μέχρι  $\pm 10\text{cm}$  με ακρίβεια  $\pm 0.02\text{mm}$ .

Η μέθοδος της υδραυλικής χωροστάθμησης εφαρμόζεται για :

- Την οριζοντίωση ή την υλοποίηση μικρών κλίσεων δομικών στοιχείων σε οικοδομές,
- Τον προσδιορισμό υψομετρικής διαφοράς σημείων που χωρίζονται από υδάτινη επιφάνεια (κανάλια, ποτάμια, λίμνες κλπ.)
- Τον προσδιορισμό μικρών υψομετρικών διαφορών σε βιομηχανικές εγκαταστάσεις και συναρμολογήσεις μηχανημάτων.

Στις Κάτω χώρες (Ολλανδία, Βέλγιο, Λουξεμβούργο) η μέθοδος έχει εφαρμοσθεί για τον προσδιορισμό υψομετρικών διαφορών σημείων σε αποστάσεις πολλών χιλιομέτρων με ακρίβειες της τάξης του  $\pm 1\text{mm}$ .

#### 4.16 ΒΑΡΟΜΕΤΡΙΚΗ ΥΨΟΜΕΤΡΙΑ

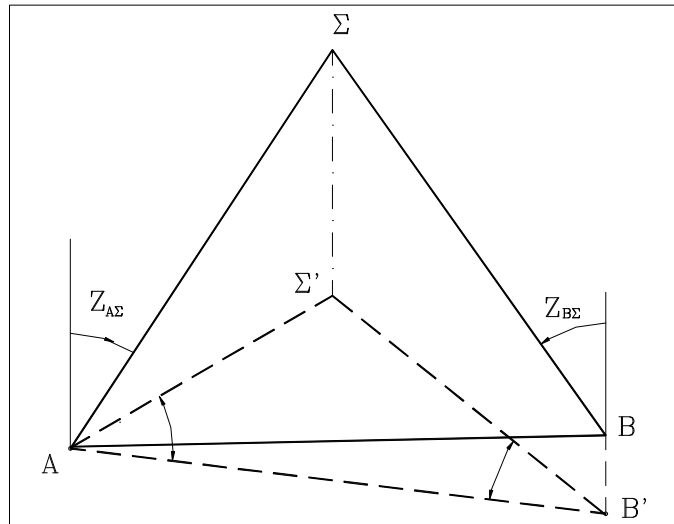
Η μέθοδος αυτή βασίζεται στο γεγονός ότι η ατμοσφαιρική πίεση μεταβάλλεται με την αύξηση του υψομέτρου. Στην επιφάνεια της θάλασσας (Μ.Σ.Θ.) η ατμοσφαιρική πίεση, υπό κανονικές ατμοσφαιρικές συνθήκες, είναι ίση με την πίεση στήλης υδραργύρου ύψους 760mm, μειώνεται δε όσο αυξάνει το υψόμετρο. Η μεταβολή αυτή δεν είναι σταθερή: εξαρτάται από το υψόμετρο, τις μετεωρολογικές συνθήκες και το γεωγραφικό πλάτος φ. Έτσι, ενώ είναι δύσκολο να μετρηθούν απόλυτα υψόμετρα με τη μέθοδο της βαρομετρικής υψομετρίας, είναι δυνατόν να μετρηθούν υψομετρικές διαφορές, μετρώντας τη μεταβολή της ατμοσφαιρικής πίεσης.

Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται βαρόμετρα (υδραργυρικά, ανεροειδή και θερμόμετρα βρασμού). Συνήθως για τον προσδιορισμό των υψομετρικών διαφορών με βαρομετρική υψομετρία χρησιμοποιούνται τα ανεροειδή βαρόμετρα ή αλτίμετρα. Αν οι μετρήσεις της μεταβολής της ατμοσφαιρικής πίεσης γίνουν σε κατάλληλες ατμοσφαιρικές συνθήκες, με όργανα που ελέγχονται και βαθμονομούνται τακτικά, ακολουθηθεί η σωστή μεθοδολογία και γίνουν οι κατάλληλες αναγωγές, η ακρίβεια στον προσδιορισμό των υψομετρικών διαφορών είναι της τάξης του  $\pm 1\text{ m}$ , ενώ με ειδική διαδικασία μετρήσεων η ακρίβεια της μεθόδου μπορεί να φθάσει τα  $\pm 30\text{ cm}$ .

#### 4.17 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

##### 4.17.1 Προσδιορισμός υψομέτρου απρόσιτου σημείου

Πολλές φορές παρουσιάζεται η ανάγκη να δοθεί υψόμετρο σε σημείο στο οποίο δεν μπορεί να τοποθετηθεί ανακλαστήρας για τη μέτρηση της απόστασης. Η μέθοδος παρουσιάζεται στο σχήμα 4.20. Στην περίπτωση αυτή ιδρύεται σε κατάλληλη θέση βοηθητική βάση AB και προσδιορίζεται το υψόμετρο του σημείου A ή B με γεωμετρική χωροστάθμηση από γειτονική χωροσταθμική αφετηρία, ή δίνεται σε ένα από τα δύο σημεία αυθαίρετο υψόμετρο. Από τα A και B μετρώνται με γεωδαιτικό σταθμό οι οριζόντιες γωνίες B – A - Σ και A – B - Σ, οι κατακόρυφες γωνίες  $Z_{AS}$ ,  $Z_{BS}$ ,  $Z_{AB}$  και  $Z_{BA}$  το κεκλιμένο μήκος  $S_{AB}$  σε μετάβαση και επιστροφή, τα ύψη οργάνου  $(Y.O.)_A$  και  $(Y.O.)_B$  αντίστοιχα και το ύψος του στόχου στο B  $(Y.Σ.)_B$ . Προφανώς το ύψος στόχου στο Σ είναι μηδέν  $(Y.Σ.Σ = 0)$  (σχ. 4.20).



Σχήμα 4.20 Προσδιορισμός υψόμετρου απρόσιτου σημείου

- Υπολογίζεται η οριζόντια απόσταση  $D_{AB}$  :

$$D_{AB} = S_{AB} \cdot \sin Z_{AB}, \quad D_{BA} = S_{BA} \cdot \sin Z_{BA} \quad \text{και} \quad D_{AB} = \frac{D_{AB} + D_{BA}}{2}$$

- Υπολογίζεται το υψόμετρο του σημείου B :

$$\Delta H_{AB} = D_{AB} \cdot \cot Z_{AB} + (Y.O.)_A - (Y.Σ.)_B,$$

$$\Delta H_{BA} = D_{AB} \cdot \cot Z_{BA} + (Y.O.)_B - (Y.Σ.)_A$$

$$\Delta H_{AB} = \frac{|\Delta H_{AB}| + |\Delta H_{BA}|}{2}, \quad H_B = H_A + \Delta H_{AB}$$

- Από την επίλυση του τριγώνου  $AB'\Sigma'$  ( $B'$ ,  $\Sigma'$  οι προβολές των B και Σ στο οριζόντιο επίπεδο που περνάει από το A), υπολογίζονται οι οριζόντιες αποστάσεις  $D_{A\Sigma}$  και  $D_{B\Sigma}$  :

$$D_{A\Sigma} = \frac{\sin(\angle B\Sigma)}{\sin[(\angle \Sigma AB) + (\angle AB\Sigma)]} D_{AB} \quad \text{και} \quad D_{B\Sigma} = \frac{\sin(\angle B A \Sigma)}{\sin[(\angle \Sigma AB) + (\angle AB\Sigma)]} D_{AB}$$

- Υπολογίζεται το υψόμετρο του σημείου Σ από τα A και B αντίστοιχα:

$$H_\Sigma = H_A + \Delta H_{A\Sigma} \Rightarrow H_\Sigma = H_A + D_{A\Sigma} \cdot \cot Z_{A\Sigma} + (Y.O.)_A,$$

$$H_\Sigma = H_B + \Delta H_{B\Sigma} \Rightarrow H_\Sigma = H_B + D_{B\Sigma} \cdot \cot Z_{B\Sigma} + (Y.O.)_B$$

Το υψόμετρο του Σ θα είναι προφανώς ο μέσος όρος των δύο υψόμετρων.

#### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Για τον προσδιορισμό του απρόσιτου σημείου Γ ιδρύθηκε σε κατάλληλη θέση η βάση AB. Στο σημείο A δόθηκε αυθαίρετο υψόμετρο  $H_A=100\text{m}$ . Με γεωδαιτικό σταθμό μετρήθηκαν τα ακόλουθα στοιχεία :



Οριζόντιες γωνίες	Κατακόρυφες γωνίες	Μήκη
B-A-Γ = 358.965 <sup>g</sup>	Z <sub>ΑΓ</sub> = 91.560 <sup>g</sup>	
A-B-Γ = 56.755 <sup>g</sup>	Z <sub>ΒΓ</sub> = 92.061 <sup>g</sup>	
	Z <sub>ΑΒ</sub> = 98.153 <sup>g</sup>	S <sub>ΑΒ</sub> = 56.032m
	Z <sub>ΒΑ</sub> =101.765 <sup>g</sup>	S <sub>ΒΑ</sub> = 56.032m

$$(Y.O.)_A=1.47m \quad (Y.O.)_B=1.45m \quad (Y.Σ.)_A=(Y.Σ.)_B=1.50m$$

- Υπολογισμός οριζόντιας απόστασης D<sub>ΑΒ</sub>:

$$D_{AB} = S_{AB} \cdot \sin Z_{AB} = 56.008m, \quad D_{BA} = S_{BA} \cdot \sin Z_{BA} = 56.010m$$

$$D_{AB} = \frac{D_{AB} + D_{BA}}{2} = 56.009m$$

- Υπολογισμός υψόμετρου του σημείου Β:

$$\Delta H_{AB} = D_{AB} \cdot \cot Z_{AB} + (Y.O.)_A - (Y.Σ.)_B = 1.595m,$$

$$\Delta H_{BA} = D_{AB} \cdot \cot Z_{BA} + (Y.O.)_B - (Y.Σ.)_A = -1.603m$$

$$\Delta H_{AB} = \frac{|\Delta H_{AB}| + |\Delta H_{BA}|}{2} = 1.599m$$

$$H_B = H_A + \Delta H_{AB} = 101.599m$$

- Υπολογισμός οριζόντιων αποστάσεων D<sub>ΑΓ</sub> και D<sub>ΒΓ</sub>:

$$D_{AG} = \frac{\sin(AB\Gamma)}{\sin[(\Gamma AB) + (AB\Gamma)]} D_{AB} = 43.602m$$

$$D_{BG} = \frac{\sin(\Gamma AB)}{\sin[(\Gamma AB) + (AB\Gamma)]} D_{AB} = 33.674m$$

- Υπολογισμός των υψομετρικών διαφορών ΔH<sub>ΑΓ</sub> και ΔH<sub>ΒΓ</sub>:

$$\Delta H_{AG} = D_{AG} \cdot \cot Z_{AG} + (Y.O.)_A = 7.285m,$$

$$\Delta H_{BG} = D_{BG} \cdot \cot Z_{BG} + (Y.O.)_B = 5.671m$$

- Υπολογισμός του υψόμετρου του σημείου Γ:

$$H_{\Gamma} = H_A + \Delta H_{AG} = 107.285m$$

$$H_{\Gamma} = H_B + \Delta H_{BG} = 107.270m$$

$$H_{\Gamma} = \frac{107.285 + 107.270}{2} \Rightarrow H_{\Gamma} = 107.278m$$

#### 4.17.2 Λήψη στοιχείων για τη σύνταξη διαγραμμάτων μηκοτομής – διατομών

Σε τεχνικά έργα μεγάλου μήκους όπως τα συγκοινωνιακά έργα (έργα οδοποιίας και σιδηροδρομικής), ή τα υδραυλικά έργα (κανάλια, αγωγοί ύδρευσης ή

αποχέτευσης) απαιτείται ο υψομετρικός προσδιορισμός του άξονα του έργου καθώς και μιας ζώνης δεξιά και αριστερά σε κατάλληλη απόσταση από αυτόν, με σκοπό να προσδιορισθεί τελικά ο όγκος των χωματισμών που απαιτείται για την ολοκλήρωση του έργου.

Ο υψομετρικός προσδιορισμός της θέσης του άξονα γίνεται προσδιορίζοντας τα υψόμετρα χαρακτηριστικών σημείων του, με γεωμετρική χωροστάθμηση ή τριγωνομετρική υψομετρία, ενώ ταυτόχρονα προσδιορίζεται και η οριζοντιογραφική τους θέση, μετρώντας την απόσταση των σημείων αυτών συνήθως από την αρχή του άξονα. Με αυτά τα οριζοντιογραφικά και υψομετρικά στοιχεία συντάσσονται στη συνέχεια τα διαγράμματα μηκοτομής και διατομών.

*Μηκοτομή* ή *κατά μήκος τομή* είναι η τομή του εδάφους (ή γενικότερα ενός έργου) από μια κατακόρυφη επιφάνεια που περνά από τον άξονα του έργου.

*Διατομή* ή *κατά πλάτος τομή* είναι η τομή του εδάφους από κατακόρυφο επίπεδο κάθετο στον άξονα του έργου.

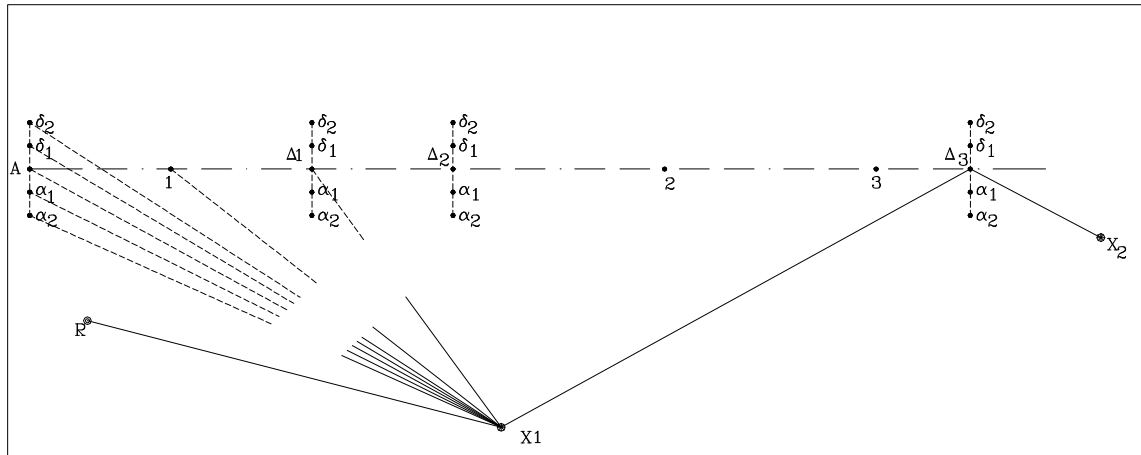
Η θέση του άξονα του έργου υλοποιείται (χαράζεται) στο έδαφος, συνήθως με πασσάλους. Οι πάσσαλοι τοποθετούνται με πυκνότητα που εξαρτάται από την μορφολογία του εδάφους, την απαιτούμενη ακρίβεια και τη μορφή του άξονα. Οπωσδήποτε τοποθετούνται πάσσαλοι στα χαρακτηριστικά σημεία εκείνα όπου υπάρχει αλλαγή της κλίσης του εδάφους, εκεί όπου ο άξονας διασταυρώνεται με ήδη υπάρχοντα τεχνικά έργα, στα πρωτεύοντα σημεία των τόξων προσαρμογής, στα ακέραια εκατόμετρα και χιλιόμετρα και όπου αλλού κρίνεται σκόπιμο. Η απόσταση των πασσάλων από την αρχή του άξονα ορίζει τη θέση τους οριζοντιογραφικά ενώ τα υψόμετρα τους τη θέση τους υψομετρικά. Το πλάτος των διατομών εξαρτάται από το πλάτος του έργου και τη μορφή του εδάφους. Τα σημεία των διατομών αριστερά και δεξιά του άξονα δεν πασσαλώνονται συνήθως, η θέση τους επιλέγεται στη διάρκεια των μετρήσεων. Με τα στοιχεία αυτά συντάσσονται τα διαγράμματα μηκοτομής και διατομών.

Ο υψομετρικός προσδιορισμός, όπως αναφέρθηκε, γίνεται με γεωμετρική χωροστάθμηση ή τριγωνομετρική υψομετρία.

- *Υψομετρικός προσδιορισμός με Γεωμετρική Χωροστάθμηση*

Στην περίπτωση αυτή, επειδή οι απαιτήσεις σε ακρίβεια δεν είναι μεγάλες, δεν τηρείται η βασική αρχή των ίσων αποστάσεων του οργάνου από τις σταδίες. Έτσι, ταυτόχρονα με την χωροστάθμηση των πασσάλων που υλοποιούν τον άξονα του έργου σκοπεύονται και σημεία των διατομών. Συνήθως το όργανο τοποθετείται σε κατάλληλη θέση ώστε να μπορεί να σκοπεύει όσο το δυνατόν περισσότερα σημεία (πασσάλους) τα οποία βρίσκονται σε διαφορετικές αποστάσεις από το χωροβάτη, πρόκειται δηλ. για χωροστάθμηση με ενδιάμεσα σημεία.

Αρχικά σκοπεύεται σημείο γνωστού (ή αυθαίρετου) υψόμετρου (Όπισθεν σκόπευση), στη συνέχεια σκοπεύονται όλα τα σημεία τα οποία φαίνονται από τη συγκεκριμένη θέση του χωροβάτη (σημεία μεταξύ ή ενδιάμεσα σημεία), η σκόπευση στο τελευταίο από αυτά (σημείο αλλαγής) θεωρείται Έμπροσθεν σκόπευση. Στη συνέχεια ο χωροβάτης μετακινείται σε νέα θέση οπότε η σκόπευση του σημείου αλλαγής από τη νέα θέση του χωροβάτη θεωρείται όπισθεν σκόπευση. Στο σχήμα 4.21 που ακολουθεί παρουσιάζεται η διαδικασία λήψης στοιχείων μηκοτομής και διατομών.



**Σχήμα 4.21** Λήψη στοιχείων μηκοτομής και διατομών

Ο χωροβάτης τοποθετείται στη θέση  $X_1$  από την οποία φαίνονται η αρχή  $A$  του άξονα, τα σημεία 1, 2, 3 και οι διατομές  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  και  $\Delta_3$ . Αρχικά σκοπεύεται η χωροσταθμική αφετηρία  $R$  (Όπισθεν ανάγνωση), στη συνέχεια διαδοχικά η αρχή  $A$  του άξονα, το σημείο 1, τα σημεία  $\delta_2$ ,  $\delta_1$ ,  $\Delta_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  της διατομής  $\Delta_1$ , τα σημεία  $\delta_2$ ,  $\delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  της διατομής  $\Delta_2$ , τα σημεία 2 και 3 του άξονα και τέλος τα σημεία  $\delta_2$ ,  $\delta_1$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  της διατομής  $\Delta_3$  (αναγνώσεις μεταξύ). Το σημείο  $\Delta_3$  σκοπεύεται τελευταίο (Έμπροσθεν ανάγνωση). Όλες οι αναγνώσεις λαμβάνονται με ακρίβεια εκατοστού. Στη συνέχεια ο χωροβάτης μεταφέρεται στη θέση  $X_2$ , σκοπεύεται το σημείο  $\Delta_3$  (Όπισθεν ανάγνωση) και η διαδικασία επαναλαμβάνεται. Παράλληλα με τις αναγνώσεις στη σταδία μετρώνται και οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων του άξονα καθώς και οι αποστάσεις μεταξύ των σημείων της κάθε διατομής

Οι μετρήσεις καταγράφονται σε ειδικό έντυπο, απόσπασμα του οποίου φαίνεται παρακάτω. Η ανάγνωση στη σταδία στη χωροσταθμική αφετηρία γράφεται στη στήλη ΟΠΙΣΘΕΝ, όλες οι ενδιάμεσες σκοπεύσεις στη στήλη ΜΕΤΑΞΥ, και η ανάγνωση στη σταδία στο σημείο  $\Delta_3$  στη στήλη ΕΜΠΡΟΣΘΕΝ.

Για τον υπολογισμό των υψομέτρων των σημείων χρησιμοποιείται η μέθοδος του *Οριζόντα του οργάνου* ( $H_o$ ). Προσθέτοντας στο υψόμετρο της χωροσταθμικής αφετηρίας  $R$  την ανάγνωση στη σταδία Όπισθεν, που είναι τοποθετημένη σε αυτό, προσδιορίζεται το υψόμετρο του οριζόντα του οργάνου, δηλ. το υψόμετρο του οριζώντιου επιπέδου που υλοποιεί ο σκοπευτικός άξονας του χωροβάτη.

$$H_o = H_R + O \quad (4.43)$$

Τα υψόμετρα όλων των υπόλοιπων σημείων προκύπτουν αν από το υψόμετρο του οριζόντα του οργάνου αφαιρεθεί η αντίστοιχη ανάγνωση στη σταδία (αναγνώσεις στις στήλες μεταξύ και έμπροσθεν), π.χ.:

$$H_1 = H_o - M \quad (4.44)$$

ή

$$H_1 = H_o - E \quad (4.44\alpha)$$

αντίστοιχα.

Φυσικά για κάθε νέα στάση χωροβάτη υπολογίζεται και νέο υψόμετρο του οριζόντα.

- *Υψομετρικός προσδιορισμός με Τριγωνομετρική Υψομετρία*

Στην περίπτωση αυτή προσδιορίζονται οι συντεταγμένες και τα υψόμετρα των χαρακτηριστικών σημείων του άξονα του έργου καθώς και των διατομών, σε αυθαίρετο τοπικό σύστημα ή στο κρατικό σύστημα αναφοράς. Αντίστοιχα τα υψόμετρα μπορεί να είναι αυθαίρετα ή απόλυτα. Για κάθε σημείο μετρώνται με γεωδαιτικό σταθμό η οριζόντια γωνία ( $H_z_i$ ), η κατακόρυφη γωνία ( $Z_i$ ), το κεκλιμένο μήκος  $S_i$  καθώς και τα ύψη οργάνου (Υ.Ο.) και στόχου (Υ.Σ.). Ως στάσεις για τις μετρήσεις χρησιμοποιούνται κορυφές του δικτύου με το οποίο υλοποιήθηκε ο άξονας του έργου. Εφαρμόζοντας το 1<sup>ο</sup> θεμελιώδες και τη σχέση της τριγωνομετρικής υψομετρίας υπολογίζονται οι συντεταγμένες και τα υψόμετρα των χαρακτηριστικών σημείων.

- *Σύνταξη διαγραμμάτων μηκοτομής και διατομών*

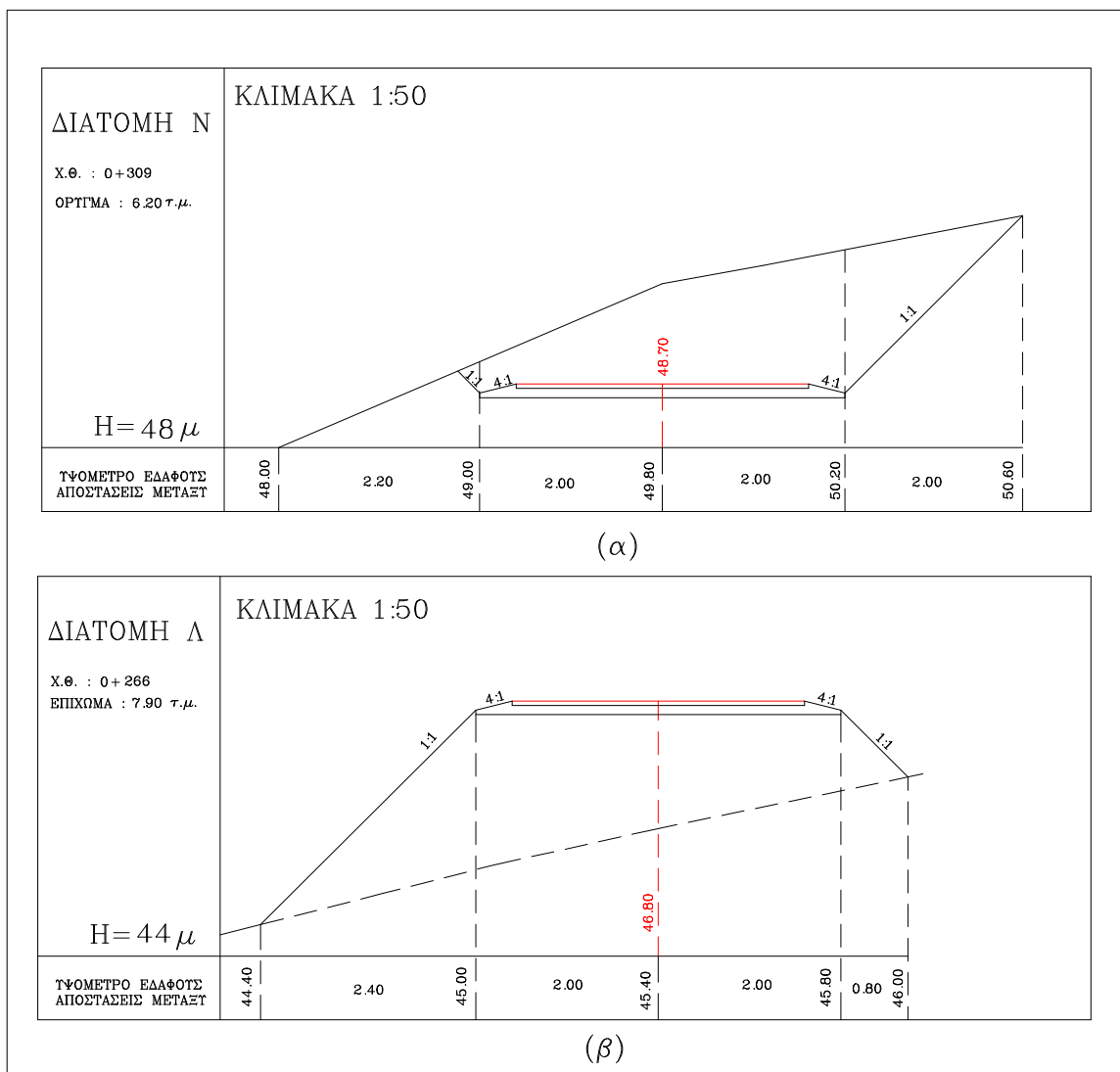
Με τα οριζοντιογραφικά και υψομετρικά στοιχεία που ορίζουν τη θέση των πασσάλων (αποστάσεις από την αρχή του άξονα και υψόμετρα αντίστοιχα) συντάσσεται στη συνέχεια το διάγραμμα της μηκοτομής το οποίο απεικονίζει τη μορφή του εδάφους κατά μήκος του άξονα. Το διάγραμμα της μηκοτομής συντάσσεται χρησιμοποιώντας ορθογώνιους άξονες X και Y, με τον άξονα X να απεικονίζει τα μήκη (αποστάσεις μεταξύ και από την αρχή) και τον άξονα Y τα υψόμετρα των χαρακτηριστικών σημείων του άξονα. Για τη σύνταξη του διαγράμματος χρησιμοποιούνται διαφορετικές κλίμακες στους άξονες X και Y: η κλίμακα των υψών είναι δεκαπλάσια της κλίμακας των μηκών (π.χ. κλίμακα μηκών 1:1000, κλίμακα υψών 1:100). Αυτό έχει καθιερωθεί προκειμένου το διάγραμμα να γίνει πιο εποπτικό και να φαίνονται καλύτερα οι ανωμαλίες του εδάφους. Στην περίπτωση σημείων που ανήκουν σε καμπύλη, ως μήκος στον άξονα των X τίθεται το ανάπτυγμα της καμπύλης (όπως προβάλλεται στο οριζόντιο επίπεδο). Το διάγραμμα της μηκοτομής στην περίπτωση οριστικής μελέτης συμπληρώνεται με τη σχεδίαση της υψομετρικής θέσης και μορφής του άξονα του έργου (ερυθρά), τη θέση όλων των τεχνικών έργων που πρόκειται να γίνουν κατά την κατασκευή του δρόμου (οχετοί, γέφυρες κλπ.) και συνοδεύεται από υπόμνημα που δίνει όλη την απαραίτητη πληροφορία.

Αντίστοιχα, χρησιμοποιώντας τα οριζοντιογραφικά και υψομετρικά στοιχεία που αφορούν κάθε διατομή συντάσσονται τα διαγράμματα των διατομών, με τρόπο ανάλογο της μηκοτομής. Στα διαγράμματα των διατομών η κλίμακα μηκών και υψομέτρων είναι ίδια, συνήθως δε ίδια με αυτή της κλίμακας των υψομέτρων της διατομής. Σε κάθε διατομή σχεδιάζεται επίσης και η τελική μορφή του οδοστρώματος του έργου με τις κλίσεις του και τα ανάλογα τεχνικά έργα (κλίσεις πρανών εκσκαφών ή επιχώσεων κλπ.) Στα σχήματα 4.22 και 4.23 δίνεται απόσπασμα μηκοτομής καθώς και δύο διατομές σε όρυγμα (α) και σε επίχωση (β) αντίστοιχα.

Παράδειγμα συμπλήρωσης εντύπου για τη σύνταξη διαγραμμάτων μηκοτομής και διατομών

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΚΑΤΑ ΜΗΚΟΣ – ΚΑΤΑ ΠΛΑΤΟΣ ΤΟΜΩΝ								
Α/Α	ΑΠΟΣΤΑΣΕΙΣ		ΑΝΑΓΝΩΣΕΙΣ ΣΤΑΔΙΑΣ			ΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΟΡΓΑΝΟΥ	ΥΨΟΜΕΤΡΑ	ΣΚΑΡΙΦΗΜΑΤΑ
	Απ' αρχής	Μεταξύ	Όπισθεν	Μεταξύ	Έμπροσθεν			
R33			1.86			<b>130.50</b>	128.64	
A	0.00			0.99			129.51	
α1		5		1.02			129.48	
α2		5		1.12			129.38	
δ1		5		0.95			129.55	
δ2		5		0.87			129.63	
B	50.00	50.00		1.25			129.25	
α1		5		1.01			129.49	
α2		5		0.87			129.63	
δ1		5		1.18			129.32	
δ2		5		1.12			129.38	
Γ	100.00	50.00		1.53			128.97	
α1		5		1.67			128.83	
α2		5		1.78			128.72	
δ1		5		0.98			129.52	
δ2		5		0.80			129.70	
Δ	150.00	50			1.50		129.00	
Δ	150.00	50	0.77			<b>129.77</b>	129.00	
α1		5		0.81			128.96	
α2		5		1.22			128.55	
δ1		5		0.65			129.12	
δ2		5		0.53			129.24	





Σχήμα 4.23 Διάγραμμα διατομής σε όρυγμα (α) και σε επίχωση (β)

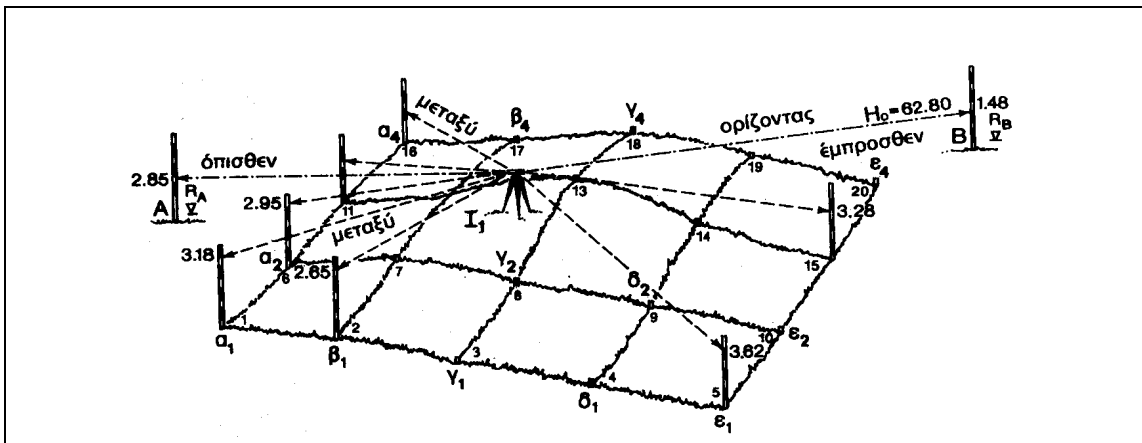
#### 4.17.3 Χωροστάθμιση επιφάνειας

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται όταν απαιτείται ο προσδιορισμός των υψομέτρων σημείων του εδάφους με πυκνότητα και ακρίβεια καλύτερη από εκείνη που θα προκύψει από τη γραμμική παρεμβολή των υψομετρικών καμπυλών του τοπογραφικού διαγράμματος που χρησιμοποιήθηκε για τη μελέτη του τεχνικού έργου. Συνήθως η ανάγκη αυτή προκύπτει για τον υπολογισμό του όγκου των εκσκαφών που απαιτούνται στη φάση της θεμελίωσης ενός τεχνικού έργου π.χ. ενός κτιριακού συγκροτήματος.

Για το σκοπό αυτό προσδιορίζεται οριζοντιογραφικά και υψομετρικά η θέση χαρακτηριστικών σημείων του εδάφους έτσι ώστε να παρέχεται με την απαιτούμενη κάθε φορά πιστότητα η μορφή του εδάφους. Στις περισσότερες περιπτώσεις χαράσσεται και υλοποιείται, με κατάλληλη κάθε φορά σήμανση, κανάβος. Η διάσταση των τετραγώνων του κανάβου κυμαίνεται από 5m έως και 30m ανάλογα με την απαιτούμενη ακρίβεια και τη μορφολογία του εδάφους, ενώ για τη χάραξη χρησιμοποιούνται μετροταινίες, θεοδόλιχα και σήμερα πλέον γεωδαιτικοί σταθμοί.

Ο υψομετρικός προσδιορισμός των κορυφών του κανάβου γίνεται με γεωμετρική χωροστάθμηση ή τριγωνομετρική υψομετρία. Στην περίπτωση που επιλεγεί η μέθοδος της γεωμετρικής χωροστάθμησης εφαρμόζεται η διαδικασία που ακολουθείται για τη λήψη στοιχείων για τη σύνταξη διαγραμμάτων μηκοτομής και διατομών. Ο χωροβάτης τοποθετείται σε τέτοια θέση ώστε να βλέπει όσο το δυνατόν περισσότερες κορυφές του κανάβου. Σκοπεύεται αρχικά (Οπισθεν ανάγνωση) σταδία που τοποθετείται σε σημείο γνωστού υψόμετρου (ή στην πρώτη κορυφή του κανάβου στην οποία και δίνεται αυθαίρετο υψόμετρο), στη συνέχεια σκοπεύονται διαδοχικά όσες κορυφές του κανάβου φαίνονται από τη θέση αυτή του χωροβάτη (αναγνώσεις μεταξύ). Αν για την ολοκλήρωση των μετρήσεων απαιτείται να μετακινηθεί ο χωροβάτης σε νέα θέση τότε το τελευταίο σημείο που σκοπεύθηκε από την πρώτη θέση του χωροβάτη θεωρείται σημείο αλλαγής, και η σκόπευσή του από τη νέα θέση του χωροβάτη θεωρείται Όπισθεν σκόπευση. Η μέθοδος φαίνεται στο σχήμα 4.24.

Τα υψόμετρα των κορυφών του κανάβου υπολογίζονται με τη μέθοδο του οριζοντα του οργάνου (σχέσεις 4.44 και 4.44α), ενώ οριζοντιογραφικά η θέση τους προσδιορίζεται στο σύστημα αναφοράς που υλοποιεί ο κανάβος.



Σχήμα 4.24 Χωροστάθμηση επιφάνειας [6]

Η οριζοντιογραφική και υψομετρική θέση των κορυφών του κανάβου μπορεί να γίνει και με τη χρήση γεωδαιτικού σταθμού, όπως ακριβώς και στη λήψη στοιχείων για τη σύνταξη διαγραμμάτων μηκοτομής και διατομών. Στην περίπτωση αυτή τα υψόμετρα των κορυφών του κανάβου προσδιορίζονται με τριγωνομετρική υψομετρία.

#### 4.18 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποια είναι τα είδη των υψόμετρων που χρησιμοποιούνται στη Γεωδαισία; Ποιες επιφάνειες αναφοράς συνδέονται με αυτά;
2. Ποια είναι η σχέση του γεωειδούς με τη Μ.Σ.Θ.; Πως προσδιορίζεται η Μ.Σ.Θ.;
3. Τι ονομάζεται απόκλιση της κατακορύφου;
4. Με ποιες μεθόδους προσδιορίζεται η ορθομετρική υψομετρική διαφορά μεταξύ δύο σημείων. Ποια όργανα χρησιμοποιούνται και τι ακρίβειες επιτυγχάνονται με κάθε μία από αυτές.
5. Ποιες οι συνθήκες ορθής λειτουργίας του χωροβάτη.



6. Για τον προσδιορισμό των υψομέτρων των σημείων A και B έγινε διπλή γεωμετρική χωροστάθμηση με αρχή την υψομετρική αφετηρία R138 ( $H_{R138} = 256.329m$ ). Τα αποτελέσματα των μετρήσεων δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

α/α	ΜΗΚΗ (βήματα)	Οπισθεν	Εμπροσθεν	Ο - Ε	Προσωρινές ΔΗ	δΔΗ	Τελικές ΔΗ	Υψόμετρα
<b>ΜΕΤΑΒΑΣΗ (aller)</b>								
R138	15/18	1.726						
A	20/22	1.453	0.942					
1	25/28	0.745	0.619					
2	25/23	0.587	1.251					
B	20/19	1.249	1.333					
3	22/21	1.681	1.574					
R138	17		1.446					

α/α	ΜΗΚΗ (βήματα)	Οπισθεν	Εμπροσθεν	Ο - Ε	Προσωρινές ΔΗ	δΔΗ	Τελικές ΔΗ	Υψόμετρα
<b>ΕΠΙΣΤΡΟΦΗ (retour)</b>								
R138	15/18	1.552						
B	20/22	1.900	1.458					
4	25/28	0.886	1.018					
5	25/23	1.127	0.976					
A	20/19	1.364	1.229					
R138	22/21		2.152					

Να υπολογισθούν τα υψόμετρα των A και B.

(Απάντηση :  $H_A=255.544m$ ,  $H_B=254.853m$ )

7. Να υπολογισθούν οι αβεβαιότητες στον προσδιορισμό των υψομέτρων των A και B της προηγούμενης άσκησης αν :  $\sigma_{HR} = \pm 2mm$ ,  $\sigma_{\Delta HR-A}^{aller} = \sigma_{\Delta HR-A}^{retour} = \pm 3mm$ ,  $\sigma_{\Delta HA-B}^{aller} = \pm 3mm$  και  $\sigma_{\Delta HA-B}^{retour} = \pm 4mm$ .

(Απάντηση :  $\sigma_{HA}=\pm 3mm$ ,  $\sigma_{HB}=\pm 4mm$ )

8. Ποια είναι τα συστηματικά σφάλματα που εμφανίζονται στη μέτρηση μιας υψομετρικής διαφοράς με τη μέθοδο της γεωμετρικής χωροστάθμησης. Ποια από αυτά μπορούν να εξαλειφθούν και με ποια διαδικασία.

9. Ποια συστηματικά σφάλματα επηρεάζουν την ακρίβεια στον προσδιορισμό μιας υψομετρικής διαφοράς με τη μέθοδο της τριγωνομετρικής υψομετρίας. Ποια από αυτά μπορούν να εξαλειφθούν και με ποια διαδικασία.

10. Για τον προσδιορισμό της υψομετρικής διαφοράς  $\Delta H_{ij}$  μετρήθηκαν το κεκλιμένο μήκος  $S_{ij} = 678.932m$ , με T.S. ονομαστικής ακρίβειας  $\pm (3mm \pm 3ppm)$ , η κατακόρυφη γωνία  $Z_{ij} = 105.3220^g \pm 40^c$ , καθώς και τα Υψηλότερα όργανου και στόχου (Υ.Ο. =  $\pm 1.48m \pm 5mm$ , Υ.Σ. =  $1.72m \pm 5mm$ ) αντίστοιχα. Ο συντελεστής γεωδαιτικής διάθλασης στην περιοχή είναι  $k = 0.16$  και η μέση ακτίνα της γης να θεωρηθεί  $R = 6371km$ . Να υπολογισθεί η αβεβαιότητα  $\sigma_{\Delta H_{ij}}$  στον προσδιορισμό της υψομετρικής διαφοράς και να εκφρασθεί σε p.p.m. (Τα μεγέθη k και R να θεωρηθούν χωρίς σφάλμα).

(Απάντηση :  $\sigma_{\Delta H_{ij}} = \pm 0.043m$  ή  $750ppm$ )

**11.** Για τον προσδιορισμό του υψόμετρου της κορυφής  $\Sigma$  μιας πολυγωνικής όδευσης σκοπεύθηκε η στέψη του βάθρου που υλοποιεί το τριγωνομετρικό σημείο  $T$  και μετρήθηκε η κατακόρυφη γωνία  $Z_{\Sigma T}$  σε δύο πλήρεις περιόδους. Η μέση τιμή της κατακόρυφης γωνίας υπολογίσθηκε  $Z_{\Sigma T} = 94.6248^{\circ}$  ενώ το ύψος οργάνου μετρήθηκε  $Y.O.=1.47m$ . Να υπολογισθεί το υψόμετρο της κορυφής  $\Sigma$ . Δίνονται:

$X_{\Sigma}=479067.522m$ ,  $Y_{\Sigma}=4203062,751m$ ,  $X_T=481933.330m$ ,  $Y_T=4201757,420m$ , το υψόμετρο του τριγωνομετρικού  $T$   $H_T=436.83m$ , το ύψος του βάθρου= $1.10m$ . Ο συντελεστής παραμόρφωσης λόγω προβολής είναι  $m=0.9996$ , ο συντελεστής γεωδαιτικής διάθλασης είναι  $k=0.16$  και η μέση ακτίνα της γης  $R = 6371km$ .

(Απάντηση:  $H_{\Sigma}=169.16m$ )

**12.** Πως ορίζεται ο συντελεστής γεωδαιτικής διάθλασης. Με ποιες μεθόδους προσδιορίζεται.

**13.** Τι είναι ορίζοντας οργάνου και πως προσδιορίζεται.

## **5. ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟΣ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ**

### **5.1 ΓΕΝΙΚΑ**

Ο δορυφορικός εντοπισμός αναφέρεται στη διαδικασία με την οποία χρησιμοποιούνται τεχνητοί δορυφόροι για τον ακριβή εντοπισμό σημείων στην ΦΓΕ. Σήμερα χρησιμοποιείται ο γενικός όρος «Παγκόσμια Δορυφορικά Συστήματα Πλοήγησης (GNSS)» για να περιγράψει τα συστήματα δορυφορικής πλοήγησης (satellite navigation) που παρέχουν αυτόνομο εντοπισμό με παγκόσμια κάλυψη σε συγκεκριμένο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς. Οι χρήστες των συστημάτων GNSS μέσω ειδικών δεκτών που λαμβάνουν τα δορυφορικά σήματα προσδιορίζουν τη θέση τους με ακρίβεια που ποικίλει από λίγα εκατοστά έως λίγα μέτρα ανάλογα με το είδος των δεκτών και την τεχνική μέτρησης που εφαρμόζουν.

Μέχρι σήμερα (2010), το στρατιωτικό σύστημα NAVSTAR Global Positioning System (GPS) είναι το μόνο πλήρως λειτουργικό GNSS. Τα βασικότερα συστήματα GNSS τα οποία όμως δεν είναι πλήρως λειτουργικά, περιλαμβάνουν το ρωσικό GLONASS το οποίο είναι σε στάδιο αποκατάστασης της πλήρους λειτουργίας του (21 από 24 δορυφόρους είναι λειτουργικοί) και το πολιτικό σύστημα της Ευρωπαϊκής Ένωσης Galileo το οποίο βρίσκεται σε αρχική φάση ανάπτυξης και έχει προγραμματισθεί να τεθεί σε λειτουργία το 2014. Άλλες χώρες που έχουν αναπτύξει συστήματα GNSS είναι η Λαϊκή Δημοκρατία της Κίνας με το σύστημα Compass που αποτελεί επέκταση του BeiDou, η Ιαπωνία με το σύστημα QZSS (Quasi-Zenith Satellite System) και η Ινδία με το σύστημα IRNSS (Indian Regional Navigational Satellite System).

Στις ενότητες που ακολουθούν θα δοθούν οι βασικές αρχές λειτουργίας του συστήματος GPS με έμφαση στον απόλυτο εντοπισμό θέσης.

### **5.2 ΑΡΧΗ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΤΟΥ GPS**

Το GPS είναι βασικά ένα στρατιωτικό σύστημα πλοήγησης, το οποίο σχεδιάστηκε, χρηματοδοτήθηκε και ελέγχεται από το Υπουργείο Άμυνας των ΗΠΑ. Ο πρώτος δορυφόρος ετέθη σε τροχιά το 1978 ενώ σήμερα αποτελείται από 34 δορυφόρους. Παρόλο που ο πρωταρχικός στόχος του GPS είναι για αμυντικούς και στρατιωτικούς σκοπούς των ΗΠΑ, η χρήση του συστήματος είναι ελεύθερη προς το παρόν για όλους τους μη στρατιωτικούς χρήστες. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την ανάπτυξη του συστήματος υπάρχει πλούσια διεθνής βιβλιογραφία.

Οι εφαρμογές του GPS ενδεικτικά περιλαμβάνονται στις παρακάτω βασικές κατηγορίες:

- Τοπογραφία και Χαρτογραφία στη στεριά, θάλασσα και στον αέρα, όπως εφαρμογές ίδρυσης αστικών και άλλων δικτύων, συλλογή δεδομένων για Γεωγραφικά Συστήματα Πληροφοριών (GIS), τοπογραφικές εργασίες ακριβείας (π.χ. τεχνική γεωδαισία), προσδιορισμός φωτοσταθερών στην φωτογραμμετρία, χρήση σε γεωφυσικές εργασίες.

- Γεωδαιτικές εφαρμογές, όπως ίδρυση γεωδαιτικών δικτύων ελέγχου σε τοπική ή εθνική κλίμακα, προσδιορισμός γεωειδούς και υψομετρικού υποβάθρου, ακριβείς εργασίες παρακολούθησης μετακινήσεων.
- Γεωδυναμικές εφαρμογές, όπως η μέτρηση της σχετικής θέσης ενός τοπικού δικτύου σημείων αναφοράς σε τακτικά χρονικά διαστήματα με σκοπό να διαπιστωθεί πιθανή οριζοντιογραφική ή υψομετρική κίνηση τεκτονικών πλακών.
- Πλοήγηση σε στεριά, θάλασσα και αέρα, που περιλαμβάνει εφαρμογές κινηματικού εντοπισμού μεγάλης ή μικρής ακρίβειας, όπως υποστήριξη εφαρμογών μετακίνησης στόλων οχημάτων (π.χ. αστυνομία, μέσα συγκοινωνίας, ασθενοφόρα) καθώς και την παρακολούθηση οχημάτων π.χ. ταξί, φορτηγών που μεταφέρουν επικίνδυνα εμπορεύματα, τρένων κλπ.
- Στρατιωτικές εφαρμογές
- Χρήσεις αναψυχής
- Άλλες ειδικές χρήσεις, όπως μεταφορά χρόνου, προσδιορισμός θέσης ατράκτου αεροσκαφών κλπ

Στα βασικότερα πλεονεκτήματα του συστήματος περιλαμβάνονται τα παρακάτω:

- Σχετικά μεγάλες ακρίβειες προσδιορισμού θέσης, σε επίπεδα που κυμαίνονται από δεκάμετρα ως λίγα χιλιοστά.
- Ο προσδιορισμός θέσης γίνεται ταυτόχρονα σε τρεις διαστάσεις, δηλαδή οριζοντιογραφικός και υψομετρικός εντοπισμός.
- Προσδιορισμός της ταχύτητας και του χρόνου σε επίπεδα ακρίβειας που αντιστοιχούν σε αυτά του προσδιορισμού θέσης.
- Διαθέσιμο στους χρήστες οπουδήποτε και αν βρίσκονται - στον αέρα, στη ΦΓΕ ή στη θάλασσα.
- Σχετικά μικρό κόστος για το σύστημα δέκτη/κεραίας, ενώ επίσης δεν απαιτείται συνδρομή χρήσης του GPS.
- Σύστημα παντός καιρού, διαθέσιμο 24 ώρες καθημερινά.

Το σύστημα GPS χωρίζεται σε τρία τμήματα:

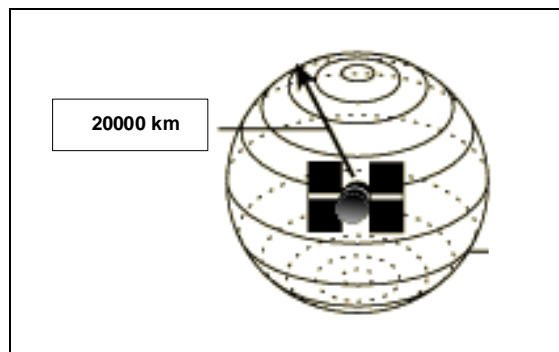
1. Το Τμήμα του Διαστήματος: περιλαμβάνει τους δορυφόρους οι οποίοι εκπέμπουν τα σήματα που είναι απαραίτητα για την λειτουργία του συστήματος.
2. Το Τμήμα Ελέγχου: περιλαμβάνει τους γήινους σταθμούς ελέγχου που έχουν την ευθύνη της παρακολούθησης των δορυφόρων, των υπολογισμών για τις τροχιές τους καθώς και όλο τον απαραίτητο καθημερινό έλεγχο του Τμήματος του Διαστήματος.
3. Το Τμήμα των Χρηστών: περιλαμβάνει την ποικιλία των εφαρμογών, οργάνων και υπολογιστικών τεχνικών που δίνουν στους χρήστες τις λύσεις εντοπισμού θέσης.

Η αρχή λειτουργίας του προσδιορισμού θέσης με το GPS βασίζεται θεωρητικά στην «οπισθοτομία» στο χώρο, δηλαδή την ταυτόχρονη μέτρηση μηκών από τους δορυφόρους στους δέκτες.

- Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει ο δέκτης GPS να μετρήσει τον χρόνο που απαιτείται να ταξιδέψει το σήμα από τον δορυφόρο στον δέκτη.
- Για να μετρηθεί ο χρόνος αυτός απαιτείται ακριβής χρονόμετρηση.
- Είναι απαραίτητη η ακριβής γνώση της θέσης των δορυφόρων στην τροχιά τους κάθε χρονική στιγμή.
- Τέλος, πρέπει να γίνουν διορθώσεις για καθυστερήσεις που οφείλονται στην ατμόσφαιρα καθώς το σήμα ταξιδεύει μέσα σε αυτή.

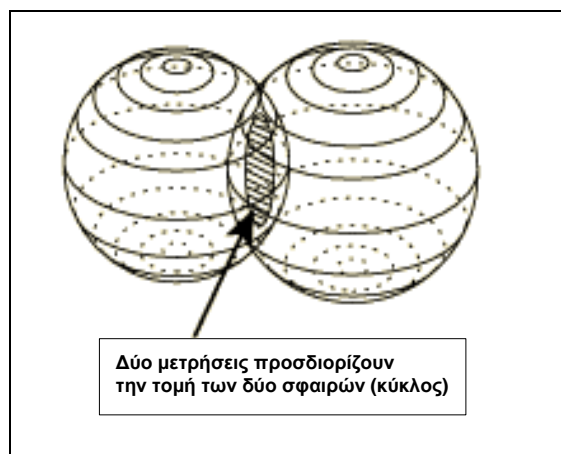
Η μέτρηση με χρήση του GPS βασίζεται στην θεώρηση ότι οι δορυφόροι στο διάστημα είναι “σημεία αναφοράς” που χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό της θέσης στην γήινη επιφάνεια. Αυτή η ιδέα γεωμετρικά εξηγείται παρακάτω:

Έστω ότι μετράται η απόσταση από ένα δορυφόρο μέχρι την επιφάνεια της γης, και υπολογίζεται ότι είναι 20000 km. Αυτό σημαίνει ότι όλες οι πιθανές θέσεις θα μπορούσαν να βρίσκονται στην επιφάνεια μιας σφαίρας που έχει κέντρο το δορυφόρο και ακτίνα 20000 km (βλ. σχήμα 5.1).



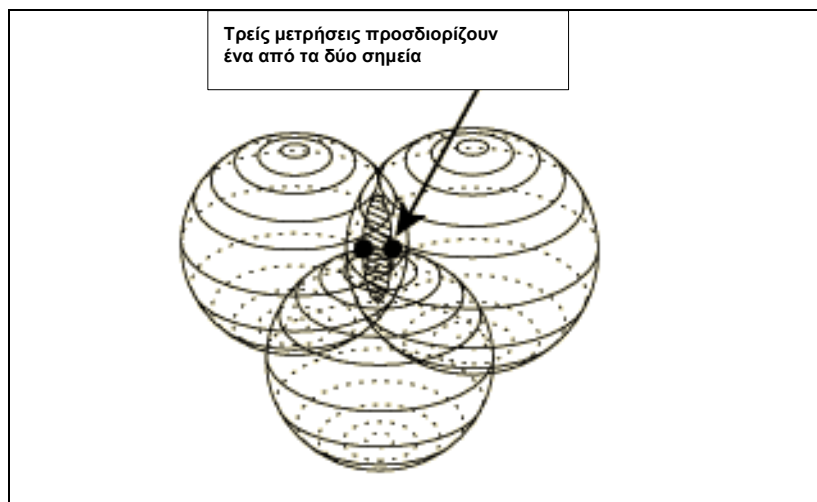
**Σχήμα 5.1** Οι πιθανές θέσεις του χρήστη βρίσκονται σε σφαίρα με κέντρο τον δορυφόρο και ακτίνα 20000km

Στην συνέχεια, έστω ότι μετράται η απόσταση προς δεύτερο δορυφόρο που βρίσκεται 21000 km από την επιφάνεια της γης. Αυτό σημαίνει ότι η θέση του χρήστη βρίσκεται κάπου σε ένα κύκλο όπου ορίζεται από την τομή των δύο σφαιρών, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2.



**Σχήμα 5.2** Οι πιθανές θέσεις του χρήστη βρίσκονται στην τομή των δύο σφαιρών

Εάν μετρηθεί η απόσταση και προς τρίτο δορυφόρο που απέχει έστω 22000 km, αυτό περιορίζει ακόμα περισσότερο τον προσδιορισμό της θέσης του χρήστη σε δύο σημεία, τα οποία προκύπτουν όπου η τρίτη σφαίρα τέμνει τον κύκλο που δημιουργήθηκε ως τομή των δύο πρώτων σφαιρών, ένα εκ των οποίων, εκείνο που βρίσκεται κοντά στη γη και άρα εύκολα εντοπίσιμο, είναι το ζητούμενο (σχ. 5.3).

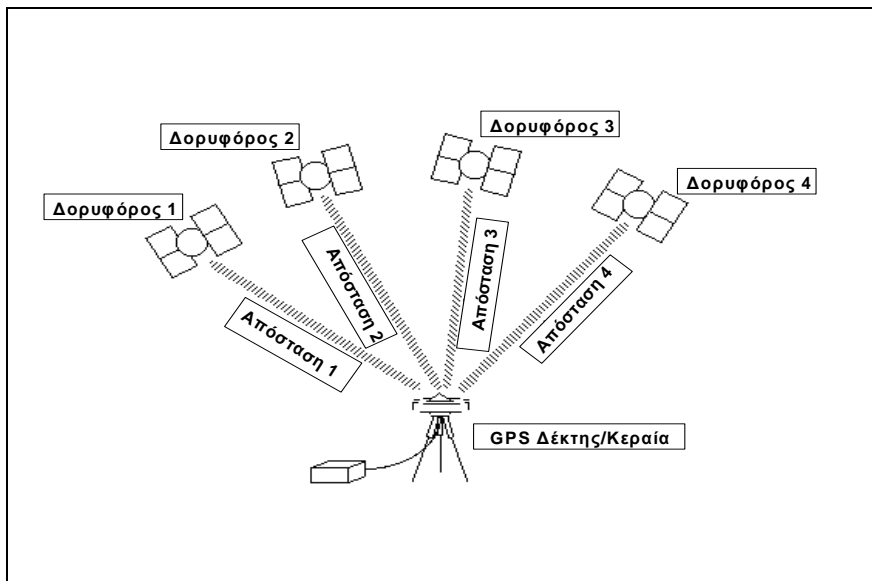


**Σχήμα 5.3** Η τελική θέση του χρήστη βρίσκεται στην τομή των τριών σφαιρών

Από την παραπάνω γεωμετρική ερμηνεία φαίνεται ότι απαιτούνται τουλάχιστον τρεις ταυτόχρονες μετρήσεις απόστασης προς τρεις διαφορετικούς δορυφόρους, όσες δηλαδή και οι άγνωστες συντεταγμένες (X, Y, Z) που εκφράζουν τη τρισδιάστατη θέση του δέκτη. Όμως η ποιότητα του προσδιορισμού της θέσης εξαρτάται από την ακρίβεια μέτρησης αυτών των αποστάσεων και την γεωμετρία της τομής των σφαιρών. Έτσι, στην πραγματικότητα, απαιτείται και μια τέταρτη μέτρηση που αφορά στην διόρθωση του χρόνου του δέκτη ως προς τη κλίμακα χρόνου του συστήματος GPS.

Συγκεκριμένα, τα χρονόμετρα των δορυφόρων και των δεκτών δεν είναι τέλεια συγχρονισμένα και συνεπώς υπάρχουν πάντοτε συστηματικά σφάλματα που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά τους υπολογισμούς. Το μεν σφάλμα του χρονόμετρου του δορυφόρου υπολογίζεται από τον δέκτη βάσει της πληροφορίας του μηνύματος πλοήγησης, ενώ το σφάλμα του χρονόμετρου του δέκτη παραμένει άγνωστο. Για να αποφασίσουμε ποια είναι η πραγματική θέση μεταξύ των δύο σημείων που προκύπτουν από την τομή μπορούμε να κάνουμε μία τέταρτη μέτρηση. Έτσι, στο πρόβλημα προσδιορισμού θέσης υπεισέρχεται και μια επιπλέον άγνωστη παράμετρος, η διόρθωση του χρόνου του δέκτη.

Επομένως, όταν θέλουμε να βρούμε την τρισδιάστατη θέση μας με χρήση ενός δέκτη GPS απαιτούνται *ταυτόχρονες μετρήσεις απόστασης από τουλάχιστον 4 δορυφόρους* (βλ. σχήμα 5.4). Αυτή είναι η βασική αρχή πάνω στην οποία στηρίχθηκε ο σχεδιασμός του συστήματος GPS όπου ο προσδιορισμός θέσης απαιτείται σε πραγματικό χρόνο.



**Σχήμα 5.4** Ο προσδιορισμός της τρισδιάστατης θέσης του δέκτη απαιτεί μετρήσεις από τουλάχιστον 4 δορυφόρους

Όμως, πως γίνεται η μέτρηση της απόστασης προς τους δορυφόρους όταν αυτοί συνεχώς κινούνται στο διάστημα; Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μετρώντας το χρόνο που απαιτείται για το σήμα που στέλνει ο δορυφόρος να φτάσει στον δέκτη. Ουσιαστικά, το πρόβλημα ανάγεται στην απλή μαθηματική σχέση:

απόσταση = ταχύτητα επί χρόνος που χρειάστηκε να διανυθεί η απόσταση

Στην περίπτωση του GPS η ταχύτητα είναι ίση με την ταχύτητα του φωτός στο κενό επειδή αναφερόμαστε σε ραδιοσήματα. Αρκεί, επομένως, να μετρηθεί ο χρόνος διάδοσης του σήματος από το δορυφόρο προς τον δέκτη, δηλαδή της παρέλευσης του χρόνου μεταξύ της χρονικής στιγμής  $t_E$  εκπομπής του σήματος από ένα δορυφόρο GPS και της χρονικής στιγμής  $t_A$  λήψης του ίδιου σήματος σε ένα δέκτη GPS. Η μετρούμενη διαφορά  $\tau = t_A - t_E$  πολλαπλασιαζόμενη με την ταχύτητα του φωτός ( $c = 299792458 \text{ km/sec}$ ) δίνει την απόσταση δορυφόρου-δέκτη.

Αυτές οι μετρήσεις καλούνται *μετρήσεις ψευδοαπόστασης* δεδομένου ότι διαφέρουν από την πραγματική απόσταση δορυφόρου-δέκτη λόγω σφαλμάτων (π.χ. ατμοσφαιρικών καθυστερήσεων του σήματος GPS και μη συγχρονισμού των χρονομέτρων του εκάστοτε δέκτη με τα ατομικά χρονόμετρα των δορυφόρων GPS). Οι μετρήσεις ψευδοαπόστασης γίνονται συνήθως με μια αβεβαιότητα της τάξης μερικών μέτρων.

Η γνώση της ακριβούς θέσης των δορυφόρων είναι απαραίτητη αφού χρησιμοποιούνται ως σημεία αναφοράς για τις μετρήσεις απόστασης. Επειδή οι δορυφόροι GPS βρίσκονται σε πολύ μεγάλο ύψος (περίπου 21000 km) οι τροχιές τους είναι πολύ εύκολα προβλέψιμες. Μικρές αποκλίσεις από την τροχιά του κάθε δορυφόρου μετρώνται και διορθώνονται συνέχεια από τους σταθμούς ελέγχου. Αυτές οι διορθώσεις στέλνονται στους δορυφόρους και στην συνέχεια μεταδίδονται μαζί με το σήμα που στέλνεται στον δέκτη (εφημερίδες).

Τέλος, επειδή τα σήματα από τους δορυφόρους ταξιδεύουν μέσα στην γήινη ατμόσφαιρα (ιονόσφαιρα και τροπόσφαιρα) προκαλούνται καθυστερήσεις

που μεταφράζονται σε σφάλματα της μετρημένης απόστασης δορυφόρου-δέκτη (βλ. Ενότητα 5.4). Πολλά από αυτά τα σφάλματα μπορούν να υπολογιστούν και να απομακρυνθούν από τις μετρήσεις. Επίσης, ο δορυφορικός σχηματισμός που χρησιμοποιείται για μια σειρά μετρήσεων μπορεί να επηρεάσει την ακρίβεια προσδιορισμού θέσης. Για να περιορισθούν αυτά τα σφάλματα, χρησιμοποιείται ο σχετικός εντοπισμός θέσης στις γεωδαιτικές εφαρμογές ( βλ. ενότητα 5.4.2).

Ο προσδιορισμός θέσης με το GPS γίνεται στο παγκόσμιο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς *WGS84 (World Geodetic System 1984)* του Υπουργείου Άμυνας των ΗΠΑ. Είναι ένα συμβατικό επίγειο γεωκεντρικό σύστημα και θεωρείται ότι δεν υπάρχει σχετική περιστροφή του συστήματος ως προς το φλοιό της γης συναρτήσει του χρόνου. Το WGS84, από τη αρχή της δημιουργίας του (μέσα του 1980), έχει υποστεί διάφορες βελτιώσεις, που για τις τρέχουσες πρακτικές τοπογραφικές εργασίες δεν έχουν ουσιαστική επίδραση. Το ελλειψοειδές του WGS84 ορίζεται από τις παραμέτρους:

$a = 6378137.0\text{m}$  (μεγάλος ημιάξονας),  $1/f = 298.257223563$  (επιπλάτυνση),  $GM = (3986004.418 \pm 0.008) \times 10^8 \text{ m}^3/\text{s}^2$  (γήινη βαρυτική σταθερά),  $\omega = 7292115 \times 10^{-11} \text{ rads/sec}$  (γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της γης).

### 5.3 ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ GPS

Κάθε δορυφόρος GPS μεταδίδει ένα μοναδικό σήμα ναυσιπλοΐας που επικεντρώνεται σε *δύο συχνότητες της L ζώνης* του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου: η L1 στα 1575.42MHz και η L2 στα 1227.60MHz. Λεπτομέρειες της δομής του σήματος μπορούν να αναζητηθούν στη διεθνή βιβλιογραφία.

Εκτός από τις μετρήσεις των ψευδοαποστάσεων, το GPS παρέχει και τις μετρήσεις «*φάσης του φέροντος κύματος*». Αυτές στηρίζονται στη δυνατότητα μέτρησης της απόστασης μεταξύ του εκάστοτε δορυφόρου GPS και ενός δέκτη, σαν συνάρτηση των μετρούμενων κύκλων φάσης μήκους κύματος  $\lambda$  του χρησιμοποιούμενου δορυφορικού σήματος, όπου  $\lambda = \lambda_1 = 19.029 \text{ cm}$  για τη συχνότητα L1 και  $\lambda = \lambda_2 = 24.421 \text{ cm}$  για τη συχνότητα L2. Η τεχνική αυτή είναι παρόμοια με εκείνη που χρησιμοποιείται από τα EDM. Η μέτρηση της φάσης του φέροντος κύματος γίνεται συνήθως με μια ακρίβεια της τάξης του 1% του αντιστοίχου μήκους κύματος  $\lambda$  του χρησιμοποιούμενου σήματος, δηλ. είναι της τάξης του 0.19 cm για τη συχνότητα L1 και 0.24 cm για τη συχνότητα L2.

Οι μετρήσεις φάσης του φέροντος κύματος είναι ακριβέστερες κατά δύο τουλάχιστον τάξεις μεγέθους από τις μετρήσεις ψευδοαπόστασης και ως εκ τούτου αποτελούν τον μόνο τύπο μετρήσεων υψηλής ακριβείας στους οποίους βασίζονται οι διάφορες γεωδαιτικές και τοπογραφικές εφαρμογές.

Σε τέτοιες εργασίες, οι δέκτες που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να έχουν τη δυνατότητα μετρήσεων φάσης τουλάχιστον στη συχνότητα L1. Αυτοί οι τύποι δεκτών GPS έχουν διαφορετικά λειτουργικά χαρακτηριστικά από δέκτες που κάνουν χρήση μόνο των μετρήσεων ψευδοαπόστασης και μπορούν να προσδιορίσουν τις σχετικές θέσεις μεταξύ σημείων με υψηλές ακρίβειες της τάξης μερικών ppm (parts per million) ή και καλύτερες.

Η δυνατότητα μετρήσεων και στη συχνότητα L2, επιπλέον από τις μετρήσεις στη συχνότητα L1, παρέχει τη δυνατότητα διορθώσεων για τις επιδράσεις της



ιονόσφαιρας στα σήματα GPS. Βέβαια σε πολλές εφαρμογές αυτό δεν κρίνεται τελείως απαραίτητο, αν οι μετρήσεις GPS χρησιμοποιούνται για το σχετικό προσδιορισμό σημείων που απέχουν μεταξύ τους αποστάσεις μικρότερες από 20 km και εφ' όσον χρησιμοποιούνται κατάλληλες τεχνικές μέτρησης και μοντέλα ανάλυσης των συλλεγομένων μετρήσεων.

### 5.3.1 Πηγές σφαλμάτων στις μετρήσεις GPS

Τα σφάλματα που επηρεάζουν τις παρατηρήσεις GPS χωρίζονται σε τρεις βασικές κατηγορίες.

α) Τα σφάλματα που σχετίζονται με *τους δορυφόρους*, όπως το σφάλμα της τροχιάς (ή δορυφορικής εφημερίδας) και το σφάλμα των χρονομέτρων των δορυφόρων.

β) Τα σφάλματα που σχετίζονται με *τους δέκτες*, όπως το σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη, το σφάλμα της μεταβολής του κέντρου φάσης της κεραίας και το σφάλμα λόγω των μεταβολής στην καθυστέρηση μετάδοσης του σήματος από τα ηλεκτρονικά των δεκτών.

γ) Τα σφάλματα που σχετίζονται με τη διάδοση του σήματος και αφορούν τα *ατμοσφαιρικά σφάλματα* (τροποσφαιρικά και ιονοσφαιρικά) και το σφάλμα της πολυανάκλασης του σήματος (multipath).

Κάποια από τα παραπάνω σφάλματα δύνανται να μοντελοποιηθούν και να εκτιμηθούν διορθώσεις στις παρατηρήσεις. Κατά την επεξεργασία, διαμορφώνονται κατάλληλες επιλογές γραμμικών συνδυασμών των παρατηρήσεων και των μοντέλων σφαλμάτων ώστε να γίνει απαλοιφή του μεγαλύτερου μέρους των σφαλμάτων αυτών.

Συμπερασματικά, οι βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν την ακρίβεια του εντοπισμού θέσης με το GPS είναι τα σφάλματα των παρατηρήσεων, η τεχνική των μετρήσεων (απόλυτος ή σχετικός εντοπισμός), η γεωμετρία των δορυφόρων-δεκτών και οι αλγόριθμοι επεξεργασίας των δεδομένων.

## 5.4 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Οι δύο βασικές τεχνικές μέτρησης με το GPS είναι ο *απόλυτος* εντοπισμός και ο *σχετικός* εντοπισμός θέσης. Με οποιαδήποτε τεχνική μέτρησης πραγματοποιείται, το αποτέλεσμα είναι οι τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες θέσης συνήθως σε μορφή X, Y, Z (ή γεωδαιτικές συντεταγμένες φ, λ, h) στο WGS84 σύστημα αναφοράς. Εάν τα αποτελέσματα απαιτούνται σε διαφορετικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς (π.χ. στο ΕΓΣΑ87) τότε μετατρέπονται εύκολα με χρήση κατάλληλων παραμέτρων μετασχηματισμού. Ο σχετικός εντοπισμός θέσης είναι κυρίως αυτός που εφαρμόζεται στις τοπογραφικές εργασίες επειδή προσδιορίζει τις θέσεις των σημείων με μεγαλύτερη ακρίβεια.

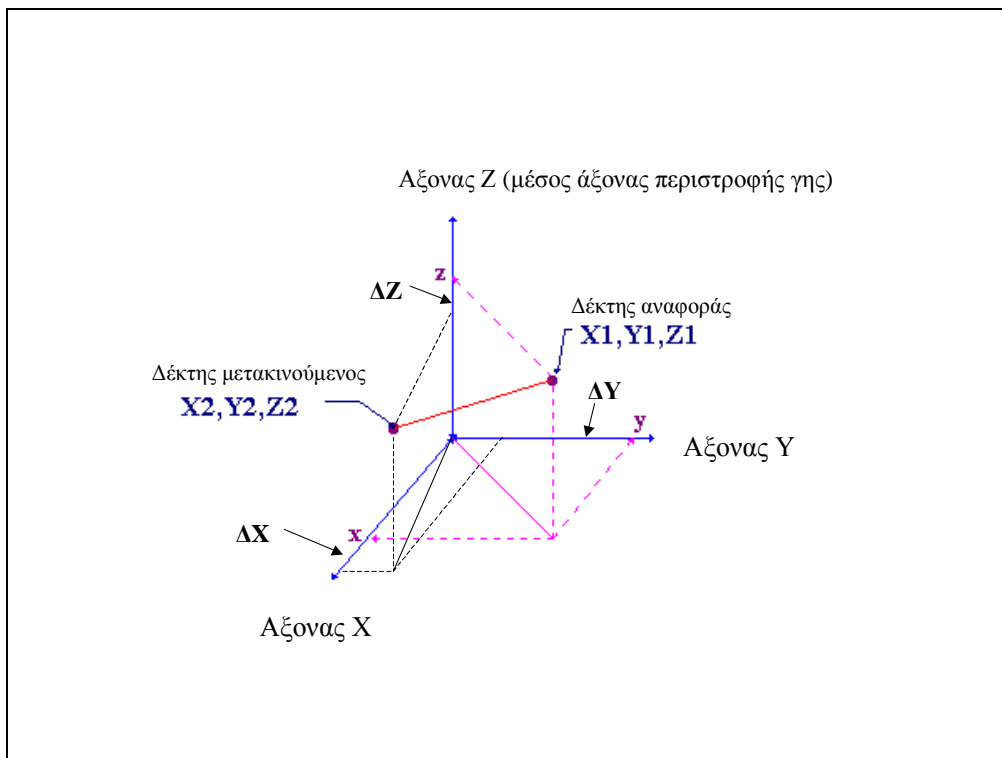
### 5.4.1 Απόλυτος Εντοπισμός

Ο όρος «απόλυτος προσδιορισμός θέσης» (absolute point positioning, single point positioning) αναφέρεται στον προσδιορισμό της θέσης του σημείου στο οποίο είναι τοποθετημένος ένας δέκτης GPS χρησιμοποιώντας μόνο τις δικές

του παρατηρήσεις. Η ανάπτυξη της τεχνικής του απόλυτου εντοπισμού γίνεται στην ενότητα 5.5.

### 5.4.2 Σχετικός Εντοπισμός

Στον σχετικό εντοπισμό χρησιμοποιούνται κυρίως οι μετρήσεις φέροντος φάσης και για την επεξεργασία τους ισχύουν πολύπλοκες μαθηματικές σχέσεις που δεν είναι στο αντικείμενο αυτών των σημειώσεων να περιγραφούν. Τελικά, υπολογίζεται μετά από την κατάλληλη επεξεργασία των μετρήσεων μέσω ειδικού λογισμικού, το τρισδιάστατο διάνυσμα  $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$  της βάσης μεταξύ του δέκτη αναφοράς (reference receiver) και του δεύτερου δέκτη (σταθερού ή μετακινούμενου) όπως φαίνεται στο σχήμα 5.5.



**Σχήμα 5.5** Προσδιορισμός του τρισδιάστατου διανύσματος της βάσης μέτρησης ( $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ) μεταξύ δύο σημείων

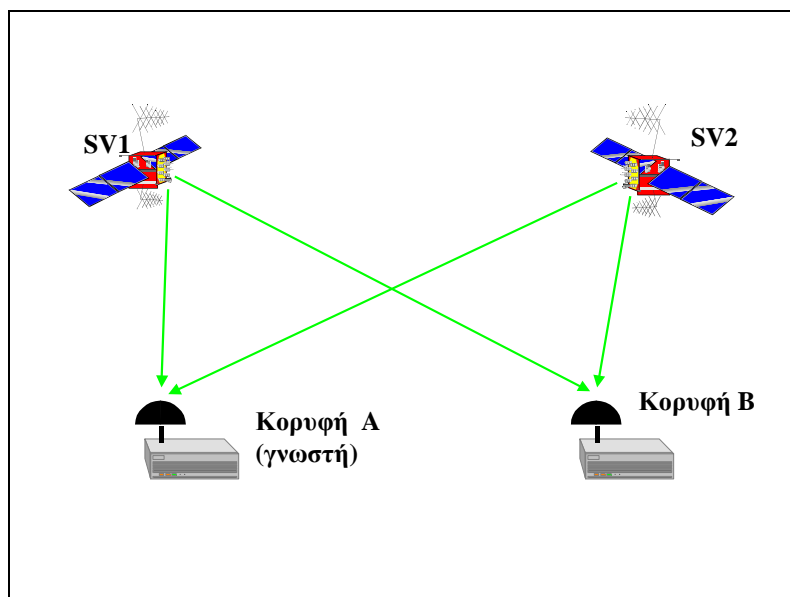
Επομένως, οι τελικές συντεταγμένες  $(X, Y, Z)_{\text{μετακινούμενος}}$  του δεύτερου δέκτη (μετακινούμενου δέκτη στο παραπάνω σχήμα) δίνονται ως προς τις συντεταγμένες του σταθερού δέκτη  $(X, Y, Z)_{\text{αναφοράς}}$  από τη σχέση

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{μετακινούμενος}} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{\text{αναφοράς}} + \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Όταν χρησιμοποιούνται παραπάνω από δύο δέκτες (έστω  $R$ ), τότε οι άγνωστοι σταθμοί για τους οποίους ζητείται να υπολογιστούν οι τρισδιάστατες συντεταγμένες είναι  $R-1$  ως προς τον σταθμό αναφοράς. Η διαδικασία αυτή γίνεται με τη μέθοδο συνόρθωσης των ελαχίστων τετραγώνων.

Οι βασικές παραλλαγές στην τεχνική μέτρησης του σχετικού εντοπισμού είναι ο στατικός, ο γρήγορος στατικός, ο ψευδοκινηματικός και ο κινηματικός εντοπισμός.

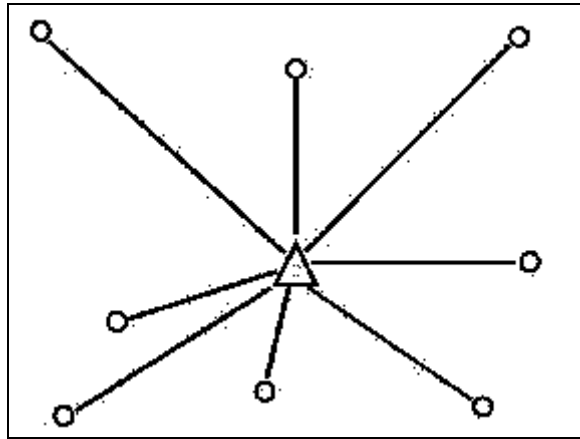
Συνοπτικά, ο στατικός εντοπισμός δίνει ακρίβειες της τάξης των λίγων χιλιοστών και απαιτεί την ταυτόχρονη χρήση τουλάχιστον δύο δεκτών, όπου ο ένας τοποθετείται σε γνωστό σημείο και ο άλλος καταλαμβάνει για ένα σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα (π.χ. 40-90 min) ένα δεύτερο σημείο του οποίου η θέση ζητείται να υπολογισθεί (σχήμα 5.6).



Σχήμα 5.6 Η αρχή του σχετικού στατικού εντοπισμού

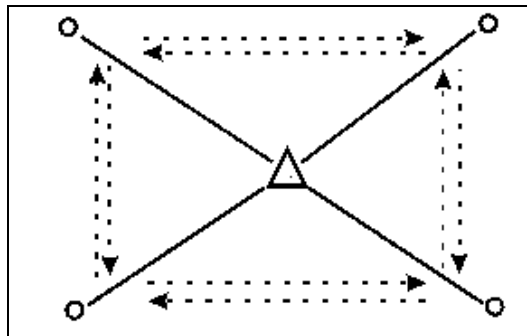
Στον σχετικό στατικό εντοπισμό, η εκ των υστέρων επεξεργασία των μετρήσεων γίνεται είτε σε «μορφή βάσης» χρησιμοποιώντας τις ταυτόχρονες μετρήσεις δύο δεκτών κάθε φορά για την επίλυση μιας ανεξάρτητης βάσης, είτε σε «μορφή καμπάνιας» όπου όλα τα δεδομένα που συλλέχθηκαν από διαφορετικούς δέκτες την ίδια χρονική περίοδο ή σε διαφορετικές χρονικές περιόδους επεξεργάζονται ταυτόχρονα σε κοινή συνόρθωση.

Ο γρήγορος στατικός (fast-static, rapid-static) χρησιμοποιεί ίδια μεθοδολογία με την προηγούμενη τεχνική, όμως με σημαντική μείωση του χρόνου παραμονής του δεύτερου δέκτη, που κυμαίνεται από 5-20 min, ενώ οι ακρίβεια που επιτυγχάνεται είναι της τάξης των μερικών εκατοστών. Όπως φαίνεται στο σχήμα 5.7, οι βάσεις μεταξύ του σταθερού δέκτη και των άλλων σημείων είναι γενικά μικρές. Είναι μια τεχνική που χρησιμοποιείται όταν για πολλά σημεία απαιτείται να προσδιορισθεί η θέση τους όπως π.χ. σε πύκνωση δικτύου.



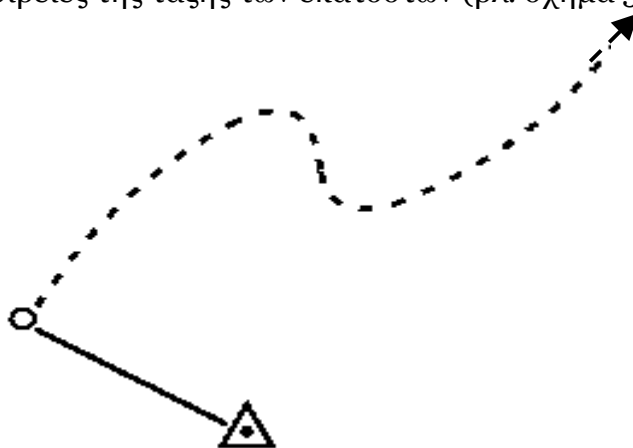
**Σχήμα 5.7** Διάταξη δεκτών με την τεχνική του γρήγορου στατικού εντοπισμού

Ο *ψευδοκινηματικός* (pseudo-kinematic, pseudo-static) εντοπισμός χρησιμοποιεί παρόμοια μεθοδολογία και έχει αντίστοιχη ακρίβεια με τον γρήγορο στατικό με την διαφορά ότι βασίζεται στην αλλαγή της γεωμετρίας των δορυφόρων (λόγω ανακατάληψης των αγνώστων σημείων μετά από κάποιο χρονικό διάστημα, βλ. σχήμα 5.8). Παρόλο που σήμερα έχει ατονήσει η χρήση της τεχνικής αυτής λόγω μεγάλου πλέον αριθμού διαθέσιμων δορυφόρων, η αρχή της παραμένει ως ένας καλός τρόπος ελέγχου των αποτελεσμάτων (π.χ. σε τοπογραφικές εργασίες).



**Σχήμα 5.8** Διάταξη δεκτών με την τεχνική του ψευδοκινηματικού εντοπισμού

Τέλος, ο *κινηματικός εντοπισμός* έχει διάφορες μορφές που όμως όλες βασίζονται στην ταχεία κατάληψη σημείων (από μερικά sec ως 1-2min) και με κυμαινόμενες ακρίβειες της τάξης των εκατοστών (βλ. σχήμα 5.9).



**Σχήμα 5.9** Στον κινηματικό εντοπισμό ο δεύτερος δέκτης μετακινείται σε σχέση με έναν σταθερό δέκτη

Η πιο σύγχρονη μορφή του κινηματικού εντοπισμού σε πραγματικό χρόνο είναι η χρήση των μετρήσεων φάσης με την τεχνική RTK (Real Time Kinematic) που επιτυγχάνει προσδιορισμό της θέσης με την ακρίβεια λίγων cm. Στην τεχνική αυτή απαιτείται η εκπομπή δεδομένων από το δέκτη γνωστών συντεταγμένων που παραμένει ακίνητος προς στον κινούμενο δέκτη που κινείται συνήθως σε συγκεκριμένα σημεία ή σε κάποια διαδρομή και λαμβάνει εκτός από τις δικές του μετρήσεις και τα δεδομένα του σταθερού δέκτη. Η επικοινωνία μεταξύ των δεκτών απαιτεί ειδικό λογισμικό καθώς και σύστημα ασύρματης επικοινωνίας (π.χ. κινητή τηλεφωνία, διαδίκτυο κ.λπ.).

Τα τελευταία χρόνια, η εγκατάσταση και λειτουργία μόνιμων σταθμών καταγραφής δεδομένων GPS η οποία αναπτύσσεται με γοργούς ρυθμούς σε πολλές χώρες, έχει συμβάλει στην ευρεία εφαρμογή της μεθόδου εντοπισμού θέσης σε πραγματικό χρόνο (RTK). Με τα δίκτυα αυτά επιτυγχάνεται η ακρίβεια προσδιορισμού σε εφαρμογές πραγματικού χρόνου και σε μεγαλύτερες αποστάσεις μεταξύ σταθερού και κινητού δέκτη (π.χ 30-70km), καθώς και η λειτουργία ενός μόνο δέκτη από το χρήστη με αποτέλεσμα την αύξηση της παραγωγικότητας και τη μείωση του κόστους των εργασιών. Η Ελλάδα τα τελευταία λίγα χρόνια έχει αναπτύξει ένα δίκτυο μόνιμων δορυφορικών σταθμών GPS το οποίο παρέχει υπηρεσίες προσδιορισμού θέσης, τόσο για εφαρμογές πραγματικού χρόνου (RTK) όσο και για την εκ των υστέρων επεξεργασία μετρήσεων. Η ονομασία του δικτύου είναι HEPOS (HEllenic POsitioning System) και αποτελείται από 98 μόνιμους σταθμούς αναφοράς κατανομημένους σε ολόκληρη τη χώρα.

### 5.4.3 Αλγόριθμοι Επεξεργασίας

Οι αλγόριθμοι επεξεργασίας των παρατηρήσεων είναι από τους σημαντικότερους παράγοντες που επηρεάζουν την τελική λύση του εντοπισμού θέσης. Εξαρτώνται από μια σειρά παραγόντων όπως εάν:

- Ο χρήστης είναι σε σταθερή θέση (μεγαλύτερη ακρίβεια λόγω του πλεονάσματος των παρατηρήσεων) ή μετακινείται (δεν υπάρχει πλεόνασμα παρατηρήσεων και άρα μικρότερη ακρίβεια).
- Τα αποτελέσματα απαιτούνται σε πραγματικό χρόνο (συνήθως αυτό σημαίνει μικρότερη ακρίβεια) ή εκ των υστέρων επεξεργασία (η «πολυτέλεια» της εκ των υστέρων επεξεργασίας απαιτεί πολυπλοκότερους αλγορίθμους και μοντέλα για την εξάλειψη των υπολοίπων σφαλμάτων και άρα παρέχει μεγαλύτερη ακρίβεια).
- Το επίπεδο του θορύβου των μετρήσεων GPS έχει σημαντική επίδραση στην ακρίβεια των τελικών λύσεων και επομένως οι μετρήσεις της φάσης φέροντος κύματος είναι αυτές που χρησιμοποιούνται για εργασίες υψηλής ακρίβειας ενώ οι μετρήσεις των ψευδοαποστάσεων χρησιμοποιούνται σε εφαρμογές με μικρότερες απαιτήσεις σε ακρίβεια.

Αντί των πρωτογενών παρατηρήσεων χρησιμοποιούνται συνήθως *γραμμικοί συνδυασμοί* τους (π.χ. απλές, διπλές και τριπλές διαφορές) με σημαντικότερο πλεονέκτημα την ελαχιστοποίηση ή και απαλοιφή συστηματικών σφαλμάτων των μετρήσεων. Το βασικότερο μειονέκτημα είναι η μαθηματική συσχέτιση των παρατηρήσεων που προκαλεί δυσκολία στον προσδιορισμό του

στοχαστικού μοντέλου που απαιτείται κατά τη διαδικασία της συνόρθωσης. Ωστόσο, έχουν αναπτυχθεί ειδικές στρατηγικές επίλυσης που αντιμετωπίζουν τα προβλήματα των γραμμικών συνδυασμών.

Τα διάφορα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την επεξεργασία των μετρήσεων και την απαλοιφή ή ελαχιστοποίηση των σφαλμάτων, τα στοχαστικά τους μοντέλα και η μορφή των παραμέτρων που παραμένουν προς επίλυση είναι αυτά που διαφοροποιούνται κυρίως στην ποικιλία των λογισμικών πακέτων ανάλυσης και επεξεργασίας των μετρήσεων GPS που είναι διαθέσιμα στους χρήστες από τους κατασκευαστές των δεκτών.

## **5.5 ΑΠΟΛΥΤΟΣ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΘΕΣΗΣ**

Ο απόλυτος εντοπισμός της θέσης μπορεί να γίνει είτε σε πραγματικό χρόνο και άρα αναφερόμαστε στην λύση «ναυσιπλοΐας» (navigation solution) είτε εκ των υστέρων (post-processing) αξιοποιώντας όλες τις εποχές που έχουν μετρηθεί δίνοντας μεγαλύτερη ακρίβεια στην τελική λύση.

Οι ακρίβειες που σχετίζονται με τον απόλυτο εντοπισμό θέσης κυμαίνονται,

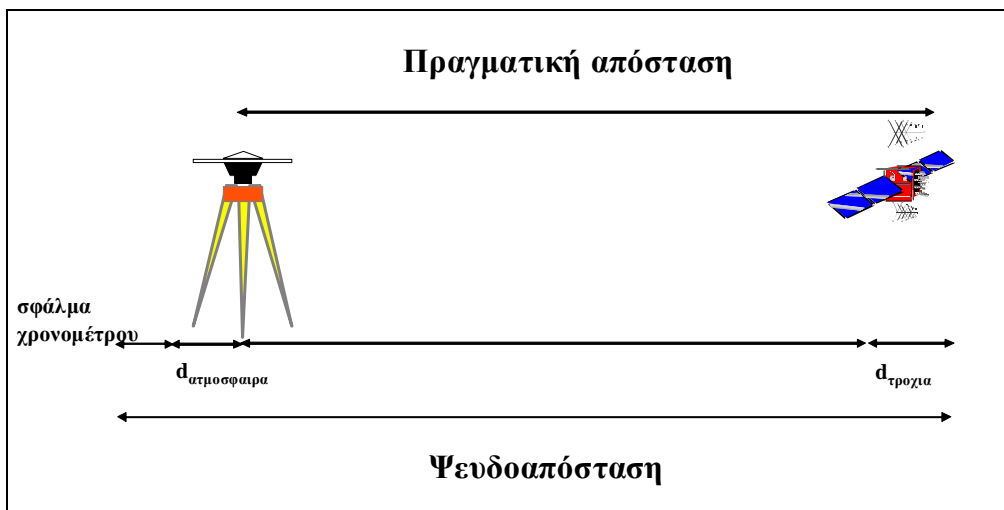
- 20-30m όταν χρησιμοποιείται η λειτουργία του τυπικού απόλυτου προσδιορισμού (SPS, standard positioning service), που αντιπροσωπεύει το επίπεδο ακρίβειας των περισσότερων εφαρμογών χρήσης ενός δέκτη GPS.
- 2-15m όταν χρησιμοποιείται η λειτουργία του ακριβούς απόλυτου προσδιορισμού (PPS, precise positioning service).

Βελτιώσεις στην τεχνολογία των SPS δεκτών διπλής συχνότητας μπορεί να δώσει 50% βελτίωση στον τυπικό απόλυτο προσδιορισμό. Επίσης, όταν είναι γνωστές υψηλής ακρίβειας παράμετροι των χρονομέτρου των δορυφόρων και των εφημερίδων, τότε υπάρχει βελτίωση 50% στον ακριβή απόλυτο εντοπισμό.

Στον απόλυτο προσδιορισμό θέσης χρησιμοποιούνται συνήθως μόνο παρατηρήσεις ψευδοαποστάσεων. Όμως, όλο και συχνότερα η συνδυασμένη χρήση των μετρήσεων ψευδοαπόστασης και φάσης χρησιμοποιείται σε αρκετές εφαρμογές, ακόμα και στην τοπογραφία.

### **5.5.1 Ψευδοαπόσταση**

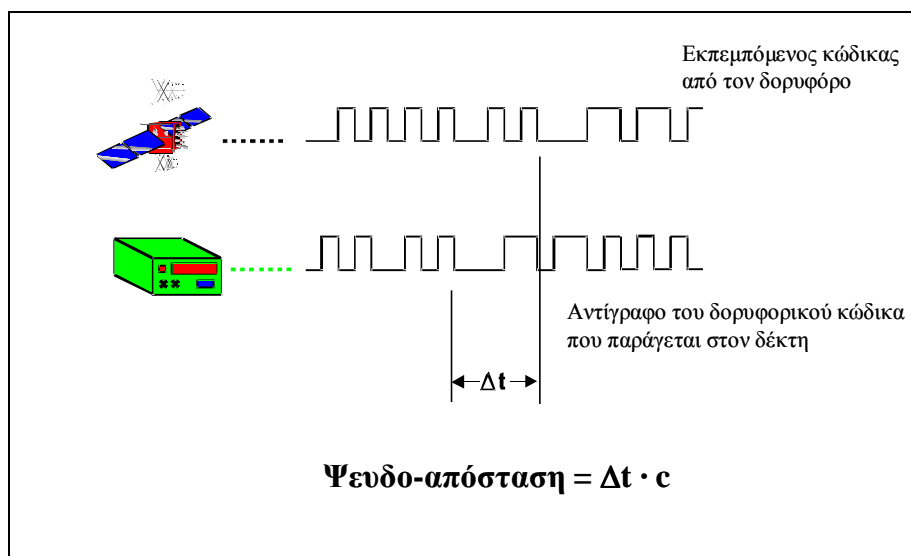
Η *ψευδοαπόσταση* είναι το μέτρο της παρατηρούμενης απόστασης μεταξύ του δορυφόρου και της κεραίας του δέκτη σε κάποια χρονική στιγμή (σχήμα 5.10).



**Σχήμα 5.10** Η ψευδοαπόσταση διαφέρει από την γεωμετρική (πραγματική) απόσταση λόγω σφαλμάτων

Η απόσταση προκύπτει από τον χρόνο μετάδοσης του σήματος που μετράται με τον συσχετισμό κωδικών ψευδοαπόστασης (pseudorandom noise code PRN) που παράγονται από τον κάθε δορυφόρο με πανομοιότυπο κώδικα που παράγεται εσωτερικά από τον δέκτη. Εσωτερικά στον δέκτη γίνεται χρονική μετατόπιση του λαμβανόμενου από τον δορυφόρο κώδικα με το πανομοιότυπο σήμα του δέκτη μέχρι να επιτευχθεί μέγιστη συσχέτιση (σχήμα 5.11).

Οι κώδικες του δέκτη παράγονται από το ίδιο χρονόμετρο του δέκτη ενώ οι κώδικες των δορυφόρων παράγονται από το σύστημα χρονομέτρων του κάθε δορυφόρου. Αναπόφευκτα σφάλματα χρονομέτρων τόσο στους δέκτες όσο και στους δορυφόρους έχουν ως αποτέλεσμα η μετρημένη απόσταση να διαφέρει από την γεωμετρική απόσταση που αναφέρεται στις χρονικές στιγμές μετάδοσης και λήψης του κώδικα. Έτσι, η μετρημένη απόσταση ονομάζεται ψευδοαπόσταση. Μετρήσεις ψευδοαποστάσεων γίνονται τόσο στον P-κώδικα όσο και στον C/A- κώδικα.



**Σχήμα 5.11** Συσχέτιση του εκπεμπόμενου και αντίγραφου του κώδικα στον δέκτη

Στην ενότητα αυτή θα περιγραφεί η μαθηματική εξίσωση της ψευδοαπόστασης. Στην ανάλυση που ακολουθεί, τα λατινικά γράμματα  $p, q$  αναφέρονται στους δορυφόρους ενώ το γράμμα  $k$  αναφέρεται στο δέκτη.

Έστω το σύμβολο  $t_k$  δηλώνει τον ονομαστικό χρόνο του χρονομέτρου του δέκτη  $k$  (χρόνος αναφοράς δέκτη) την χρονική στιγμή της λήψης του σήματος από τον δορυφόρο και το σύμβολο  $t^p$  δηλώνει τον ονομαστικό χρόνο του χρονομέτρου του δορυφόρου  $p$  (χρόνος αναφοράς δορυφόρου) την χρονική στιγμή της εκπομπής του σήματος. Οι ονομαστικοί χρόνοι σχετίζονται με τον πραγματικό χρόνο μέσω των όρων για τα σφάλματα των χρονομέτρων, δηλαδή,

$$\begin{aligned} t_{r,k} &= t_k + dt_k \\ t_r^p &= t^p + dt^p \end{aligned} \quad (5.2)$$

Το  $r$  συμβολίζει τον πραγματικό χρόνο. Η μέτρηση της ψευδοαπόστασης  $P_k^p(t_k)$  μεταξύ του δορυφόρου  $p$  και του δέκτη  $k$  είναι η διαφορά των ονομαστικών χρόνων πολλαπλασιασμένη με την ταχύτητα του φωτός, δηλαδή

$$P_k^p(t_k) = (t_k - t^p) c \quad (5.3)$$

Η ψευδοαπόσταση θα ήταν ίση με την γεωμετρική (πραγματική) απόσταση που προκύπτει από την διάρκεια μεταφοράς του σήματος στον δέκτη (δηλαδή από την χρονική στιγμή της μετάδοσης από τον δορυφόρο ως την λήψη από τον δέκτη), μόνο όταν το μέσο μεταφοράς του σήματος ήταν το κενό και δεν υπήρχαν σφάλματα στα χρονόμετρα δορυφόρων και δέκτη (δηλαδή ήταν τέλεια συγχρονισμένα) ή δεν υπήρχαν άλλα είδη σφαλμάτων.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω σφάλματα, η πλήρης μαθηματική έκφραση που περιγράφει την ψευδοαπόσταση  $P_k^p(t)$  είναι:

$$\begin{aligned} P_k^p(t_k) &= (t_{r,k} - t_r^p) c - c (dt_k - dt^p) + I_{k,p}^p(t_k) + T_k^p(t_k) + d_{k,p}(t_k) \\ &\quad + d_{k,p}^p(t_k) + d_p^p(t_k) + \varepsilon_p \\ &= \rho_{k,p}^p(t_{r,k}) - c (dt_k - dt^p) + I_{k,p}^p(t_k) + T_k^p(t_k) + d_{k,p}(t_k) \\ &\quad + d_{k,p}^p(t_k) + d_p^p(t_k) + \varepsilon_p \end{aligned} \quad (5.4)$$

όπου :

- $\rho_{k,p}^p(t_{r,k})$  είναι η γεωμετρική απόσταση μεταξύ δορυφόρου-δέκτη
- $c(dt_k - dt^p)$  είναι η διαφορά μεταξύ των χρονικών στιγμών μετάδοσης και λήψης του σήματος πολλαπλασιασμένη με την ταχύτητα του φωτός στο κενό
- $I_{k,p}^p(t_k) + T_{k,p}^p(t_k)$  είναι το σφάλμα καθυστέρησης του σήματος καθώς ταξιδεύει από τον δορυφόρο διαμέσου των στρωμάτων της ατμόσφαιρας που ονομάζονται αντίστοιχα «ιονόσφαιρα» και «τροπόσφαιρα»



$d_{k,P}(t_k) + d_{k,P}^P(t_k)$  είναι τα αντίστοιχα σφάλματα του δέκτη και του δορυφόρου που σχετίζονται με την παραγωγή του κώδικα (hardware code delay)

$d_P^P(t_k) + \varepsilon_P$  είναι αντίστοιχα το σφάλμα λόγω πολλαπλών διαδρομών του σήματος (multipath) και το τυχαίο σφάλμα λόγω θορύβου των μετρήσεων

Η γεωμετρική απόσταση αυστηρά ορίζεται ως η μεταξύ των άκρων απόσταση των αντίστοιχων κέντρων φάσης των κεραιών του δορυφόρου και του δέκτη. Για τον δορυφόρο, το κέντρο φάσης αναφέρεται στο κέντρο μάζας του και είναι το ίδιο σημείο όπου αναφέρονται οι συντεταγμένες του. Για την κεραία του δέκτη, το κέντρο φάσης διαφέρει από το ηλεκτρικό κέντρο και επίσης τα κέντρα αυτά μεταβάλλονται ανάλογα με την διεύθυνση λήψης του σήματος. Όμως τα κέντρα φάσης των κεραιών προσδιορίζονται εργαστηριακά. Επιπλέον, αν χρησιμοποιούνται ίδιου τύπου κεραιές με τον ίδιο προσανατολισμό τότε οι επιδράσεις των μεταβολών των κέντρων φάσης απαλείφονται.

Η απόσταση  $\rho_{k,P}^P(t_{r,k})$  την εποχή  $t_k$  του δέκτη δίνεται από τη σχέση:

$$\rho_k^P(t_k) = \sqrt{(X^P - X_k)^2 + (Y^P - Y_k)^2 + (Z^P - Z_k)^2} \quad (5.5)$$

όπου

$(X^P, Y^P, Z^P)$  είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες της θέσης του δορυφόρου την χρονική στιγμή της εκπομπής του σήματος και είναι γνωστές από τις εκπεμπόμενες εφημερίδες που περιέχονται στο μήνυμα ναυσιπλοΐας (navigation message)

$(X_k, Y_k, Z_k)$  είναι οι προσεγγιστικές καρτεσιανές συντεταγμένες της θέσης του δέκτη

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες της θέσης του δορυφόρου και δέκτη αναφέρονται στο ίδιο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς που συνήθως είναι το WGS84.

Η εξίσωση ψευδοαπόστασης μεταξύ ενός δέκτη  $k$  και δορυφόρου  $P$ , βάσει των σχέσεων (5.4) και (5.5) γράφεται ως,

$$\begin{aligned} P_k^P &= \rho_k^P + c dt_k - cd_t^P + I_{kP}^P + T_k^P + \varepsilon_P \\ &= \sqrt{(X^P - X_k)^2 + (Y^P - Y_k)^2 + (Z^P - Z_k)^2} + c dt_k - cd_t^P + I_{kP}^P + T_k^P + \varepsilon_P \end{aligned} \quad (5.6)$$

### 5.5.2 Επίλυση απόλυτου εντοπισμού

Στις εφαρμογές όπου απαιτείται προσδιορισμός θέσης σε κάθε χρονική στιγμή με μικρή όμως ακρίβεια (δηλαδή της τάξης μερικών μέτρων) πραγματοποιείται λύση ναυσιπλοΐας με χρήση μετρήσεων ψευδοαπόστασης.

Η λύση αυτή γίνεται αυτόματα μέσα στον δέκτη όπου δίνονται ως αποτέλεσμα οι συντεταγμένες της θέσης του δέκτη οι οποίες αναφέρονται συνήθως στο WGS84.

Με βάση τις εκπεμπόμενες εφημερίδες, δηλαδή τη θέση κάθε ορατού δορυφόρου από τον δέκτη την χρονική στιγμή της μετάδοσης του σήματος, οι μόνοι άγνωστοι στην εξίσωση (5.6) είναι η θέση του δέκτη και το σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη. Το ιονοσφαιρικό σφάλμα υπολογίζεται από ένα σύνηθες μοντέλο που περιέχεται και στο μήνυμα ναυσιπλοΐας, ενώ το τροποσφαιρικό μοντέλο υπολογίζεται από συνήθη τυπικά μοντέλα τροπόσφαιρας. Το σφάλμα του χρονομέτρου του δορυφόρου μπορεί να θεωρηθεί γνωστό αφού μπορεί να γίνει διόρθωση με βάση τις εκπεμπόμενες χρονικές παραμέτρους των εφημερίδων ενώ το σφάλμα που απομένει θεωρείται αμελητέο για την περίπτωση της λύσης ναυσιπλοΐας.

Τελικά οι άγνωστες παράμετροι είναι τέσσερις και εφόσον ο δέκτης λαμβάνει ταυτόχρονα τουλάχιστον μετρήσεις από τέσσερις δορυφόρους υπάρχει λύση. Όταν λαμβάνονται παραπάνω ταυτόχρονες μετρήσεις τότε η καλύτερη λύση προσδιορισμού της θέσης επιτυγχάνεται με μαθηματικές τεχνικές όπως με χρήση συνόρθωσης των ελαχίστων τετραγώνων.

Το τελικό μαθηματικό σύστημα εξισώσεων που επιλύεται για να δώσει την θέση του δέκτη αποτελείται τουλάχιστον από τις τέσσερις εξισώσεις, δηλαδή

$$\begin{aligned}
 P_k^1 &= \sqrt{(X^1 - X_k)^2 + (Y^1 - Y_k)^2 + (Z^1 - Z_k)^2} - c dt_k \\
 P_k^2 &= \sqrt{(X^2 - X_k)^2 + (Y^2 - Y_k)^2 + (Z^2 - Z_k)^2} - c dt_k \\
 P_k^3 &= \sqrt{(X^3 - X_k)^2 + (Y^3 - Y_k)^2 + (Z^3 - Z_k)^2} - c dt_k \\
 P_k^4 &= \sqrt{(X^4 - X_k)^2 + (Y^4 - Y_k)^2 + (Z^4 - Z_k)^2} - c dt_k
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

όπου 1, 2, 3, 4 συμβολίζει τον αριθμό της μέτρησης από διαφορετικό δορυφόρο, ενώ εξισώσεις της ίδιας μορφής προστίθενται στο σύστημα όταν υπάρχουν παραπάνω από τέσσερις ταυτόχρονες μετρήσεις.

### 5.5.3 Ο παράγοντας DOP

Η μέθοδος επίλυσης του συστήματος εξισώσεων (5.7) δίνει εκτός από την καλύτερη εκτίμηση της θέσης του δέκτη κάθε χρονική στιγμή, και την ποιότητα της εκτίμησης αυτής. Αυτή δίνεται με την μορφή των μεταβλητοτήτων τόσο για τις εκτιμήσεις των τελικών καρτεσιανών ή επίπεδων ορθογώνιων συντεταγμένων όσο και για το σφάλμα του χρονομέτρου του δέκτη.

Η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των παραπάνω μεταβλητοτήτων ονομάζεται GDOP (Geometric Dilution of Precision). Είναι ένα μέτρο ακρίβειας (αδιάστατος αριθμός) που εξαρτάται από την γεωμετρία του δορυφορικού σχηματισμού ως προς το δέκτη την συγκεκριμένη χρονική στιγμή και δίνεται από το λόγο της ακρίβειας του εντοπισμού ( $\sigma$ ) προς την

ακρίβεια των μετρήσεων ( $\sigma_0$ ), δηλ  $\sigma = \text{DOP} \sigma_0$ . Γενικά, όσο πιο μικρή τιμή έχει η παράμετρος DOP τόσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια του εντοπισμού.

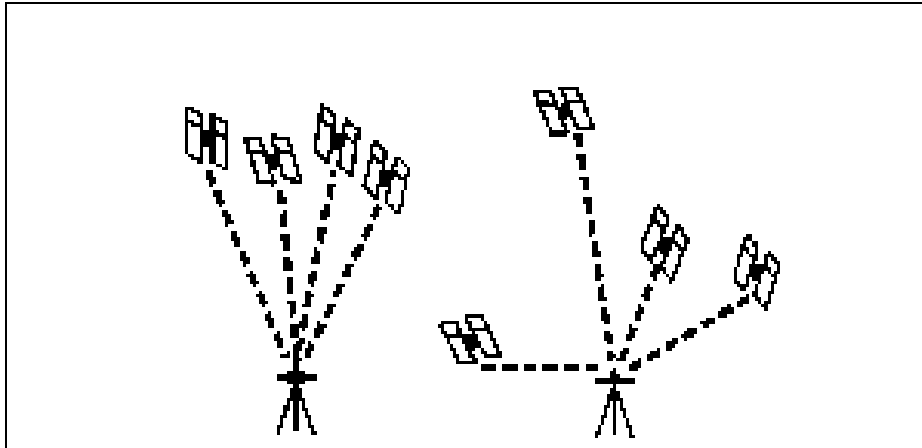
Για τον υπολογισμό της θέσης με απόλυτο εντοπισμό, σύμφωνα με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, δημιουργείται ένας πίνακας A (πίνακας σχεδιασμού) που περιλαμβάνει τις μερικές παραγώγους των παρατηρούμενων μεγεθών ως προς τις άγνωστες παραμέτρους. Αυτές θα προκύψουν, βάσει της σχέσης 5.7. Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο της συνόρθωσης, υπολογίζεται ο πίνακας παραγόντων συμμεταβλητοτήτων  $N^{-1} = (A^T A)^{-1}$ , όπου τα διαγώνια στοιχεία του  $(q_X, q_Y, q_Z)$  [ή  $(q_E, q_N, q_U)$  όταν αναφερόμαστε σε τοποκεντρικό γεωδαιτικό σύστημα] χρησιμοποιούνται για τον προσδιορισμό των μέτρων ακρίβειας DOP.

Όταν αναφερόμαστε μόνο στις τρεις συντεταγμένες το μέτρο ονομάζεται PDOP (Position Dilution of Precision), ενώ μόνο για την οριζόντια ή κατακόρυφη συνιστώσα έχουμε αντίστοιχα HDOP (Horizontal Dilution of Precision) και VDOP (Vertical Dilution of Precision). Το μέτρο για την εκτίμηση του σφάλματος του χρονομέτρου του δέκτη ονομάζεται TDOP (Time Dilution of Precision) και το συνολικό μέτρο που δίνει την γεωμετρία της εκτίμησης δίνεται από το GDOP (Geometric Dilution of Precision) όπως φαίνονται παρακάτω:

$$\begin{aligned} \text{PDOP} &= \sqrt{q_X^2 + q_Y^2 + q_Z^2} = \sqrt{q_E^2 + q_N^2 + q_U^2} \\ \text{HDOP} &= \sqrt{q_E^2 + q_N^2} \\ \text{VDOP} &= \sqrt{q_U^2} \\ \text{TDOP} &= \sqrt{q_t} \\ \text{GDOP} &= \sqrt{\text{PDOP}^2 + \text{TDOP}^2} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Στις περιπτώσεις που οι αριθμοί DOP ξεπερνούν μια οριακή τιμή σημαίνει ότι η γεωμετρία του δορυφορικού σχηματισμού δεν είναι καλή. Για παράδειγμα, στα περισσότερα εμπορικά λογισμικά επεξεργασίας μετρήσεων GPS θεωρείται ως μέση τιμή για τα HDOP και VDOP περίπου 2 για τον καλύτερο σχηματισμό τεσσάρων δορυφόρων.

Ο αριθμός GDOP μπορεί να ερμηνευθεί ως το αντίστροφο του όγκου ενός τετραέδρου που σχηματίζεται από τέσσερις δορυφόρους και τη θέση του δέκτη. Επομένως, η καλύτερη γεωμετρία για την περίπτωση του απόλυτου εντοπισμού είναι όταν ο όγκος είναι μέγιστος και άρα η τιμή του GDOP είναι ελάχιστη. Το σχήμα 5.12 δείχνει αντίστοιχα την περίπτωση κακής (αριστερά) και καλής γεωμετρίας (δεξιά).



**Σχήμα 5.12** Η γεωμετρία του δορυφορικού σχηματισμού στις περιπτώσεις κακής και καλής γεωμετρίας

Τα παρακάτω σχόλια μπορούν να γίνουν σχετικά με τους αριθμούς DOP:

- Όσο μικρότερη είναι η τιμή του DOP τόσο μεγαλύτερη είναι η ακρίβεια των εκτιμώμενων συντεταγμένων του δέκτη, δηλαδή του προσδιορισμού θέσης.
- Η τιμή του DOP έχει συνήθως τιμή μεγαλύτερη της μονάδας, όταν όμως υπάρχει πλεονασμα παρατηρήσεων (για παράδειγμα όταν οι δορυφόροι είναι >8) το DOP μπορεί να είναι μικρότερο της μονάδας.
- Οι αριθμοί DOP μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προεπιλογή των δορυφόρων που θα παρατηρηθούν.
- Υψηλή τιμή του DOP (>10) συνήθως δηλώνει την περίπτωση όπου ο προσδιορισμός θέσης δεν είναι πάντα αξιόπιστος.
- Οι τιμές των DOP μεταβάλλονται με το χρόνο κατά τη διάρκεια της ημέρας και με την γεωγραφική θέση του σημείου παρατήρησης. Όμως η γεωμετρική διάταξη των δορυφόρων επαναλαμβάνεται ακριβώς η ίδια (με διαφορά περίπου 4 λεπτών νωρίτερα κάθε ημέρα) και έτσι το DOP μιας θέσης είναι εύκολα προβλέψιμο.
- Το DOP μεταβάλλεται με τον αριθμό των δορυφόρων καθώς και με τις παραμέτρους που σχετίζονται με αυτούς, όπως την γωνία ανύψωσης, τον αριθμό των δορυφόρων που περιλαμβάνονται στη τελική λύση κλπ.
- Τα DOP μπορούν να υπολογισθούν χωρίς τη χρήση μετρήσεων παρά μόνο με τις θέσεις των δορυφόρων από τις εκπεμπόμενες εφημερίδες και από την προσεγγιστική τιμή της θέσης του δέκτη.
- Οι αριθμοί DOP έχουν περιορισμένη χρήση στις τεχνικές μέτρησης σχετικού εντοπισμού αλλά είναι δυνατό να φανούν χρήσιμοι σε μερικές εφαρμογές του σχεδιασμού των μετρήσεων GPS καθώς και στον κινηματικό εντοπισμό.

## **5.6 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ**

- 1.** Να αναφερθεί η αρχή λειτουργίας του δορυφορικού συστήματος GPS. Για τον προσδιορισμό της τρισδιάστατης θέσης με χρήση ενός δέκτη GPS πόσες τουλάχιστον ταυτόχρονες μετρήσεις απόστασης από αντίστοιχους δορυφόρους απαιτούνται και γιατί;
- 2.** Ποιες οι πηγές σφαλμάτων στις μετρήσεις με το σύστημα GPS. Ποιοι οι βασικοί παράγοντες που επηρεάζουν την ακρίβεια εντοπισμού θέσης με το σύστημα GPS.
- 3.** Τι είναι η μέτρηση της ψευδοαπόστασης; Πότε η ψευδοαπόσταση θα ήταν ίση με την γεωμετρική (πραγματική) απόσταση μεταξύ δορυφόρου-δέκτη;
- 4.** Ποια είναι η σημασία του παράγοντα DOP στον απόλυτο εντοπισμό θέσης με το σύστημα GPS;

## 6. ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΥΚΝΩΣΗΣ ΔΙΚΤΥΩΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

### 6.1 ΓΕΝΙΚΑ

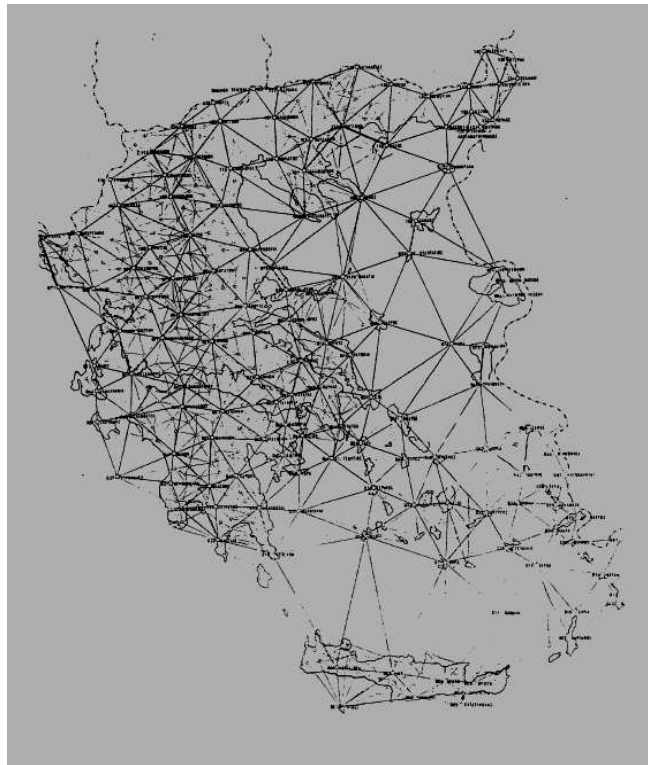
Σε αυτό κεφάλαιο παρατίθεται αρχικά μια συνοπτική παρουσίαση στον *τριγωνισμό* και στα *γεωδαιτικά δίκτυα οριζοντίου ελέγχου*. Ο βασικός κορμός του κεφαλαίου αναφέρεται σε μεθοδολογίες ένταξης της θέσης σημείων σε γεωδαιτικά δίκτυα οριζοντίου ελέγχου και πραγματεύεται τις βασικές μεθόδους *πύκνωσης* τους. Ειδικότερα, παρουσιάζονται η μέθοδος της *εμπροσθοτομίας* και της *οπισθοτομίας*, καθώς και ειδικότερες τεχνικές πύκνωσης, όπως η μέθοδος *Hansen* και ο *καταβιβασμός σημείου*.

### 6.2 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ - ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Όπως αναφέρθηκε, οι περισσότερες τοπογραφικές εργασίες γίνονται σε ενιαίο σύστημα αναφοράς ώστε να είναι δυνατός ο καθορισμός της σχετικής θέσης της περιοχής μελέτης με άλλες τοπογραφικές εργασίες στην ίδια ή σε κάποια άλλη περιοχή. Στην περίπτωση τοπογραφικών εργασιών οριζοντιογραφίας, ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς υλοποιείται από ένα πλήθος σημείων γνωστών (υπολογισμένων από μετρήσεις) συντεταγμένων, τα οποία συνιστούν ένα δίκτυο σταθερών σημείων στην επιφάνεια της γης. Τα δίκτυα αυτά ιδρύονται σε κρατικό επίπεδο και είναι γνωστά ως *τριγωνομετρικά δίκτυα* και υλοποιούν το κρατικό σύστημα αναφοράς. Τα σημεία (κορυφές του δικτύου) από τα οποία υλοποιείται ένα τριγωνομετρικό δίκτυο ονομάζονται *τριγωνομετρικά σημεία*, ενώ η διαδικασία ίδρυσής τους (εγκατάσταση, μέτρηση και υπολογισμός του δικτύου) είναι γνωστή ως *τριγωνισμός* (*triangulation*). Οι θέσεις των κορυφών ενός τριγωνομετρικού δικτύου συνήθως εκφράζονται μέσω των προβολικών τους συντεταγμένων ( $x, y$ ), ενώ είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν οι ελλειψοειδείς συντεταγμένες ( $\varphi, \lambda$ ) και τρισδιάστατες καρτεσιανές συντεταγμένες ( $X, Y, Z$ ). Στο σχήμα 6.1 φαίνεται το τριγωνομετρικό δίκτυο Ι΄ τάξης της Ελλάδας που ιδρύθηκε και συντηρείται από την Γεωγραφική Υπηρεσία Στρατού (ΓΥΣ).

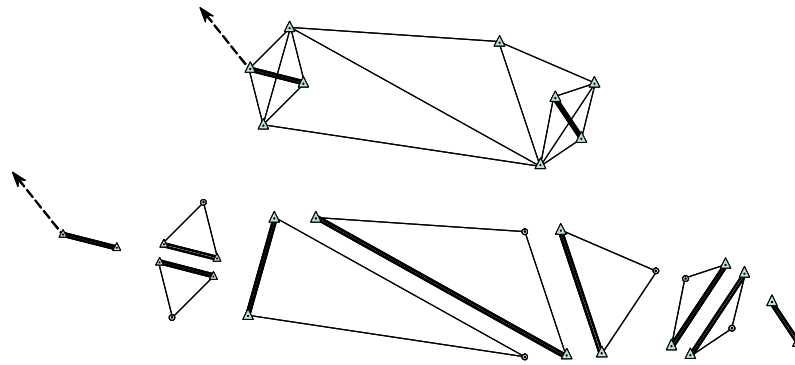
Ο όρος τριγωνισμός προέρχεται από την διαδικασία ίδρυσης των τριγωνομετρικών δικτύων με τον κλασικό τρόπο και έχει ιστορική σημασία. Μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 1970, η διαδικασία ίδρυσης ενός τριγωνομετρικού δικτύου στηρίζονταν στην μέτρηση των γωνιών και περιορισμένου αριθμού αποστάσεων του πλέγματος τριγώνων που συνιστούν το δίκτυο με την μεθοδολογία που παρουσιάζεται στο σχήμα 6.2. Με την εξέλιξη των ηλεκτρομαγνητικών οργάνων μέτρησης αποστάσεων (EDM), η μέτρηση των τριγωνομετρικών δικτύων συμπεριέλαβε μεγαλύτερο αριθμό πλευρομετρήσεων με αποτέλεσμα το μέγεθος (κλίμακα) του δικτύου να προσδιορίζεται με μεγαλύτερη ακρίβεια και αξιοπιστία. Στην περίπτωση που σε ένα τριγωνομετρικό δίκτυο μετρηθούν μόνο οι πλευρές του, το δίκτυο ονομάζεται *τριπλευρικό δίκτυο*. Ωστόσο, στην πράξη, ο προσεκτικός συνδυασμός γωνιομετρήσεων και πλευρομετρήσεων σε ένα δίκτυο αποτελεί μια πιο καλή επιλογή. Σήμερα, η ίδρυση ενός τριγωνομετρικού δικτύου είναι προτιμότερο να γίνεται με μεθόδους δορυφορικής γεωδαισίας. Μια τέτοια επιλογή, μεταξύ άλλων προσφέρει ευελιξία στην επιλογή της θέσης των κορυφών του δικτύου δεδομένου ότι δεν απαιτείται αμοιβαία ορατότητα μεταξύ τους και

παρέχει συνολικά μεγαλύτερη ακρίβεια, ιδιαίτερα κατά τον υπολογισμό της κλίμακας του δικτύου.

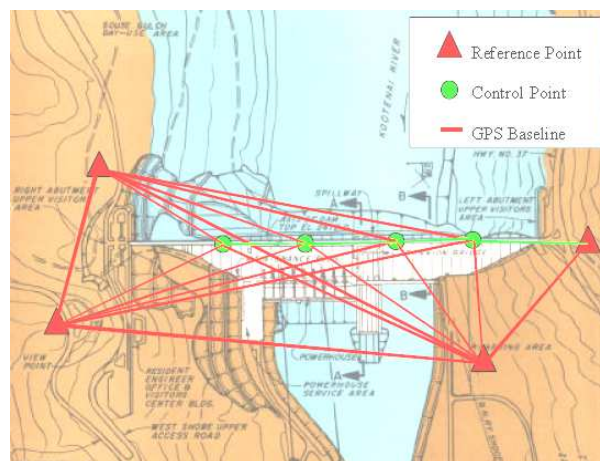


**Σχήμα 6.1** Το πρωτεύον τριγωνομετρικό δίκτυο της Ελλάδας [8]

Στο σημείο αυτό επισημαίνεται ότι, τα τριγωνομετρικά δίκτυα με την κλασσική έννοια του όρου, αποτελούν μια κατηγορία *γεωδαιτικών δικτύων οριζοντίου ελέγχου* που χρησιμοποιούνται κυρίως για τοπογραφικές εργασίες αποτυπώσεων και χαράξεων σε τμήματα της φυσικής γήινης επιφάνειας και σε εγκαταστάσεις που βρίσκονται σε αυτή για διάφορους σκοπούς. Γεωδαιτικά δίκτυα οριζοντίου ελέγχου μπορεί να καλύπτουν μικρές εκτάσεις για την εξυπηρέτηση των αναγκών κατασκευής ή παρακολούθησης της δυναμικής συμπεριφοράς ενός τεχνικού έργου ή για άλλους λόγους (σχ. 6.3). Ανάλογα με την περίπτωση (μέγεθος του δικτύου, επιδιωκόμενες ακρίβειες, συνθήκες ορατότητας μεταξύ των κορυφών του ή προς τον δορυφορικό σχηματισμό, κ.ά.) είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν δορυφορικές, συμβατικές μέθοδοι ή/και συνδυασμός τους.



**Σχήμα 6.2** Διαδικασία μέτρησης τριγωνομετρικών δικτύων με τη βοήθεια κυρίως γωνιομετρήσεων. Σε αυτή την περίπτωση η κλίμακα του δικτύου προκύπτει από την μέτρηση βάσεων μικρού μήκους σε χαρακτηριστικές θέσεις του δικτύου. Στο παράδειγμα του σχήματος η μέτρηση του δικτύου ξεκινάει μετρώντας και προσανατολίζοντας την βάση μικρού μήκους που φαίνεται κάτω αριστερά. Κάθε νέα κορυφή του δικτύου προκύπτει με μετρήσεις γωνιών από τα γνωστά (υπολογισμένα) προς τα νέα σημεία. Η ορθότητα της διαδικασίας επαληθεύεται μετρώντας το μήκος της βάσης κάτω δεξιά.



**Σχήμα 6.3** Γεωδαιτικό δίκτυο οριζοντίου ελέγχου για τον υπολογισμό μετακινήσεων τεχνικών έργων. Τα σημεία αναφοράς (τρίγωνα) εγκαθίστανται σε σταθερό έδαφος και τα σημεία ελέγχου (κύκλοι) στην κατασκευή. Στόχος της διαδικασίας αποτελεί ο υπολογισμός της δυναμικής συμπεριφοράς της κατασκευής στα σημεία ελέγχου μέσω της μέτρησης και επίλυσης του δικτύου σε διαφορετικές χρονικές στιγμές.

### 6.3 ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΥΚΝΩΣΗΣ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΩΝ ΔΙΚΤΥΩΝ ΟΡΙΖΟΝΤΙΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ

Η ένταξη μιας τοπογραφικής εργασίας σε κάποιο σύστημα αναφοράς ισοδυναμεί με τον υπολογισμό των συντεταγμένων των χαρακτηριστικών σημείων που περιλαμβάνει σε αυτό το σύστημα αναφοράς. Με αυτή την έννοια, με τον όρο *εξάρτηση μιας τοπογραφικής εργασίας από το τριγωνομετρικό δίκτυο* μιας περιοχής εννοείται η ένταξη της στο σύστημα αναφοράς στο οποίο είναι προσδιορισμένες οι θέσεις των τριγωνομετρικών σημείων που χρησιμοποιούνται για αυτό το σκοπό. Στις περισσότερες περιπτώσεις, τα σημεία του τριγωνομετρικού δικτύου μιας περιοχής δεν επαρκούν για την εκπόνηση μιας τοπογραφικής εργασίας, είτε επειδή είναι εκτός της περιοχής μελέτης, είτε επειδή βρίσκονται σε μεγάλες αποστάσεις μεταξύ τους. Έτσι δημιουργείται η ανάγκη



ίδρυσης νέων σημείων στην περιοχή που πρόκειται να εκτελεστεί μια τοπογραφική εργασία με εξάρτηση από το τριγωνομετρικό δίκτυο της περιοχής. Η διαδικασία προσδιορισμού της θέσης νέων σημείων με μετρήσεις από/προς γνωστά τριγωνομετρικά σημεία είναι γνωστή ως *πύκνωση του τριγωνομετρικού δικτύου*.

Ανάλογα με τις ιδιαίτερες συνθήκες / απαιτήσεις μιας τοπογραφικής εργασίας η πύκνωση του τριγωνομετρικού δικτύου μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους. Ο απλούστερος τρόπος ένταξης ενός νέου σημείου στο τριγωνομετρικό δίκτυο απαιτεί τη *μέτρηση των πολικών του συντεταγμένων* (οριζόντια γωνία και απόσταση) από ένα γνωστό σημείο με αφετηρία πολικό άξονα που διέρχεται από δεύτερο γνωστό σημείο. Σε αυτή την περίπτωση ο προσδιορισμός του νέου σημείου γίνεται μονοσήμαντα (μετρήσεις από ένα γνωστό σημείο) με αποτέλεσμα η ανίχνευση τυχόν χονδροειδών σφαλμάτων στις μετρήσεις να είναι αδύνατη. Κατά συνέπεια, η εφαρμογή της μεθόδου θα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη επιμέλεια και εφόσον το επιτρέπουν οι προδιαγραφές του έργου. Στην πράξη, η πύκνωση του τριγωνομετρικού δικτύου γίνεται συνήθως με την μέθοδο της *εμπροσθοτομίας* ή της *οπισθοτομίας*. Η πρώτη μέθοδος απαιτεί την λήψη μετρήσεων οριζοντίων γωνιών ή/και αποστάσεων από γνωστά σημεία προς το νέο σημείο, ενώ η δεύτερη την λήψη μετρήσεων οριζοντίων γωνιών ή/και αποστάσεων από το νέο σημείο προς γνωστά σημεία της περιοχής. Οι μέθοδοι της εμπροσθοτομίας και της οπισθοτομίας είναι γνωστές στη βιβλιογραφία ως *τομές* και θα εξετασθούν στη συνέχεια με λεπτομέρεια. Επίσης, μια ειδική κατηγορία τεχνικών πύκνωσης του τριγωνομετρικού δικτύου αφορά στην περίπτωση καταβιβασμού (μεταφοράς) προσίτου ή απρόσιτου τριγωνομετρικού σημείου που δεν βρίσκεται στο έδαφος (συνήθως είναι εγκατεστημένα σε υψηλές κατασκευές, κτήρια, κ.α.) και απαιτείται η μεταφορά του σε αυτό προκειμένου να χρησιμοποιηθεί στο πλαίσιο μιας τοπογραφικής εργασίας. Η μέθοδος είναι γνωστή ως *καταβιβασμός τριγωνομετρικού σημείου* και θα εξετασθεί στη συνέχεια. Τέλος, πύκνωση του τριγωνομετρικού δικτύου μπορεί να γίνει με επέκταση του ίδιου του δικτύου ή με εφαρμογή της μεθόδου πολυγωνομετρίας. Ωστόσο, αυτές οι περιπτώσεις αποτελούν αυτοτελείς τοπογραφικές διαδικασίες και δεν εξετάζονται σε αυτή την ενότητα.

## 6.4 ΕΜΠΡΟΣΘΟΤΟΜΙΑ

### 6.4.1 Γενικά

Με τη μέθοδο της εμπροσθοτομίας επιτυγχάνεται ο προσδιορισμός της θέσης ενός σημείου  $M (x_M, y_M)$  με τη βοήθεια μετρήσεων από δύο σημεία γνωστών συντεταγμένων  $A (x_A, y_A)$  και  $B (x_B, y_B)$ . Ανάλογα με το είδος των μετρήσεων το πρόβλημα διακρίνεται σε δύο περιπτώσεις. Αν έχουν μετρηθεί οι οριζόντιες γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  το πρόβλημα ονομάζεται *γωνιακή εμπροσθοτομία* ή απλά *εμπροσθοτομία* (σχ. 6.4). Αντίστοιχα, όταν είναι γνωστές οι αποστάσεις  $D_{AM}$  και  $D_{BM}$  το πρόβλημα ονομάζεται *πλευρική εμπροσθοτομία* (σχ. 6.5). Όπως είναι φανερό, η μέθοδος της πλευρικής εμπροσθοτομίας βρίσκει ιδιαίτερη εφαρμογή στην περίπτωση μη αμοιβαία ορατών σημείων  $A$  και  $B$  όπου η μέθοδος της γωνιακής εμπροσθοτομίας είναι αδύνατη. Τέλος, επισημαίνεται ότι, η εφαρμογή της μεθόδου για την πύκνωση του τριγωνομετρικού δικτύου προϋποθέτει ότι οι αποστάσεις  $D_{AM}$  και  $D_{BM}$  αναφέρονται στο προβολικό επίπεδο (επίπεδο χαρτογραφικής απεικόνισης).

## 6.4.2 Απλή Εμπροσθοτομία

### 6.4.2α Μεθοδολογία επίλυσης με γωνιομετρήσεις

Ο υπολογισμός του προβλήματος της εμπροσθοτομίας μπορεί να γίνει με δύο τρόπους – είτε με επίλυση του τριγώνου  $ABM$ , είτε με προσδιορισμό της τομής των ευθειών εμπροσθοσκοπέυσης. Για κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις η διαδικασία υπολογισμού είναι η εξής:

- Υπολογισμός με επίλυση του τριγώνου  $ABM$

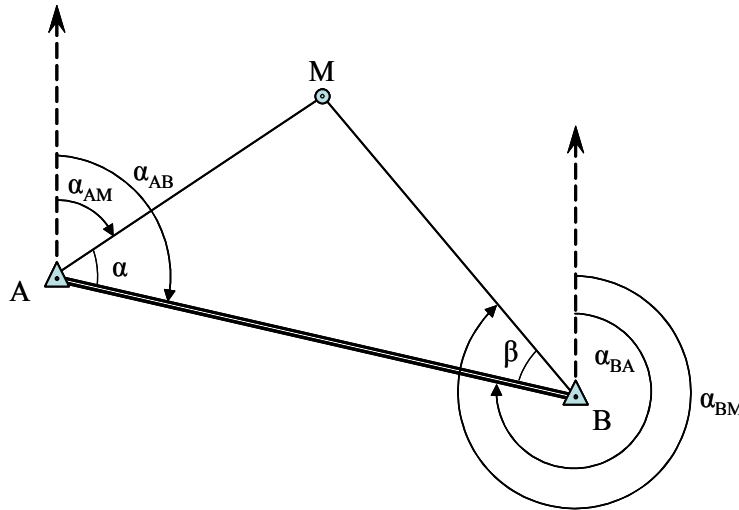
Οι συντεταγμένες του σημείου  $M$  υπολογίζονται με τη βοήθεια θεμελιωδών προβλημάτων ξεχωριστά από τα σημεία  $A$  και  $B$  και στη συνέχεια λαμβάνεται ο μέσος όρος τους (σχ. 6.4). Σταδιακά υπολογίζονται η οριζόντια απόσταση  $D_{AB}$  και η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  με εφαρμογή του Πυθαγόρειου προβλήματος και του 2<sup>ου</sup> θεμελιώδους προβλήματος στις συντεταγμένες των σημείων  $A$  και  $B$ . Στη συνέχεια υπολογίζονται οι οριζόντιες αποστάσεις  $D_{AM}$  και  $D_{BM}$  με εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων

$$D_{AM} = D_{AB} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad D_{BM} = D_{AB} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (6.1)$$

Οι γωνίες διεύθυνσης  $\alpha_{AM}$  και  $\alpha_{BM}$  για την γεωμετρία του σχήματος 6.4 υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\alpha_{AM} = \alpha_{AB} - \alpha, \quad \alpha_{BM} = \alpha_{BA} + \beta \quad (6.2)$$

Με βάση τα υπολογισμένα μήκη  $D_{AM}$ ,  $D_{BM}$  και τις γωνίες διεύθυνσης  $\alpha_{AM}$ ,  $\alpha_{BM}$  προκύπτουν οι συντεταγμένες του σημείου  $M$  με εφαρμογή του 1<sup>ου</sup> θεμελιώδους προβλήματος από τα σημεία  $A$  και  $B$ .



Σχήμα 6.4 Απλή εμπροσθοτομία

$$\begin{aligned} x_{M(A)} &= x_A + D_{AM} \cdot \sin \alpha_{AM}, & y_{M(A)} &= y_A + D_{AM} \cdot \cos \alpha_{AM} \\ x_{M(B)} &= x_B + D_{BM} \cdot \sin \alpha_{AM}, & y_{M(B)} &= y_B + D_{BM} \cdot \cos \alpha_{AM} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Τέλος, οι συντεταγμένες του σημείου  $M$  υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$x_M = \frac{x_{M(A)} + x_{M(B)}}{2}, \quad y_M = \frac{y_{M(A)} + y_{M(B)}}{2} \quad (6.4)$$

Επισημαίνεται ότι, ο έλεγχος της συμφωνίας της λύσης από τα σημεία A και B αφορά αποκλειστικά στον έλεγχο των υπολογισμών και δεν αποτελεί ένδειξη της ορθότητας των συντεταγμένων του σημείου M (π.χ. αν ληφθεί αντί γωνίας  $\beta$  η γωνία  $\beta'$ , τότε θα προκύπτει άλλο τρίγωνο με σημείο τομής M' αντί M).

- Υπολογισμός ως τομή των ευθειών εμπροσθοσκόπευσης (AM και BM)

Τα βήματα υπολογισμού των οριζόντιων αποστάσεων  $D_{AM}$ ,  $D_{BM}$  και των γωνιών διεύθυνσης  $\alpha_{AM}$ ,  $\alpha_{BM}$  είναι όμοια με την προηγούμενη περίπτωση (σχέσεις 6.1 και 6.2). Με βάση αυτά τα στοιχεία μορφώνονται οι εξισώσεις των ευθειών AM και BM ως εξής:

$$\lambda_1 = \tan \alpha_{AM} = \frac{x_M - x_A}{y_M - y_A}, \quad \lambda_2 = \tan \alpha_{BM} = \frac{x_M - x_B}{y_M - y_B} \quad (6.5)$$

Οι συντεταγμένες του σημείου M προκύπτουν με επίλυση του συστήματος εξισώσεων (6.5) από το σημείο A και B ξεχωριστά και υπολογισμό του μέσου όρου για κάθε συνιστώσα.

#### 6.4.2β Μεθοδολογία επίλυσης με πλευρομετρήσεις

Η περίπτωση της πλευρικής εμπροσθοτομίας προϋποθέτει ότι είναι γνωστές οι αποστάσεις  $D_{AM}$  και  $D_{BM}$  (σχ. 6.5). Ανάλογα με το μέγεθος της απόστασης μεταξύ των υπόψη σημείων, οι  $D_{AM}$  και  $D_{BM}$  προκύπτουν με την εφαρμογή των κατάλληλων αναγωγών και διορθώσεων στις πρωτογενώς μετρημένες κεκλιμένες αποστάσεις  $S_{AM}$  και  $S_{BM}$  και την επιβολή της κατάλληλης κλίμακας παραμόρφωσης λόγω χαρτογραφικής απεικόνισης (ενότητα 3.5.6γ).

- Υπολογισμός με επίλυση του τριγώνου ABM

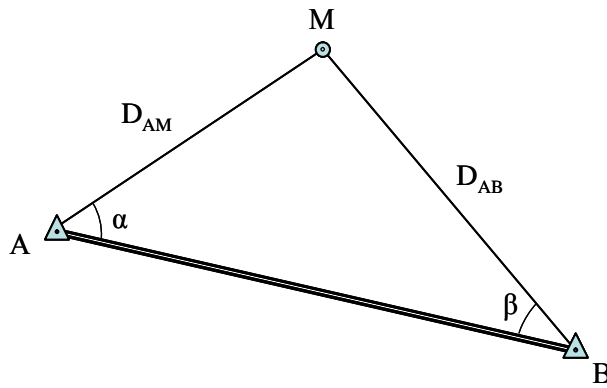
Αρχικά υπολογίζεται η απόσταση  $D_{AB}$  με εφαρμογή του Πυθαγόρειου προβλήματος στις συντεταγμένες των γνωστών σημείων A και B:

$$D_{AB}^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad (6.6)$$

Στη συνέχεια με βάση τον νόμο των συνημίτονων υπολογίζονται οι οριζόντιες γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  ως εξής

$$\cos \alpha = \frac{D_{AB}^2 + D_{AM}^2 - D_{BM}^2}{2 \cdot D_{AB} \cdot D_{AM}}, \quad \cos \beta = \frac{D_{AB}^2 + D_{BM}^2 - D_{AM}^2}{2 \cdot D_{AB} \cdot D_{BM}} \quad (6.7)$$

Τέλος, με υπολογισμένες τις γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  το πρόβλημα ανάγεται στην περίπτωση γωνιακής εμπροσθοτομίας και επιλύεται κατά τα γνωστά.



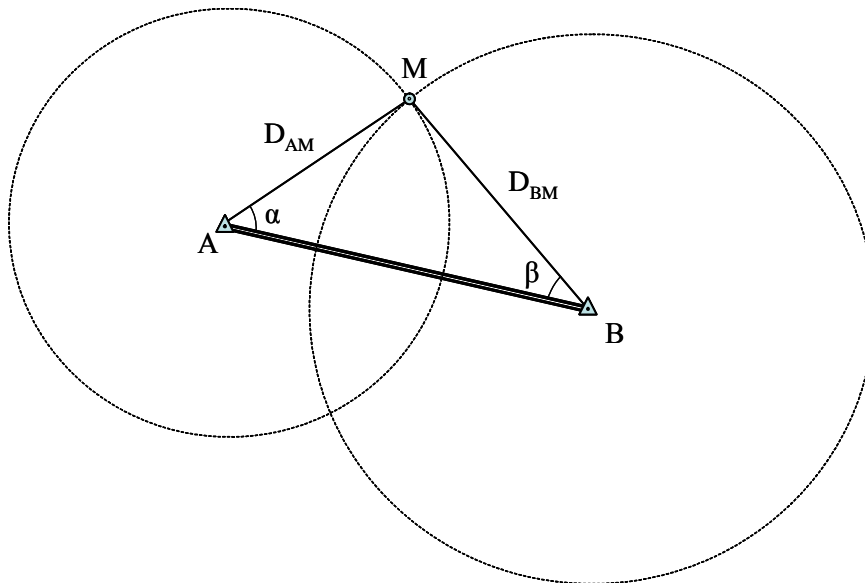
Σχήμα 6.5 Πλευρική εμπροσθοτομία

• Υπολογισμός ως τομή κύκλων

Πρόκειται για γεωμετρική επίλυση του προβλήματος, όπου το νέο σημείο M προκύπτει ως η τομή δύο περιφερειών κύκλου με κέντρα τα γνωστά σημεία A και B και ακτίνες ίσες προς  $D_{AM}$  και  $D_{BM}$  (σχ. 6.6). Ωστόσο, δεδομένου ότι από τη γεωμετρία του προβλήματος προκύπτουν δύο λύσεις (δύο σημεία τομής) θα πρέπει να σημειώνεται σε σκαρίφημα η σχετική θέση του σημείου M ως προς τα A και B ώστε να επιλέγεται ποια από τις δύο λύσεις είναι αποδεκτή. Ο υπολογισμός των συντεταγμένων του σημείου M προκύπτει με επίλυση του συστήματος εξισώσεων

$$D_{AM}^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2$$

$$D_{BM}^2 = (x_M - x_B)^2 + (y_M - y_B)^2$$
(6.8)



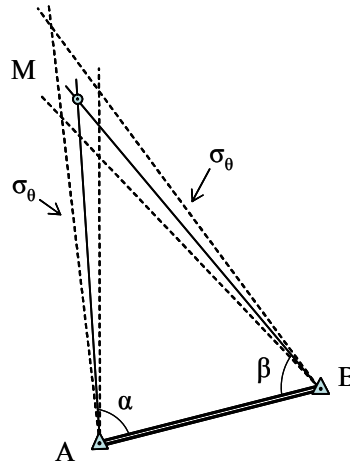
Σχήμα 6.6 Επίλυση εμπροσθοτομίας με τομή κύκλων

### 6.4.3 Ακρίβεια Εμπροσθοτομίας

#### 6.4.3α Εκτίμηση ακρίβειας εμπροσθοτομίας

Η ακρίβεια προσδιορισμού ενός σημείου με την μέθοδο της απλής εμπροσθοτομίας εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την ακρίβεια των μετρημένων μεγεθών και από τη γεωμετρία του τριγώνου που σχηματίζεται. Η ακρίβεια των

μετρήσεων (γωνίες ή μήκη) καθορίζεται από τα τεχνικά χαρακτηριστικά των οργάνων, την επίδραση των ατμοσφαιρικών συνθηκών (ιδιαίτερα όταν μετρούνται αποστάσεις μεγάλου μήκους) και την ακολουθούμενη διαδικασία μέτρησης. Επίσης, η μορφή του τριγώνου που σχηματίζεται από τα γνωστά με το άγνωστο σημείο μπορεί να επηρεάσει ουσιαστικά την ακρίβεια της μεθόδου. Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.7, για δεδομένη ακρίβεια μέτρησης των γωνιών  $\alpha$  και  $\beta$  ίση προς  $\pm\sigma_\theta$ , η ακρίβεια εντοπισμού του σημείου M εξαρτάται από το σχήμα του τριγώνου ABM.

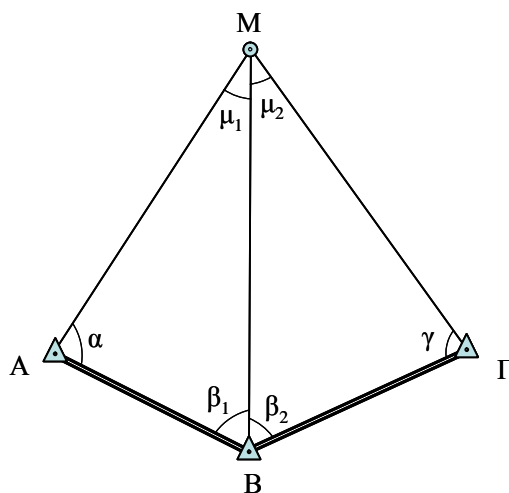


**Σχήμα 6.7** Επίδραση της μορφής του τριγώνου στην ακρίβεια της εμπροσθοτομίας

Έτσι, λοιπόν η αβεβαιότητα προσδιορισμού του σημείου M είναι μικρότερη σε διευθύνσεις κάθετες προς τις AM και BM και μεγαλύτερη σε διευθύνσεις περίπου παράλληλες με τις AM και BM. Επίσης, αποδεικνύεται ότι όταν το σχήμα του τριγώνου πλησιάζει το ορθογώνιο - ισοσκελές ή το ισόπλευρο τότε, η ακρίβεια προσδιορισμού της θέσης του σημείου M είναι παρόμοια σε όλες τις διευθύνσεις και μικρότερη σε σχέση με κάθε άλλη μορφή τριγώνου. Για δεδομένη ακρίβεια στις μετρήσεις και δεδομένη γεωμετρία τριγώνου είναι δυνατόν να προεκτιμηθεί η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό του σημείου M με εφαρμογή του *νόμου μετάδοσης των μεταβλητοτήτων* στις σχέσεις που επιλύουν το πρόβλημα της εμπροσθοτομίας (βλ. Ενότητα 6.4.2). Συνεπώς, ανάλογα με τις απαιτήσεις κάθε εφαρμογής θα πρέπει να αποφασίζεται κατά πόσον είναι χρήσιμο να υπολογίζεται εκ των προτέρων ή όχι η αναμενόμενη ακρίβεια στον προσδιορισμό της θέσης του σημείου M.

### 6.4.3β Διπλή εμπροσθοτομία

Όταν επιδιώκεται υψηλή ακρίβεια στον προσδιορισμό της θέσης ενός σημείου με τη μέθοδο της εμπροσθοτομίας, τότε ενδείκνυται να λαμβάνονται μετρήσεις από τρία γνωστά σημεία A, B, Γ όπως φαίνεται στο σχήμα 6.8. Ο συνδυασμός δύο απλών εμπροσθοτομιών με αυτό τον τρόπο ονομάζεται *διπλή εμπροσθοτομία*. Ο προσδιορισμός του άγνωστου σημείου M γίνεται ανεξάρτητα από τα ζεύγη των σημείων (A, B) και (B, Γ) οπότε μπορεί να ελεγχθεί η ορθότητα της θέσης του ζητούμενου σημείου. Οι τελικές συντεταγμένες του σημείου M υπολογίζονται ως ο μέσος όρος των συντεταγμένων που προκύπτει από τις δύο εμπροσθοτομίες.



Σχήμα 6.8 Διπλή εμπροσθοτομία

Προκειμένου να εξασφαλίζεται η αποτελεσματική εφαρμογή της μεθόδου ενδείκνυται:

- το σχήμα των τριγώνων ABM και BGM να τείνει στο ισοσκελές - ισόπλευρο τρίγωνο,
- να υπολογίζονται οι τιμές των  $\alpha_{BM}$  και  $D_{BM}$  όπως προκύπτουν από τις δύο εμπροσθοτομίες και να ελέγχονται οι διαφορές τους,
- να συνορθώνονται οι μετρημένες γωνίες βάσει της συνθήκης

$$\frac{D_{AB} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \mu_2}{D_{B\Gamma} \cdot \sin \mu_1 \cdot \sin \gamma} = 1 \quad (6.9)$$

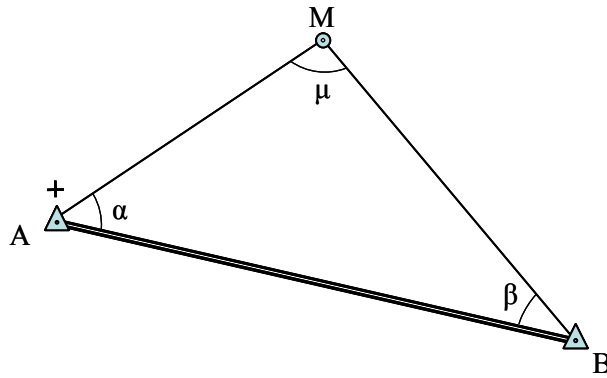
όπου οι γωνίες  $\mu_1$  και  $\mu_2$  εξάγονται υπολογιστικά από τρίγωνα ABM και BGM.

#### 6.4.4 Άλλες Μορφές Εμπροσθοτομίας

Ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες κάθε προβλήματος είναι δυνατόν να υπάρχουν περιορισμοί στη λήψη των αναγκαίων μετρήσεων για την εφαρμογή της μεθόδου. Σε αυτές τις περιπτώσεις είναι δυνατόν να εφαρμοσθούν παραλλαγές της απλής εμπροσθοτομίας όπως φαίνεται στα επόμενα.

##### 6.4.4α Περίπτωση απρόσιτου τριγωνομετρικού σημείου (πλαγιοτομία)

Όπως φαίνεται στο σχήμα 6.9, όταν ένα από τα δύο σημεία γνωστών συντεταγμένων είναι απρόσιτο (σημείο A), τότε είναι δυνατόν να μετρηθεί η γωνία  $\mu$ , οπότε η γωνία  $\alpha$  προκύπτει υπολογιστικά ως  $\alpha = 200^{\text{grad}} - (\beta + \mu)$ . Με αυτό τον τρόπο το πρόβλημα ανάγεται σε πρόβλημα απλής εμπροσθοτομίας. Αυτή η μορφή εμπροσθοτομίας είναι γνωστή ως *πλαγιοτομία*.



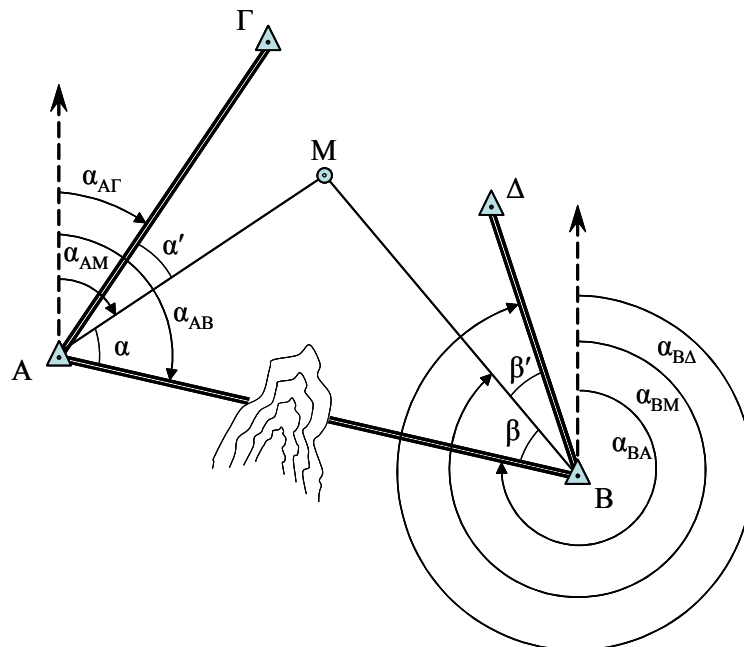
Σχήμα 6.9 Πλαγιοτομία

#### 6.4.4β Περίπτωση μη αμοιβαία ορατών τριγωνομετρικών σημείων

Στην περίπτωση που τα σημεία A και B δεν είναι αμοιβαία ορατά και δεν είναι δυνατή η μέτρηση των αποστάσεων  $D_{AM}$  και  $D_{BM}$ , τότε είναι δυνατός ο υπολογισμός του σημείου M με εμπροσθοτομία αρκεί να υπάρχει ένα τριγωνομετρικό σημείο στην περιοχή ορατό από τα A και B ή δύο τριγωνομετρικά σημεία στην περιοχή ορατά από τα A και B αντίστοιχα. Όπως προκύπτει από το σχήμα 6.10, για την αντιμετώπιση του προβλήματος μετρώνται οι βοηθητικές γωνίες  $\alpha'$  και  $\beta'$  βάσει των οποίων υπολογίζονται οι γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{AB} - \alpha_{AM} = \alpha_{AB} - (\alpha_{AG} + \alpha') \\ \beta &= \alpha_{BM} - \alpha_{BA} = (\alpha_{BD} - \beta') - \alpha_{BA} = (\alpha_{BD} - \beta') - (200^{\text{grad}} - \alpha_{AB}) \end{aligned} \quad (6.10)$$

οπότε, το πρόβλημα μεταπίπτει σε περίπτωση απλής εμπροσθοτομίας.



Σχήμα 6.10 Γενική εμπροσθοτομία

#### 6.4.4γ Τρισδιάστατη εμπροσθοτομία

Αρκετές φορές είναι αναγκαίο ο προσδιορισμός της θέσης ενός σημείου με εμπροσθοτομία να γίνεται στις τρεις διαστάσεις. Σε αυτή την περίπτωση απαιτείται κατά τις εργασίες πεδίου να ληφθούν οι εξής μετρήσεις (βλ. σχ. 6.11):

- οι οριζόντιες γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  ή/και τα μετρημένα μήκη  $S_{AM}$  και  $S_{BM}$ ,
- οι ζενίθιες γωνίες  $Z_{AM}$  και  $Z_{BM}$ ,
- τα ύψη οργάνου στα σημεία A και B,  $YO_A$  και  $YO_B$ ,
- το ύψος σκόλευσης  $Y\Sigma_M$  στο σημείο M (σε αρκετές περιπτώσεις όπου η σκόλευση γίνεται απευθείας στο σημείο M, τότε  $Y\Sigma_M=0$ ).

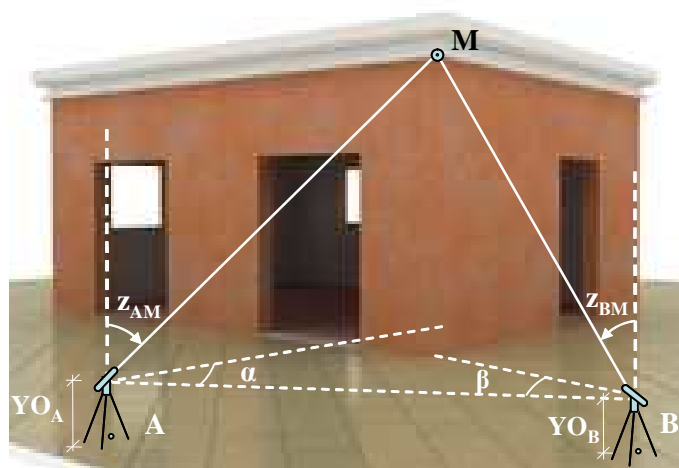
Ο εντοπισμός του σημείου M σε οριζοντιογραφία γίνεται με τη μεθοδολογία που αναπτύχθηκε στην ενότητα 6.4.2. Ο υψομετρικός προσδιορισμός του σημείου M προκύπτει με την μέθοδο της τριγωνομετρικής υψομετρίας. Για την εφαρμογή της μεθόδου απαιτείται η αναγωγή των κεκλιμένων μηκών στα αντίστοιχα οριζόντια, που για μικρές αποστάσεις είναι:

$$D_{AM} = S_{AM} \cdot \sin Z_{AM} \quad , \quad D_{BM} = S_{BM} \cdot \sin Z_{BM} \quad (6.11)$$

το υψόμετρο του σημείου M από τα σημεία A και B είναι:

$$\begin{aligned} H_{M_A} &= H_A + D_{AM} \cdot \cot Z_{AM} + YO_A - Y\Sigma_M \\ H_{M_B} &= H_B + D_{BM} \cdot \cot Z_{BM} + YO_B - Y\Sigma_M \end{aligned} \quad (6.12)$$

Τέλος, το υψόμετρο του σημείου M,  $H_M$  υπολογίζεται ως ο μέσος όρος των  $H_{M_A}$  και  $H_{M_B}$ .



Σχήμα 6.11 Τρισδιάστατη εμπροσθοτομία

#### 6.4.5 Ευρύτερο Πεδίο Εφαρμογών Εμπροσθοτομίας

Σε αυτές τις σημειώσεις η μέθοδος της εμπροσθοτομίας εισάγεται ως μία από τις κύριες μεθόδους πύκνωσης του τριγωνομετρικού δικτύου στο πλαίσιο τοπογραφικών εργασιών. Ωστόσο, στην πράξη, η ευρεία διάδοση των συστημάτων δορυφορικού εντοπισμού έχει περιορίσει σε μεγάλο βαθμό την χρήση της μεθόδου σε τέτοιου είδους εφαρμογές. Παρά ταύτα, η εμπροσθοτομία αποτελεί θεμελιώδη μέθοδο εντοπισμού στη γεωδαισία. Παρέχει με ευκολία και υψηλή ακρίβεια την



θέση προσίτων ή απρόσιτων σημείων, και ως εκ τούτου, χρησιμοποιείται σε μεγάλο πεδίο εφαρμογών.

Η αποτύπωση κτηριακών εγκαταστάσεων και μνημείων αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε αυτόνομα για την αποτύπωση χαρακτηριστικών σημείων και σημείων λεπτομερειών με βάση τα οποία προκύπτουν σχέδια όψεων και διατομών, είτε ως μέρος φωτογραμμετρικής αποτύπωσης για τον υπολογισμό φωτοσταθερών σημείων. Σε αυτή την κατηγορία εφαρμογών χρησιμοποιείται συνήθως η μέθοδος της τρισδιάστατης εμπροσθοτομίας όπως παρουσιάστηκε στην Ενότητα 6.4.4γ. Σημειώνεται ότι, η εφαρμογή της μεθόδου παρέχει την θέση των σημείων ενδιαφέροντος σε τοποκεντρικό σύστημα αναφοράς. Με κατάλληλους μετασχηματισμούς είναι δυνατός ο υπολογισμός της θέσης των σημείων αποτύπωσης σε σύστημα αναφοράς προσαρμοσμένο με την όψη ή διατομή του κτηρίου (μήκος, ύψος, βάθος).

Μια άλλη κατηγορία εφαρμογών της μεθόδου αφορά τον έλεγχο των γεωμετρικών προδιαγραφών βιομηχανικών παραγώγων (π.χ. έλεγχος του σχήματος και διαστάσεων ειδικών κατασκευών, οχημάτων, σκαφών). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται γεωδαιτικοί σταθμοί υψηλής γωνιακής απόδοσης ( $1''$  ή καλύτερα) και υψηλής ακρίβειας στα μήκη ( $\pm 1\text{mm} \pm 0.5\text{ppm}$ ). Η αποτύπωση μπορεί να γίνει ταυτόχρονα από δύο ή περισσότερα όργανα με τη βοήθεια εξειδικευμένου λογισμικού και τη χρήση ειδικών διατάξεων laser που χρησιμεύουν για την επισήμανση των σημείων με υψηλή ακρίβεια (εικ. 1). Σε αυτές τις περιπτώσεις επιδιώκεται η λήψη περισσότερων μετρήσεων από τις απολύτως αναγκαίες, οπότε ο προσδιορισμός των σημείων προκύπτει από πλεονάζουσες παρατηρήσεις και άρα με υψηλότερη ακρίβεια.

Η μέθοδος της εμπροσθοτομίας μπορεί να εφαρμοσθεί και για την παρακολούθηση μικρομετακινήσεων σε τεχνικά έργα, όπως φράγματα και γέφυρες. Ωστόσο, σε αυτές τις περιπτώσεις, εφόσον είναι δυνατόν συνιστάται η ίδρυση γεωδαιτικών δικτύων, οπότε η θέση των σημείων ενδιαφέροντος προκύπτει συνολικά με εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων και κατάλληλων στατιστικών ελέγχων και συνεπώς μεγαλύτερη ακρίβεια και αξιοπιστία. Τέλος, αναφέρονται και άλλα πεδία εφαρμογών της μεθόδου, όπως χαράξεις ακριβείας τεχνικών έργων, αποτυπώσεις αρχαιολογικών ανασκαφών, καθώς και παραλλαγές της μεθόδου σε εφαρμογές φωτογραμμετρικού ενδιαφέροντος.

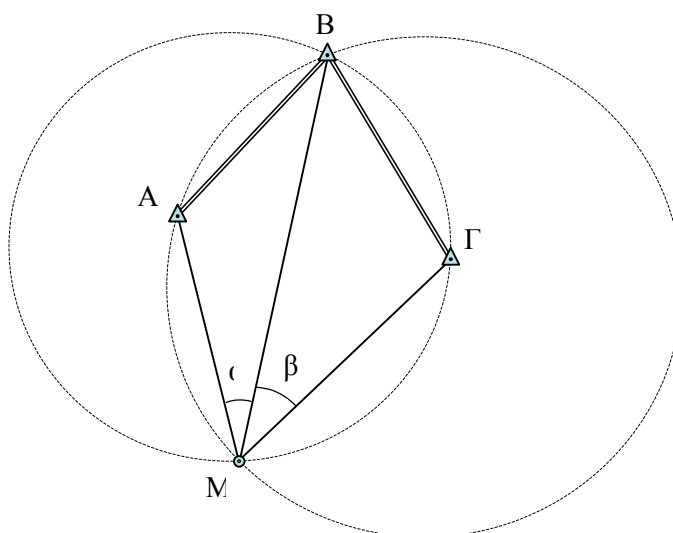


**Εικόνα 6.1** Χρήση μεθόδου εμπροσθοτομίας σε εφαρμογές βιομηχανικής γεωδαισίας [13]

## 6.5 ΟΠΙΣΘΟΤΟΜΙΑ

### 6.5.1 Γενικά – Ορισμός του Προβλήματος

Με τη μέθοδο της οπισθοτομίας επιτυγχάνεται ο προσδιορισμός της θέσης ενός σημείου  $M (x_M, y_M)$  με τη βοήθεια μετρήσεων διευθύνσεων προς τρία σημεία γνωστών συντεταγμένων  $A (x_A, y_A)$ ,  $B (x_B, y_B)$  και  $\Gamma (x_\Gamma, y_\Gamma)$  (σχ. 6.12 και 6.13). Η μέθοδος της οπισθοτομίας είναι υποδεέστερης ακρίβειας συγκρινόμενη με την μέθοδο της εμπροσθοτομίας. Ωστόσο, είναι ταχύτερη και απλούστερη στην εφαρμογή της, δεδομένου ότι αφενός προϋποθέτει τη λήψη μετρήσεων από ένα σημείο και αφετέρου δεν απαιτείται μετάβαση στα άγνωστα σημεία. Αυτά τα χαρακτηριστικά της μεθόδου είναι ιδιαίτερα κρίσιμα στην περίπτωση πύκνωσης του τριγωνομετρικού δικτύου, όπου οι αποστάσεις μεταξύ της περιοχής εργασίας και των τριγωνομετρικών σημείων μπορεί να είναι αρκετά μεγάλες και η μετάβαση σε αυτά επίπονη. Επισημαίνεται ότι, ο προσδιορισμός της θέσης του σημείου  $M$  με οπισθοτομία μπορεί να επιτευχθεί αν έχουν μετρηθεί αντί των διευθύνσεων προς τρία σημεία οι αποστάσεις προς δύο γνωστά σημεία  $A$  και  $B$ , οπότε το πρόβλημα ονομάζεται *πλευρική οπισθοτομία*. Σε αυτή την περίπτωση η επίλυση του προβλήματος ταυτίζεται με αυτή της πλευρικής εμπροσθοτομίας.

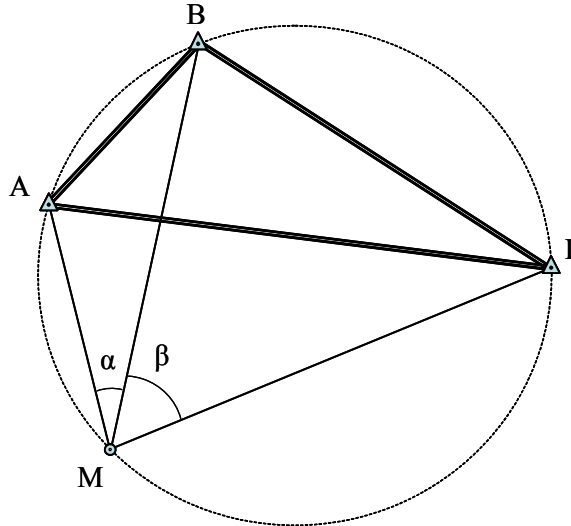


Σχήμα 6.12 Μέθοδος απλής οπισθοτομίας

### 6.5.2 Μεθοδολογία Επίλυσης Οπισθοτομίας

Ο υπολογισμός του προβλήματος της οπισθοτομίας μπορεί να επιτευχθεί είτε γεωμετρικά είτε αναλυτικά. Η γεωμετρική λύση του προβλήματος φαίνεται στο σχήμα 6.12. Ειδικότερα, το ζητούμενο σημείο  $M$  οφείλει να βρίσκεται στην τομή δύο περιφερειών κύκλου – αυτής που ορίζεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $M$  (κύκλος που γράφεται με χορδή  $AB$  και δέχεται γωνία  $\alpha$ ), και εκείνης που ορίζεται από τα σημεία  $B$ ,  $\Gamma$  και  $M$  (κύκλος που γράφεται από τη χορδή  $B\Gamma$  και δέχεται γωνία  $\beta$ ). Με γνώμονα τη σχετική θέση των σημείων  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  και  $M$  η μία από τις δύο λύσεις (σημεία τομής) απορρίπτεται ως μη αποδεκτή. Για το σκοπό αυτό, κατά τη διάρκεια των εργασιών πεδίου θα πρέπει να σχεδιάζεται σε σκαρίφημα η γεωμετρία του σημείου στάσης (άγνωστο σημείο) ως προς τα σημεία παρατήρησης με βάση το οποίο καθορίζεται η σωστή λύση. Επισημαίνεται ότι, στην περίπτωση κατά την οποία τα γνωστά σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  και το ζητούμενο σημείο  $M$  βρίσκονται

στην ίδια περιφέρεια, τότε ο προσδιορισμός του σημείου M καθίσταται αόριστος, οπότε το πρόβλημα δεν έχει λύση (σχ. 6.13). Αυτή η περιφέρεια ονομάζεται *επικίνδυνος κύκλος*. Στην ενότητα 6.5.3α, δίδονται τα κριτήρια επιλογής της θέσης του σημείου M ως προς τα γνωστά σημεία A, B, Γ ούτως ώστε να περιορίζεται η πιθανότητα δημιουργίας επικίνδυνου κύκλου.



**Σχήμα 6.13** Επικίνδυνος κύκλος

Για τον αναλυτικό υπολογισμό του προβλήματος της οπισθοτομίας έχουν αναπτυχθεί αρκετές μέθοδοι οι οποίες στηρίζονται στις γεωμετρικές ιδιότητες του συστήματος παρατήρησης. Εδώ παρουσιάζεται η διαδικασία υπολογισμού του προβλήματος με δύο μεθόδους.

- *Μέθοδος 1*

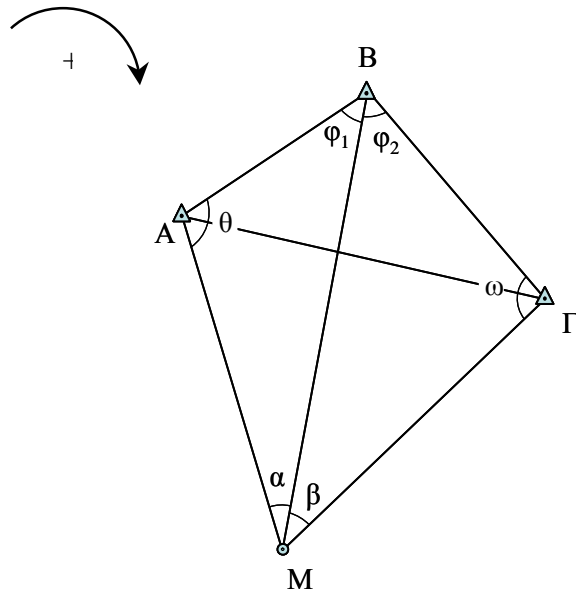
Στο σχήμα 6.14 έχουν μετρηθεί από το ζητούμενο σημείο M οι γωνίες α και β προς τα γνωστά σημεία A, B και Γ. Στο τετράπλευρο ABΓM ισχύει η σχέση

$$\omega = (400^{\text{grad}} - \alpha - \beta - \varphi_1 - \varphi_2) - \theta = \kappa - \theta \quad (6.13)$$

Στη σχέση 6.13, η γωνία φ (= φ<sub>1</sub> + φ<sub>2</sub>) υπολογίζεται από τις συντεταγμένες των γνωστών σημείων A, B και Γ ως διαφορά των γωνιών διεύθυνσης α<sub>BΓ</sub> και α<sub>BA</sub>, οπότε η γωνία κ είναι γνωστή. Επίσης, από τα τρίγωνα ABM και BGM με εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων προκύπτει

$$D_{BM} = D_{AB} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \alpha}, \quad D_{BM} = D_{B\Gamma} \cdot \frac{\sin(\kappa - \theta)}{\sin \beta} \quad (6.14)$$

Στη συνέχεια εξισώνοντας τα δεξιά μέλη της σχέσης 6.14 έχουμε:



**Σχήμα 6.14** Επίλυση οπισθοτομίας

$$\frac{\sin(\kappa - \theta)}{\sin\theta} = \frac{D_{AB} \cdot \sin\beta}{D_{B\Gamma} \cdot \sin\alpha} = G \quad (6.15)$$

Συνεπώς, δεδομένου ότι η ποσότητα  $G$  είναι γνωστή, αναπτύσσοντας την σχέση 6.15 προκύπτει:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\kappa \cdot \cos\theta - \cos\kappa \cdot \sin\theta}{\sin\theta} = G &\Rightarrow \sin\kappa \cdot \cot\theta - \cos\kappa = G \Rightarrow \\ \Rightarrow \cot\theta &= \frac{G + \cos\kappa}{\sin\kappa}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Με αυτό τον τρόπο, από τις σχέσεις 6.13 και 6.16 υπολογίζονται οι γωνίες  $\theta$  και  $\omega$ , βάσει των οποίων προκύπτουν οι γωνίες  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  ως εξής:

$$\varphi_1 = 200^{\text{grad}} - \beta - \omega, \quad \varphi_2 = 200^{\text{grad}} - \alpha - \theta \quad (6.17)$$

Τέλος, οι συντεταγμένες του σημείου  $M$  υπολογίζονται με τη μέθοδο της εμπροσθοτομίας η οποία μπορεί να εφαρμοσθεί από τα ζεύγη σημείων  $(A, B)$ ,  $(B, \Gamma)$  και  $(A, \Gamma)$  και λαμβάνεται ο μέσος όρος.

- Μέθοδος 2

Αρχικά υπολογίζονται οι συντεταγμένες της θέσης των κέντρων των κύκλων  $O_1$  και  $O_2$  που διέρχονται από τα σημεία  $A, B, M$  και  $B, \Gamma, M$  αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} x_{O_1} &= 0.5 \cdot [x_A + x_B + (y_A - y_B) \cdot \cot\alpha], \\ y_{O_1} &= 0.5 \cdot [y_A + y_B - (x_A - x_B) \cdot \cot\alpha] \\ x_{O_2} &= 0.5 \cdot [x_B + x_\Gamma + (y_B - y_\Gamma) \cdot \cot\beta], \\ y_{O_2} &= 0.5 \cdot [y_B + y_\Gamma - (x_B - x_\Gamma) \cdot \cot\beta] \end{aligned} \quad (6.18)$$

Με γνωστά τα κέντρα των κύκλων  $O_1$  και  $O_2$  υπολογίζεται η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{O_1O_2}$  με εφαρμογή του 2<sup>ου</sup> θεμελιώδους προβλήματος. Τέλος, οι συντεταγμένες του σημείου  $M$  προκύπτουν από τις σχέσεις

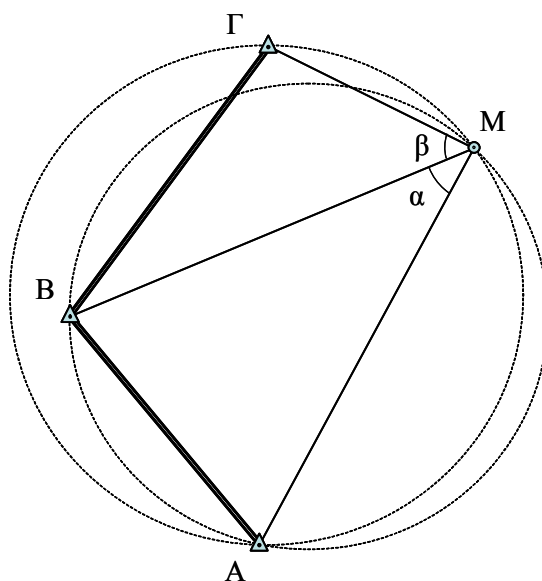
$$\begin{aligned} x_M &= x_B + 2 \cdot \left[ (x_B - x_{O_1}) \cdot \sin \alpha_{O_1O_2} - (y_B - y_{O_1}) \cdot \cos \alpha_{O_1O_2} \right] \cdot \sin \alpha_{O_1O_2} \\ y_M &= y_B + 2 \cdot \left[ (x_B - x_{O_1}) \cdot \sin \alpha_{O_1O_2} - (y_B - y_{O_1}) \cdot \cos \alpha_{O_1O_2} \right] \cdot \cos \alpha_{O_1O_2} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Αυτή η μέθοδος είναι γνωστή ως μέθοδος Cassini και πλεονεκτεί έναντι άλλων μεθόδων γιατί επιλύει το πρόβλημα της οπισθοτομίας και στην ειδική περίπτωση κατά την οποία τα τρία γνωστά σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

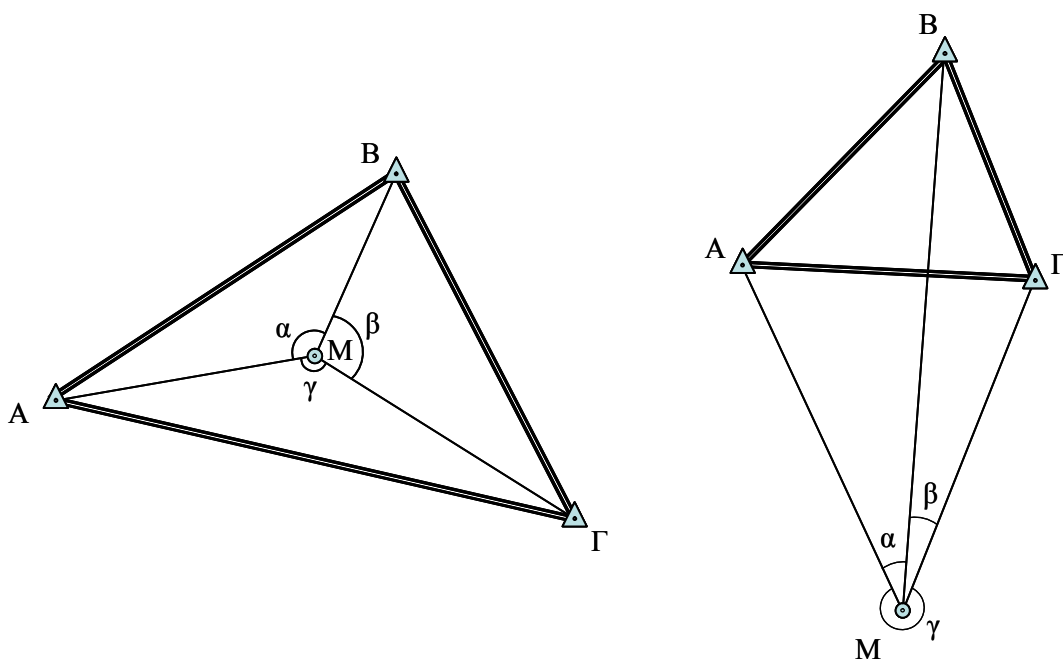
### 6.5.3 Ακρίβεια Οπισθοτομίας

#### 6.5.3α Εκτίμηση ακρίβειας οπισθοτομίας

Όπως επισημάνθηκε στην ενότητα 6.5.1, η μέθοδος της οπισθοτομίας είναι μικρότερης ακρίβειας σε σχέση με αυτή της εμπροσθοτομίας. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι η εφαρμογή της οπισθοτομίας στηρίζεται αποκλειστικά σε μετρήσεις διευθύνσεων από ένα σημείο. Με βάση αυτό το σενάριο παρατήρησης όταν τα τέσσερα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  και  $M$  βρίσκονται στην ίδια περιφέρεια κύκλου (επικίνδυνος κύκλος) το πρόβλημα είναι αόριστο. Στην περίπτωση που τα τέσσερα σημεία βρίσκονται σε παραπλήσιες περιφέρειες, τότε όπως φαίνεται στο σχήμα 6.15, η γεωμετρία που σχηματίζεται στην περιοχή του σημείου  $M$  είναι ιδιαίτερα ασταθής (poorly conditioned) με αποτέλεσμα ο προσδιορισμός του σημείου  $M$  να είναι ανακριβής. Προκειμένου να αποφεύγεται γεωμετρία ανάλογη με αυτή του σχήματος 6.15 και να εξασφαλίζεται ότι τα τέσσερα σημεία δεν σχηματίζουν επικίνδυνο κύκλο θα πρέπει να επιδιώκεται η σχετική θέση των σημείων  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  και  $M$  να είναι όπως αυτή που φαίνεται στο σχήμα 6.16. Ειδικότερα, στην περίπτωση που το σημείο  $M$  βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο που σχηματίζουν τα γνωστά σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ , τότε η λύση που επιτυγχάνεται είναι μεγαλύτερης ακρίβειας. Στην πράξη, συνιστάται να γίνεται η κατάλληλη προεργασία στο γραφείο (αναγνώριση τριγωνομετρικών σημείων σε χάρτη), ώστε να είναι γνωστή εκ των προτέρων η γεωμετρία που σχηματίζεται και ενδεχομένως να τροποποιείται η επιλογή της θέσης του σημείου  $M$ , αν αυτό είναι εφικτό.



Σχήμα 6.15 Περίπτωση ασταθούς γεωμετρίας οπισθοτομίας

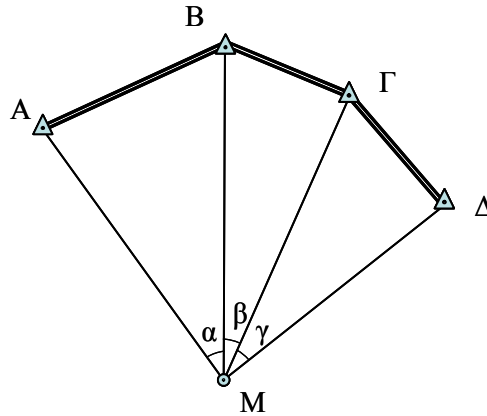


Σχήμα 6.16 Επιδιωκόμενη γεωμετρία απλής οπισθοτομίας

### 6.5.3β Διπλή και πολλαπλή οπισθοτομία

Η δημιουργία μιας επιπλέον οπισθοτομίας (*διπλή οπισθοτομία*) επιβάλλεται από την ανάγκη να εξασφαλισθεί έλεγχος για την ορθότητα υπολογισμού της θέσης του σημείου M. Για το σκοπό αυτό, όπως φαίνεται στο σχήμα 6.17 χρησιμοποιείται (εάν είναι διαθέσιμο) και τέταρτο τριγωνομετρικό σημείο Δ. Με αυτό τον τρόπο ο προσδιορισμός του σημείου M προκύπτει από την επίλυση τριών οπισθοτομιών. Εάν τα αποτελέσματα που προκύπτουν παρουσιάζουν μικρές αποκλίσεις τότε λαμβάνεται ο μέσος όρος. Σε αντίθετη περίπτωση διερευνάται η αιτία της απόκλισης (έλεγχος της ποιότητας των μετρήσεων / υπολογισμών και της

γεωμετρίας των σημείων) και απορρίπτεται η προβληματική λύση. Στην πράξη, λαμβάνεται μέριμνα ώστε να σκοπεύονται όλα τα διαθέσιμα τριγωνομετρικά σημεία στην περιοχή και η τελική λύση προκύπτει με εφαρμογή της μεθόδου ελαχίστων τετραγώνων. Αυτή η μορφή οπισθοτομίας είναι γνωστή ως *πολλαπλή οπισθοτομία*.



Σχήμα 6.17 Διπλή οπισθοτομία

## 6.5.4 Άλλες Μορφές Οπισθοτομίας

### 6.5.4α Πλευρική οπισθοτομία

Κατ' αντιστοιχία με το πρόβλημα της εμπροσθοτομίας, το πρόβλημα της οπισθοτομίας μπορεί να αντιμετωπισθεί με μετρήσεις αποστάσεων αντί γωνιών. Σε αυτή την περίπτωση ο εντοπισμός του σημείου M προκύπτει ως η τομή δύο κύκλων με κέντρα τα γνωστά σημεία A και B και ακτίνες τις οριζόντιες αποστάσεις AM και BM. Το πρόβλημα με αυτή τη μορφή είναι γνωστό ως *πλευρική οπισθοτομία* και η επίλυσή του ισοδυναμεί με επίλυση του προβλήματος πλευρικής εμπροσθοτομίας και αντιμετωπίζεται κατά τα γνωστά. Τονίζεται ότι στην περίπτωση πλευρομετρήσεων θα πρέπει, ανάλογα με το μέγεθος της απόστασης, να επιβάλλονται οι κατάλληλες διορθώσεις και αναγωγές στα μετρημένα μήκη ώστε να προκύψουν οι προβολικές ή οριζόντιες (για μικρά μήκη) αποστάσεις ανάλογα με την περίπτωση.

### 6.5.4β Τρισδιάστατη πλευρική οπισθοτομία

Το πρόβλημα της οπισθοτομίας στο χώρο αποτελεί επέκταση του προβλήματος πλευρικής οπισθοτομίας στο επίπεδο. Σε αυτή την περίπτωση μετρώνται οι αποστάσεις προς τρία γνωστά σημεία A, B και Γ. Η θέση του ζητούμενου σημείου M προκύπτει ως η τομή τριών σφαιρών με ακτίνες  $S_{AM}$ ,  $S_{BM}$ ,  $S_{GM}$  και ισοδυναμεί με επίλυση του συστήματος εξισώσεων

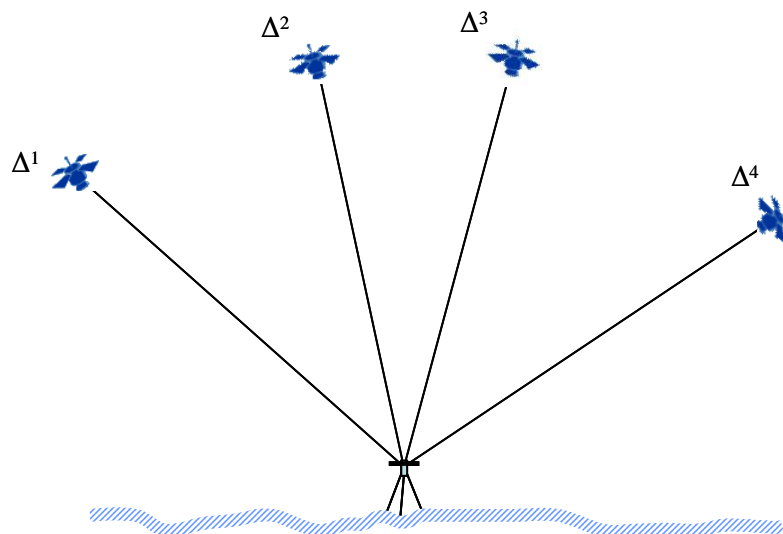
$$\begin{aligned} S_{AM} &= \sqrt{(X_A - X_M)^2 + (Y_A - Y_M)^2 + (Z_A - Z_M)^2} \\ S_{BM} &= \sqrt{(X_B - X_M)^2 + (Y_B - Y_M)^2 + (Z_B - Z_M)^2} \\ S_{GM} &= \sqrt{(X_G - X_M)^2 + (Y_G - Y_M)^2 + (Z_G - Z_M)^2} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Σε αντιστοιχία με την περίπτωση πλευρικής εμπροσθοτομίας και πλευρικής οπισθοτομίας θα πρέπει από τις δύο λύσεις που προκύπτουν να επιλέγεται εκείνη

που συμφωνεί με τη σχετική γεωμετρία του άγνωστου ως προς τα γνωστά σημεία. Η μέθοδος της τρισδιάστατης πλευρικής οπισθοτομίας βρίσκει εφαρμογή στην περίπτωση του δορυφορικού εντοπισμού. Σε αυτή την περίπτωση οι συντεταγμένες (X, Y, Z) αντιστοιχούν στις γεωκεντρικές καρτεσιανές συντεταγμένες του δέκτη και δορυφόρων αντίστοιχα.

### 6.5.5 Ευρύτερο Πεδίο Εφαρμογών Οπισθοτομίας

Παρά την εξάπλωση των δορυφορικών συστημάτων εντοπισμού, η μέθοδος της οπισθοτομίας, αν και περιορισμένα, εξακολουθεί να χρησιμοποιείται κατά περίπτωση σε εργασίες πύκνωσης του τριγωνομετρικού δικτύου. Βασικό πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι δεν απαιτείται μετάβαση στα τριγωνομετρικά σημεία – ωστόσο, απαιτείται η παρουσία και αναγνώριση τουλάχιστον τριών τριγωνομετρικών σημείων, ενώ παράλληλα ο εντοπισμός του σημείου στάσης προκύπτει με μειωμένη ακρίβεια. Σε άλλα πεδία εφαρμογών, η μέθοδος υλοποιείται κυρίως με τη βοήθεια μετρήσεων αποστάσεων προς γνωστά σημεία (πλευρική οπισθοτομία). Αυτό συμβαίνει αφενός, γιατί τα όργανα και οι τεχνικές μέτρησης αποστάσεων έχουν εξελιχθεί και αφετέρου, γιατί σε αντίθεση με τη μέθοδο της απλής οπισθοτομίας η ακρίβεια εντοπισμού του ζητούμενου σημείου μπορεί να προεκτιμηθεί ευκολότερα από τη γεωμετρία που σχηματίζουν οι μετρημένες αποστάσεις (οι γωνίες τομής τους) από άγνωστο προς τα γνωστά σημεία.



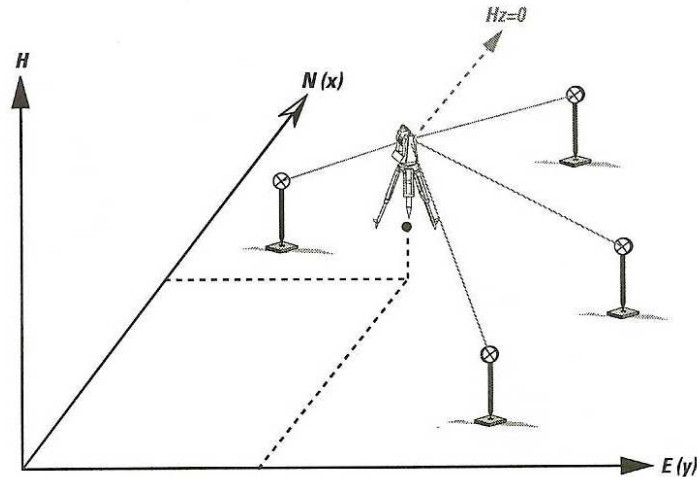
Σχήμα 6.18 Απόλυτος εντοπισμός με το σύστημα GPS

Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής της μεθόδου πλευρικής τρισδιάστατης οπισθοτομίας αποτελεί ο προσδιορισμός της θέσης σημείου με τη μέθοδο του απόλυτου εντοπισμού του συστήματος GPS.

Ένα άλλο παράδειγμα εφαρμογής της οπισθοτομίας αποτελεί η τεχνική της “επιλογής ελεύθερης στάσης” (free-station surveys). Ιδιαίτερα στην περίπτωση κατασκευής τεχνικών έργων είναι απαραίτητη η λήψη μετρήσεων από διαφορετικά σημεία στην περιοχή ενός έργου, οι θέσεις των οποίων καθορίζονται ανάλογα με τις ανάγκες και την πρόοδο του έργου. Έτσι, αν στο χώρο του εργοταξίου έχουν εγκατασταθεί σε καθορισμένες θέσεις ένας αριθμός βασικών σημείων αναφοράς, τότε είναι δυνατόν να προσδιορισθούν οι συντεταγμένες (x, y)



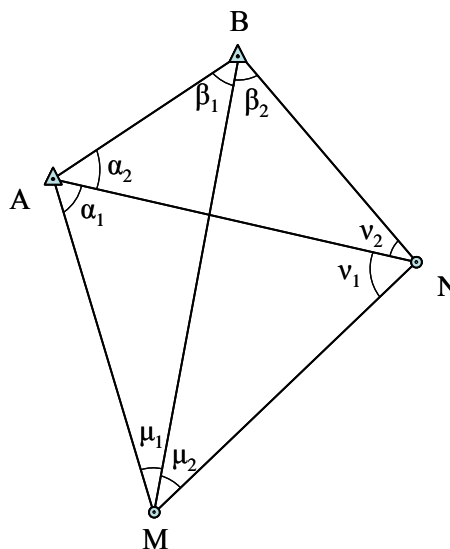
της στάσης οργάνου σε οποιοδήποτε σημείο αρκεί να εξασφαλίζεται ορατότητα προς τουλάχιστον δύο σημεία αναφοράς (σχ. 6.19). Για τον προσδιορισμό του σημείου στάσης είναι δυνατό να συμμετέχουν ταυτόχρονα μετρήσεις διευθύνσεων και αποστάσεων. Στην περίπτωση λήψης περισσότερων μετρήσεων από τις αναγκαίες οι συντεταγμένες του σημείου στάσης υπολογίζονται με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.



Σχήμα 6.19 Μέθοδος ελεύθερης επιλογής στάσης [13]

## 6.6 ΜΕΘΟΔΟΣ HANSEN

Με τη μέθοδο HANSEN επιτυγχάνεται ο προσδιορισμός της θέσης δύο σημείων  $M$  ( $x_M, y_M$ ) και  $N(x_N, y_N)$  με τη βοήθεια γωνιομετρήσεων από αυτά προς δύο τριγωνομετρικά σημεία  $A$  ( $x_A, y_A$ ) και  $B(x_B, y_B)$  (σχ. 6.20). Δεδομένου ότι η μέθοδος στηρίζεται αποκλειστικά σε μετρήσεις διευθύνσεων χαρακτηρίζεται από μειωμένη ακρίβεια και η εφαρμογή της συνίσταται σε εξαιρετικές μόνο περιπτώσεις. Σήμερα, με την χρήση σύγχρονων γεωδαιτικών σταθμών, καθώς και την εξάπλωση των δορυφορικών μεθόδων εντοπισμού η μέθοδος τείνει να εξαλειφθεί.



Σχήμα 6.20 Μέθοδος HANSEN

Η επίλυση του προβλήματος HANSEN ανάγεται στον υπολογισμό της θέσης των σημείων M και N από τα σημεία A και B με εμπροσθοτομίες. Για το σκοπό αυτό απαιτείται ο υπολογισμός των γωνιών  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  και  $\beta_2$ . Ένας τρόπος υπολογισμού αυτών των γωνιών προκύπτει με επίλυση του συστήματος εξισώσεων που δημιουργείται από τις συνθήκες των γωνιών στο σχήμα 6.20.

$$\alpha_1 + \mu_1 = \beta_2 + \nu_2$$

$$\alpha_2 + \beta_1 = \mu_2 + \nu_1$$

(6.21)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \nu_1 + \nu_2 + \mu_1 + \mu_2 = 400^{\text{grad}}$$

$$\frac{\sin\mu_2 \cdot \sin\nu_2 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\alpha_1}{\sin\mu_1 \cdot \sin\nu_1 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\alpha_1} = 1$$

Ο υπολογισμός του προβλήματος HANSEN απλοποιείται εάν έχει μετρηθεί η βάση  $D_{MN}$ . Τότε, από την επίλυση των τριγώνων AMN και BMN υπολογίζονται οι αποστάσεις AM, BM και AN, BN οπότε το πρόβλημα ανάγεται αυτομάτως σε πρόβλημα εμπροσθοτομίας από τα τριγωνομετρικά σημεία A και B. Σε αυτή την περίπτωση η ακρίβεια της μεθόδου είναι καλύτερη.

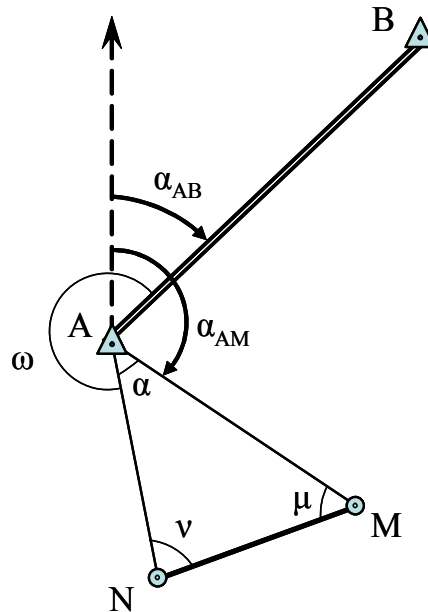
## 6.7 ΚΑΤΑΒΙΒΑΣΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Σε αρκετές περιπτώσεις οι ανάγκες μιας τοπογραφικής εργασίας υπαγορεύουν την ίδρυση τριγωνομετρικών ή πολυγωνικών σημείων σε δώματα υψηλών κτηρίων ή άλλα τεχνικά έργα. Τα σημεία αυτά εγκαθίστανται συνήθως σε πυκνοδομημένες περιοχές με στόχο την πύκνωση του τριγωνομετρικού δικτύου. Στην περίπτωση εφαρμογής συμβατικών γεωδαιτικών μεθόδων η ίδρυσή τους υπαγορεύεται από την ανάγκη οπτικής επαφής με άλλα τριγωνομετρικά σημεία στην περιοχή, ενώ σε περίπτωση εφαρμογής δορυφορικών μεθόδων εντοπισμού καλύπτουν την ανάγκη για “ανοικτό ορίζοντα” προς τον δορυφορικό σχηματισμό. Τα τριγωνομετρικά ή πολυγωνικά σημεία αυτής της κατηγορίας είναι προσιτά σημεία - δηλαδή, υπάρχει η δυνατότητα λήψης μετρήσεων από αυτά. Αντίστοιχα, υπάρχουν τριγωνομετρικά σημεία τα οποία έχουν ιδρυθεί σε χαρακτηριστικές θέσεις υψηλών κατασκευών (σταυροί εκκλησιών, αλεξικέραυνα, φάροι, κ.ά.) τα οποία είναι απρόσιτα. Το πρόβλημα που τίθεται και στις δύο περιπτώσεις είναι η μεταφορά (καταβίβασμός) υπερυψωμένων τριγωνομετρικών σημείων από τη θέση που βρίσκονται στο έδαφος με σκοπό την εξάρτηση τοπογραφικών εργασιών από το τριγωνομετρικό δίκτυο.

### 6.7.1 Καταβίβασμός Προσιτού Σημείου

Η μεταφορά της θέσης ενός προσιτού τριγωνομετρικού σημείου A ( $x_A, y_A$ ) με ορατότητα προς άλλο τριγωνομετρικό σημείο B ( $x_B, y_B$ ) από το δώμα ενός κτηρίου σε ένα σημείο στο έδαφος M ( $x_M, y_M$ ), μπορεί να επιτευχθεί με τη δημιουργία βοηθητικού τριγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα 6.21. Για το σκοπό αυτό εκλέγεται βοηθητικό σημείο N ( $x_N, y_N$ ), ούτως ώστε το τρίγωνο AMN να είναι κατά το δυνατόν ισοσκελές - ισόπλευρο. Από τα σημεία M και N μετρώνται οι οριζόντιες

γωνίες  $\mu$  και  $\nu$ , καθώς και η οριζόντια απόσταση  $D_{MN}$ . Επίσης, από το σημείο A μετρώνται οι οριζόντιες γωνίες  $\alpha$  και  $\omega$ . Στη φάση επίλυσης του προβλήματος οι μετρημένες γωνίες  $\mu$ ,  $\nu$  και  $\alpha$  διορθώνονται βάσει της σχέσης



Σχήμα 6.21 Καταβιβασμός προσιτού τριγωνομετρικού σημείου

$$200^{\text{grad}} - (\mu + \nu + \alpha) = \varepsilon \quad (6.22)$$

οπότε:

$$\mu' = \mu - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \nu' = \nu - \frac{\varepsilon}{3}, \quad \alpha' = \alpha - \frac{\varepsilon}{3} \quad (6.23)$$

Η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  υπολογίζεται με εφαρμογή του 2<sup>ου</sup> θεμελιώδους προβλήματος στις συντεταγμένες των τριγωνομετρικών σημείων A και B, οπότε οι γωνίες διεύθυνσης  $\alpha_{AM}$  και  $\alpha_{AN}$  είναι:

$$\alpha_{AM} = \alpha_{AB} + 400 - (\alpha' + \omega), \quad \alpha_{AN} = \alpha_{AB} + 400 - \omega \quad (6.24)$$

Επίσης, με εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων στο τρίγωνο AMN προκύπτει:

$$D_{AM} = D_{MN} \cdot \frac{\sin \nu'}{\sin \alpha'}, \quad D_{AN} = D_{MN} \cdot \frac{\sin \mu'}{\sin \alpha'} \quad (6.25)$$

Τέλος, οι συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου M και του βοηθητικού σημείου N υπολογίζονται με εφαρμογή του 1<sup>ου</sup> θεμελιώδους προβλήματος από το σημείο A:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + D_{AM} \cdot \sin \alpha_{AM}, & y_M &= y_A + D_{AM} \cdot \cos \alpha_{AM} \\ x_N &= x_A + D_{AN} \cdot \sin \alpha_{AN}, & y_N &= y_A + D_{AN} \cdot \cos \alpha_{AN} \end{aligned} \quad (6.26)$$

### 6.7.2 Καταβιβασμός Απρόσιτου Σημείου

Η μεταφορά της θέσης υπερυψωμένου, απρόσιτου τριγωνομετρικού σημείου A ( $x_A, y_A$ ) σε σημείο M ( $x_M, y_M$ ) στο έδαφος προϋποθέτει την ύπαρξη δεύτερου

τριγωνομετρικού σημείου B ( $x_B, y_B$ ) ορατού από τα A και M όπως φαίνεται στο σχήμα 6.22. Για την αντιμετώπιση του προβλήματος επιλέγεται βοηθητικό σημείο N ( $x_N, y_N$ ) και μετράται το οριζόντιο μήκος  $D_{MN}$ . Από τα σημεία M και N μετρώνται οι γωνίες  $\mu$ ,  $\omega$  και  $\nu$  αντίστοιχα. Στη φάση επίλυσης του προβλήματος, με γνωστές τις συντεταγμένες των σημείων A και B υπολογίζονται η απόσταση  $D_{AB}$  στο προβολικό επίπεδο και η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  με εφαρμογή του Πυθαγόρειου και 2<sup>ου</sup> θεμελιώδους προβλήματος αντίστοιχα. Επίσης, με εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων στα τρίγωνα ABM και AMN υπολογίζεται η γωνία  $\beta$  ως εξής:

$$D_{AM} = D_{MN} \cdot \frac{\sin \nu}{\sin(\mu + \nu)}, \quad D_{AN} = D_{MN} \cdot \frac{\sin \mu}{\sin(\mu + \nu)} \quad (6.27)$$

$$\sin \beta = \frac{D_{AM}}{D_{AB}} \cdot \sin \omega \quad (6.28)$$

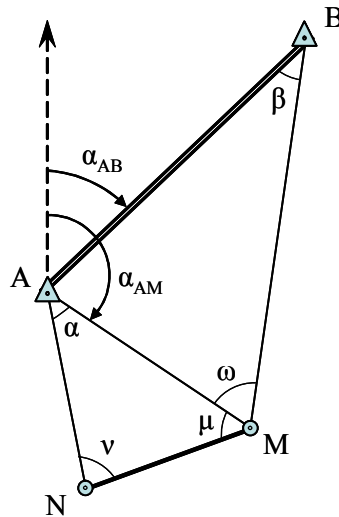
Με υπολογισμένη τη γωνία  $\beta$ , οι γωνίες διεύθυνσης  $\alpha_{AM}$  και  $\alpha_{AN}$  είναι

$$\alpha_{AM} = \alpha_{AB} + 200^{\text{grad}} - (\beta + \omega) \quad (6.29)$$

$$\alpha_{AN} = \alpha_{AB} + 200^{\text{grad}} - (\beta + \omega) + 200^{\text{grad}} - (\mu + \nu)$$

Τέλος, οι συντεταγμένες του ζητούμενου σημείου M και του βοηθητικού σημείου N υπολογίζονται με εφαρμογή του 1<sup>ου</sup> θεμελιώδους προβλήματος στο σημείο A ως εξής:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + D_{AM} \cdot \sin \alpha_{AM}, & y_M &= y_A + D_{AM} \cdot \cos \alpha_{AM} \\ x_N &= x_A + D_{AN} \cdot \sin \alpha_{AN}, & y_N &= y_A + D_{AN} \cdot \cos \alpha_{AN} \end{aligned} \quad (6.30)$$



**Σχήμα 6.22** Καταβιβασμός απρόσιτου τριγωνομετρικού σημείου

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

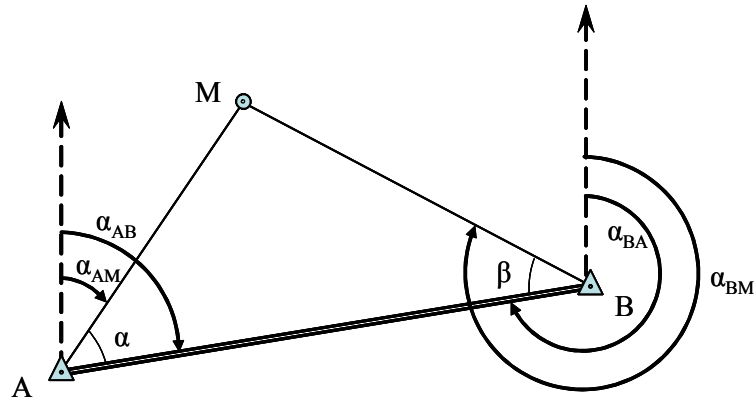
- Στο σχήμα που ακολουθεί, οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι γνωστές στην προβολή του ΕΓΣΑ'87.

$$X_A = 485010.18\text{m}, \quad Y_A = 4152300.38\text{m}, \quad X_B = 485301.44\text{m}, \quad Y_B = 4152333.33\text{m}$$

Ζητείται να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ με την μέθοδο της εμπροσθοτομίας όταν έχουν μετρηθεί:

(α) οι γωνίες  $\alpha = 49.2215^\circ$  και  $\beta = 58.5205^\circ$

(β) οι αποστάσεις  $D_{BM} = 234.80\text{m}$  και  $D_{AM} = 206.24\text{m}$



### Λύση

(α) επίλυση με μετρημένες τις γωνίες

Η απόσταση  $D_{AB}$  στο προβολικό επίπεδο υπολογίζεται με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος και η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  με εφαρμογή του 2ου θεμελιώδους προβλήματος ως εξής:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \Rightarrow D_{AB} = 293.12\text{m}$$

$$\alpha_{AB} = \text{atan}\left(\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right) \Rightarrow \alpha_{AB} = 92.8285^\circ$$

Οι αποστάσεις  $D_{AM}$  και  $D_{BM}$  υπολογίζονται με εφαρμογή του νόμου των ημιτόνων:

$$D_{AM} = D_{AB} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow D_{AM} = 234.80\text{m}$$

$$D_{BM} = D_{AB} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \Rightarrow D_{BM} = 206.24\text{m}$$

Οι γωνίες διεύθυνσης  $\alpha_{AM}$  και  $\alpha_{BM}$  υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$\alpha_{AM} = \alpha_{AB} - \alpha \Rightarrow \alpha_{AM} = 43.6070^\circ \quad \alpha_{BM} = \alpha_{BA} + \beta \Rightarrow \alpha_{BM} = 351.3490^\circ$$

Οι συντεταγμένες του σημείου M προκύπτουν με εφαρμογή του 1ου θεμελιώδους προβλήματος από τα σημεία A και B:

$$x_{M(A)} = x_A + D_{AM} \cdot \sin \alpha_{AM} \Rightarrow x_{M(A)} = 485158.728\text{m}$$

$$y_{M(A)} = y_A + D_{AM} \cdot \cos \alpha_{AM} \Rightarrow y_{M(A)} = 4152482.217\text{m}$$

$$x_{M(B)} = x_B + D_{BM} \cdot \sin \alpha_{BM} \Rightarrow x_{M(B)} = 485158.729\text{m}$$

$$y_{M(B)} = y_B + D_{BM} \cdot \cos \alpha_{BM} \Rightarrow y_{M(B)} = 4152482.221\text{m}$$

Τέλος, οι συντεταγμένες του σημείου M υπολογίζονται από τις σχέσεις:

$$x_M = \frac{x_{M(A)} + x_{M(B)}}{2} \Rightarrow x_M = 485158.73\text{m} \quad y_M = \frac{y_{M(A)} + y_{M(B)}}{2} \Rightarrow y_M = 4152482.22\text{m}$$

(β) επίλυση με μετρημένες τις πλευρές

Αρχικά υπολογίζεται η απόσταση  $D_{AB}$  στο προβολικό επίπεδο και η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{AB}$  με εφαρμογή του όπως στην περίπτωση (α):

$$D_{AB} = 293.12\text{m}, \quad \alpha_{AB} = 92.8285^\circ$$

Με εφαρμογή του νόμου των συνημίτονων υπολογίζονται οι οριζόντιες γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  ως εξής:

$$\cos \alpha = \frac{D_{AB}^2 + D_{AM}^2 - D_{BM}^2}{2 \cdot D_{AB} \cdot D_{AM}} \Rightarrow \alpha = 49.2215^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{D_{AB}^2 + D_{BM}^2 - D_{AM}^2}{2 \cdot D_{AB} \cdot D_{BM}} \Rightarrow \beta = 58.5205^\circ$$

Με υπολογισμένες τις γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  το πρόβλημα ανάγεται στην περίπτωση (α).

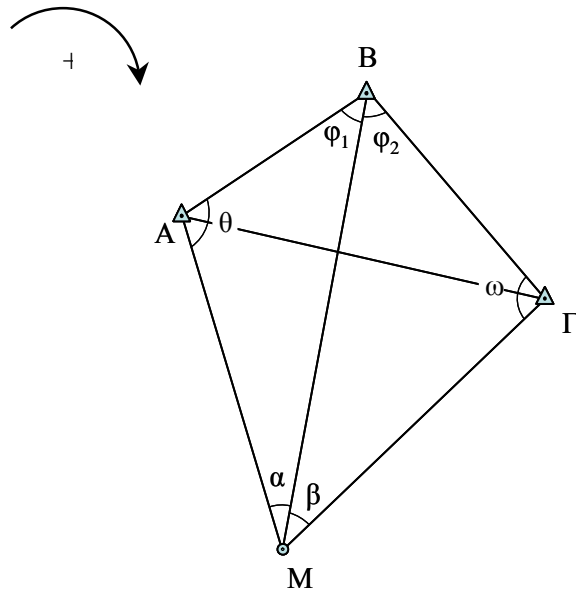
- Οι συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ στη προβολή του ΕΓΣΑ'87 είναι:

$$(X_A, Y_A) = (481234.96\text{m}, 4117594.48\text{m})$$

$$(X_B, Y_B) = (487994.42\text{m}, 4124343.45\text{m})$$

$$(X_\Gamma, Y_\Gamma) = (497913.83\text{m}, 4121364.73\text{m})$$

Από το σημείο M μετρήθηκαν οι οριζόντιες γωνίες  $\alpha$  και  $\beta$  όπως φαίνεται στο σχήμα για τις οποίες προέκυψαν τελικές τιμές  $\alpha=68.5514^\circ$  και  $\beta=82.4994^\circ$ . Ζητείται να υπολογιστούν οι συντεταγμένες του σημείου M με την μέθοδο της οπισθοτομίας με δύο τρόπους.



### Λύση

(α) τρόπος 1

Από τις συντεταγμένες των σημείων A, B και Γ υπολογίζονται διαδοχικά:

$$D_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2} \Rightarrow D_{AB} = 9551.91\text{m}$$

$$\alpha_{AB} = \text{atan}\left(\frac{X_B - X_A}{Y_B - Y_A}\right) \Rightarrow \alpha_{AB} = 50.0494^\circ$$

$$D_{B\Gamma} = \sqrt{(X_\Gamma - X_B)^2 + (Y_\Gamma - Y_B)^2} \Rightarrow D_{B\Gamma} = 10357.00\text{m}$$

$$\alpha_{B\Gamma} = \text{atan}\left(\frac{X_\Gamma - X_B}{Y_\Gamma - Y_B}\right) \Rightarrow \alpha_{B\Gamma} = 118.5718^\circ$$

οπότε, η γωνία  $\widehat{GBA} = \varphi$  είναι:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \alpha_{BA} - \alpha_{B\Gamma} \Rightarrow \varphi = 200.3665^\circ$$

Στο τετράπλευρο ABΓM ισχύει η σχέση:

$$\omega = (400^{\text{grad}} - \alpha - \beta - \varphi) - \theta = \kappa - \theta \Rightarrow \omega = \kappa - \theta = 117.4715^\circ$$

Η γωνία  $\theta$  προκύπτει από τον συνδυασμό της προηγούμενης σχέσης με τις σχέσεις 6.15 και 6.16 ως εξής:

$$\Rightarrow \cot\theta = \frac{D_{AB} \cdot \sin\beta}{D_{B\Gamma} \cdot \sin\alpha} + \cos(\omega + \theta) \Rightarrow \theta = 58.3939^\circ$$

οπότε οι γωνίες  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  υπολογίζονται ως εξής:

$$\varphi_1 = 200^\circ - \beta - \omega \Rightarrow \varphi_1 = 58.4230^\circ, \quad \varphi_2 = 200^\circ - \alpha - \theta \Rightarrow \varphi_2 = 176.9948^\circ$$

Τέλος, οι συντεταγμένες του σημείου M υπολογίζονται με τη μέθοδο της εμπροσθοτομίας η οποία μπορεί να εφαρμοσθεί από τα ζεύγη σημείων (A, B),

(B, Γ) και (A, Γ) και λαμβάνεται ο μέσος όρος. Με αυτό τον τρόπο οι συντεταγμένες του σημείου M προκύπτουν:

$$X_M = 491039.67\text{m}, \quad Y_M = 4116286.43\text{m}$$

(β) τρόπος 2

Αρχικά υπολογίζονται οι συντεταγμένες της θέσης των κέντρων των κύκλων  $O_1$  και  $O_2$  που διέρχονται από τα σημεία A, B, M και B, Γ, M αντίστοιχα:

$$x_{O_1} = 0.5 \cdot [x_A + x_B + (y_A - y_B) \cdot \cot\alpha] \Rightarrow x_{O_1} = 482797.43\text{m}$$

$$y_{O_1} = 0.5 \cdot [y_A + y_B - (x_A - x_B) \cdot \cot\alpha] \Rightarrow y_{O_1} = 4119148.88\text{m}$$

$$x_{O_2} = 0.5 \cdot [x_B + x_\Gamma + (y_B - y_\Gamma) \cdot \cot\beta] \Rightarrow x_{O_2} = 411374.18\text{m}$$

$$y_{O_2} = 0.5 \cdot [y_B + y_\Gamma - (x_B - x_\Gamma) \cdot \cot\beta] \Rightarrow y_{O_2} = 4121455.26\text{m}$$

Με γνωστά τα κέντρα των κύκλων  $O_1$  και  $O_2$  υπολογίζεται η γωνία διεύθυνσης  $\alpha_{O_1O_2}$  με εφαρμογή του 2ου θεμελιώδους προβλήματος. Τέλος, οι συντεταγμένες του σημείου M προκύπτουν από τις σχέσεις:

$$x_M = x_B + 2 \cdot [(x_B - x_{O_1}) \cdot \sin\alpha_{O_1O_2} - (y_B - y_{O_1}) \cdot \cos\alpha_{O_1O_2}] \cdot \sin\alpha_{O_1O_2} \Rightarrow$$

$$x_M = 491039.65\text{m}$$

$$y_M = y_B + 2 \cdot [(x_B - x_{O_1}) \cdot \sin\alpha_{O_1O_2} - (y_B - y_{O_1}) \cdot \cos\alpha_{O_1O_2}] \cdot \cos\alpha_{O_1O_2} \Rightarrow$$

$$y_M = 4116286.45\text{m}$$

## 6.8 ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συντεταγμένες των τριγωνομετρικών σημείων A και B στην προβολή του ΕΓΣΑ'87.

$$X_A = 486253.02\text{m}, \quad Y_A = 4152450.40\text{m}, \quad X_B = 485997.94\text{m}, \quad Y_B = 4152306.00\text{m}$$

Ζητείται να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του σημείου Γ με την μέθοδο της εμπροσθοτομίας όταν έχουν μετρηθεί:

(α) οι γωνίες  $AB\Gamma = 46.7443^\circ$  και  $\Gamma AB = 62.8765^\circ$

(β) οι αποστάσεις  $D_{B\Gamma} = 247.50\text{m}$  και  $D_{A\Gamma} = 198.66\text{m}$

(απάντηση:  $X_\Gamma = 486239.52\text{m}$ ,  $Y_\Gamma = 4152252.20\text{m}$ )

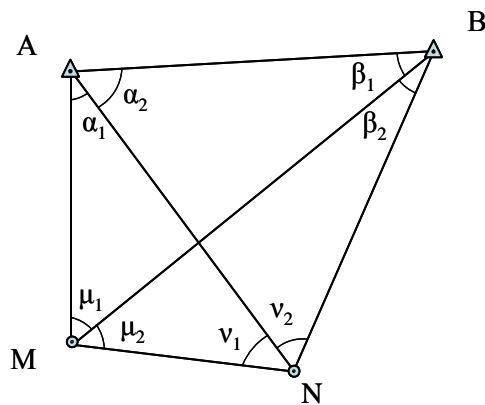
2. Για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων δύο σημείων M και N έγιναν οι ακόλουθες μετρήσεις οριζοντίων γωνιών προς τα σημεία A και B ως εξής:

$$\mu_1 = 72.7549^\circ, \quad \mu_2 = 41.2214^\circ, \quad \nu_1 = 37.1950^\circ, \quad \nu_2 = 70.8310^\circ$$

$$A (X_A = 11.016.20\text{m}, Y_A = 10050.54\text{m}), \quad B (X_B = 10854.58\text{m}, Y_B = 11316.54\text{m})$$

Ζητούνται οι συντεταγμένες των σημείων M και N.



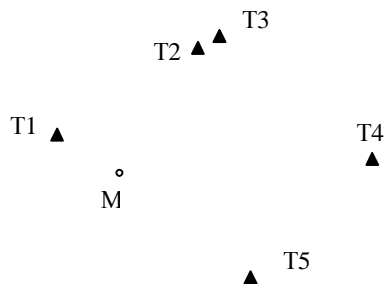


(απάντηση:  $X_M = 11773.19m$ ,  $Y_M = 10283.94m$  και  
 $X_M = 11694.00m$ ,  $Y_M = 11277.45m$ )

3. Δώστε συνοπτικούς και σαφείς ορισμούς για τις εξής έννοιες: (α) τριγωνισμός, (β) τριγωνομετρικό σημείο, (γ) τριγωνομετρικό δίκτυο, (δ) τριπλευρικό δίκτυο, (ε) εξάρτηση σημείου από τριγωνομετρικό δίκτυο και (στ) πύκνωση τριγωνομετρικού δικτύου.

4. Η εφαρμογή της μεθόδου της απλής εμπροσθοτομίας για τον οριζοντιογραφικό προσδιορισμό της θέσης ενός τυχαίου σημείου M μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Ποια στοιχεία πρέπει να είναι γνωστά και ποιες μετρήσεις πρέπει να λαμβάνονται σε κάθε περίπτωση; Πως ερμηνεύεται γεωμετρικά η θέση του σημείου M για κάθε τρόπο;

5. Στην περιοχή του σχήματος υπάρχουν πέντε τριγωνομετρικά σημεία. Ζητείται να υποδείξετε δύο μεθόδους με τις οποίες μπορεί να ενταχθεί το σημείο M στο τριγωνομετρικό δίκτυο της περιοχής. Αιτιολογήστε την απάντησή σας για κάθε μέθοδο υποδεικνύοντας ποια τριγωνομετρικά σημεία θα χρησιμοποιούσατε.



6. Αναφορικά με την μέθοδο της οπισθοτομίας να απαντήσετε στα επόμενα:

(α) Δώστε την γεωμετρική ερμηνεία της μεθόδου απλής οπισθοτομίας.

(β) Τι εννοούμε με τον όρο “επικίνδυνος κύκλος”; Δώστε με σκαρίφημα τη σχετική θέση τριών γνωστών σημείων και ενός άγνωστου σημείου M, έτσι ώστε ο εντοπισμός του σημείου M από τα τρία γνωστά σημεία να αποκλείει την περίπτωση εμφάνισης επικίνδυνου κύκλου.

7. Ποιος είναι ο βασικός λόγος για τον οποίο η μέθοδος της οπισθοτομίας παρέχει μικρότερη ακρίβεια σε σχέση με την μέθοδο της εμπροσθοτομίας;

## ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Βέης Γ., Μπυλλήρης Χ., Παπαζήση Κ. (2007) «Κεφάλαια ανώτερης γεωδαισίας». Εκδ. Ε.Μ.Πολυτεχνείου.
- Βλάχος Δ. Γ. (1979) «Μαθήματα τοπογραφίας, τόμοι Α και Β» Εκδ. Γιαχούδη–Γιαπούλη Ο.Ε.
- Γεωργόπουλος Γ. (2007) «Μαθήματα Τοπογραφίας», Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη.
- Δερμάνης Α. (1999) «Συνορθώσεις παρατηρήσεων και θεωρία εκτίμησης». Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Δερμάνης Α., Ρωσικόπουλος Δ., Φωτίου Α. (1994) Τοπογραφικοί Υπολογισμοί και Συνορθώσεις Δικτύων, Εκδόσεις Ζήτη.
- Λάμπρου Ε., Πανταζής Γ. (2010) «Εφαρμοσμένη Γεωδαισία», Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Λιβιεράτος Ε., Φωτίου Α. (1993) Ελλειψοειδής Γεωδαισία & Γεωδαιτικά Δίκτυα, 2<sup>η</sup> έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη.
- Μήλας Π., Μπυλλήρης Χ. (2002) «Ανώτερη Γεωδαισία – Υψομετρικά Συστήματα Αναφοράς (συμπληρωματικές σημειώσεις)», Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας, Τομέας Τοπογραφίας, Σ.Α.Τ.Μ. Ε.Μ.Π
- Μπαλοδήμος Δ.-Δ., Σταθάς Δ. (1993) «Γεωδαιτικά όργανα και μέθοδοι μέτρησης γωνιών και μηκών» Εκδ. Ε. Μ. Πολυτεχνείου.
- Μπαλοδήμος Δ. -Δ., Αραμπατζή Ο. (2004) «Υψομετρία», Διδακτικές σημειώσεις, Εργαστήριο Γ. Γεωδαισίας, Τομέας Τοπογραφίας, Σ.Α.Τ.Μ. Ε.Μ.Π.
- Μπαλοδήμος Δ. Δ., Σταθάς Δ., Αραμπατζή Ο. (2000) Δίκτυα – Αποτυπώσεις – Χαράξεις, Ε Μ Πολυτεχνείο, ΣΑΤΜ, Εργαστήριο Γενικής Γεωδαισίας.
- Μπαντέλας Α. Γ., Σαββαΐδης Π. Δ., Υφαντής Ι. Μ., Δούκας Ι. Δ. (1999) Γεωδαισία: Γεωδαιτικά Όργανα και Μέθοδοι Μέτρησης και Υπολογισμών, Τόμος Ι, Εκδόσεις Κυριακίδη.
- Μπαντέλας Α. Γ., Σαββαΐδης Π. Δ., Υφαντής Ι. Μ., Δούκας Ι. Δ. (2000) Γεωδαισία: Αποτυπώσεις – Χαράξεις Τεχνικών Έργων, Τόμος ΙΙ, Εκδόσεις Κυριακίδη.
- Ο.Κ.Χ.Ε. (1987). «Το ελληνικό γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς»
- Παρδάλης Ν. (1987) «Μαθήματα γεωδαισίας κλασσικής – ηλεκτρονικής τόμοι Ι και ΙΙ» Εκδ. Συμμετρία.
- Ρωσικόπουλος Δ. (1999) «Τοπογραφικά Δίκτυα και Υπολογισμοί», Β έκδοση, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη
- Σαββαΐδης Π. Δ. (ETOS) «Ο θεοδόλιχος ως εξέλιξη των μαθηματικών οργάνων για την εκτέλεση γεωδαιτικών μετρήσεων» Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών, Α.Π.Θ.
- Torge W. (2000) «Γεωδαισία» Ελληνική Μετάφραση, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Ε.Μ.Π

Φωτίου Α., Λιβιεράτος Ε. (2000) «Γεωμετρική γεωδαισία και δίκτυα», Εκδ. Ζήτη Θεσσαλονίκη.

Φωτίου Α, Πικριδάς Χ (2006) «GPS και Γεωδαιτικές εφαρμογές». Θεσσαλονίκη, Εκδόσεις Ζήτη.

## **ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

Anderson J. M., Mikhail E. M. (1998) «Surveying Theory and Practice» 7<sup>th</sup> edition, McGraw – Hill Co, Inc.

Banister A., Raymond S., Baker R. (1998) «Surveying» 7<sup>th</sup> edition, Longman, Ltd.

Bock Y. (1996) «Reference systems». In: GPS for Geodesy- Lecture Notes in Earth Sciences Series. Springer Berlin.

Chrzanowski A. (1977) «Design and error analysis of surveying projects», Selected papers and lecture notes (No 47)» Univ. of New Brunswick Fredericton N. B. Canada.

Crawford W. G., (2003) «Construction Surveying and Layout» Creative Construction Publishing.

Ghilani C.D. and Wolf P.R. (2006) «Adjustment computations: spatial data analysis». 4<sup>th</sup> Edt., John Wiley & Sons Inc.

Harvey, BR (1994) «Practical Least Squares and Statistics for Surveyors». Monograph 13, School of Geomatic Engineering (formerly Surveying), The University of New South Wales, 2nd Ed., 319pp.

Hofmann-Wellenhof B, Lichtenegger H & Collins J (1998) «GPS: Theory & Practice». Springer-Verlag, Vienna New York, 4<sup>th</sup> ed.

Johnson A (2004) «Plane and Geodetic Surveying», Taylor & Francis Group.

Kahmen H., Faig W. (1988) «Surveying», de Gruyter, Berlin, NY.

Kaplan E (Ed.) (1996) «Understanding GPS: Principles & Applications». Artech House Publishers, Boston London, 554pp.

Kavanagh B. F., Glenn Bird S. J. (1996) «Surveying principles and applications», 4<sup>th</sup> edition. Prentice-Hall, Inc.

Kissam P. (1981) «Surveying for civil engineers», 2<sup>nd</sup> edition. McGraw-Hill, Inc.

Kotsakis C., Katsambalos K., Gianniou M. (2008) «Evaluation of EGM08 based on GPS and orthometric heights over the Hellenic mainland. Report IAG/IGFS, Joint Working Group “Evaluation of Global Earth Gravity Models”, November.

Lauf G.B. (1983) «Geodesy and map projections». Royal Melbourne Institute of Technology. Craftsman Press.

Leick A (1995) «GPS Satellite Surveying». J Wiley & Sons, New York, 2<sup>nd</sup> Edition.

Mikhail E.M. and Gracie W.G. (1981) «Analysis and adjustment of survey measurements». Van Nostrand-Reinhold.

McCormac J. (1995) «Surveying», 3<sup>rd</sup> edition, Prentice-Hall, Inc.

Moffit F. H., Bouchard H. (1997) «Surveying» 10<sup>th</sup> edition. Crowell Co.

- Moffit Fr., Bossler J. (1998) «Surveying», 10<sup>th</sup> edition, Addison- Wesley.
- Navstar (1993) «Global Positioning System Standard Positioning Service signal specification». Dept. of Defense rept., November, 1993, 46pp + appendices.
- Rueger J. M. (1990) «Electronic Distance Measurement» 3<sup>rd</sup> edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Seeber G. (1993) Satellite Geodesy: Foundations, Methods & Applications». Walter de Gruyter, Berlin New York, 531pp.
- Schofield W. (1993) «Engineering surveying Theory and examination problems for students», 4<sup>th</sup> edition, Laxton's.
- Schofield W. (2001) «Engineering Surveying», 5<sup>th</sup> edition, Elsevier.
- Schofield W, Breach M. (2007) «Engineering Surveying», 6<sup>th</sup> edition, Elsevier.
- Uren J., Price F. W. (1994). «Surveying for engineers», 3<sup>rd</sup> edition. Macmillan.

## **ΙΣΤΟΤΟΠΟΙ**

- GPS Home Page at U.S. Coast Guard ([www.navcen.uscg.gov/default.htm](http://www.navcen.uscg.gov/default.htm)) (Ιούλιος 2017)
- <http://www.Treecomp.gr> (Ιούλιος 2017)
- <http://www.Leica-geosystems.com> (Ιούλιος 2017)
- <http://www.topcon.gr> (Ιούλιος 2017)
- <http://www.surveying.com> (Ιούλιος 2017)
- <http://www.esa.int/esaNA/galileo.html> (Ιούλιος 2017)
- <http://www.glonass-ianc.rsa.ru/> (Ιούλιος 2017)

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ι

### Ι.1. ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΘΕΟΔΟΛΙΧΟΥ

Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζεται ο τρόπος με τον οποίο μπορεί να ελεγχθεί στο ύπαιθρο κάθε μια από τις συνθήκες λειτουργίας του θεοδόλιχου. Επίσης δίνονται η αντίστοιχη μεθοδολογία αποκατάστασης ή εξάλειψής της και η εκτίμηση του σφάλματος από την μη πλήρωση της. Τέλος για κάθε περίπτωση δίνονται σχετικά παραδείγματα.

#### Ι.1.1 Πρωτεύων άξονας κατακόρυφος

##### Ι.1.1α Έλεγχος

Το όργανο οριζοντιώνεται χονδρικά με την σφαιρική αεροστάθμη. Μετά το κινητό μέρος του οργάνου στρέφεται έτσι ώστε η σωληνωτή αεροστάθμη να είναι παράλληλη με τον άξονα δυο κοχλιών του τρικόχλιου. Σε αυτή τη θέση οριζοντιώνεται με ακρίβεια η σωληνωτή αεροστάθμη. Μετά, το όργανο στρέφεται κατά 100<sup>g</sup> και επαναλαμβάνεται η οριζοντίωση με ακρίβεια της σωληνωτής. Στη συνέχεια το όργανο στρέφεται για έλεγχο κατά 100<sup>g</sup>, αν η φυσαλίδα της σωληνωτής αεροστάθμης παραμείνει στο ίδιο σημείο τότε δεν υπάρχει σφάλμα κατακορυφότητας του (ΠΠ'). Αν μετακινηθεί η φυσαλίδα τότε το σφάλμα στην κατακορυφότητα του (ΠΠ') είναι το μισό της απόκλισης της. Από τις χαραγές της σωληνωτής αεροστάθμης είναι δυνατό να εκτιμηθεί η απόκλιση του (ΠΠ').

##### Ι.1.1β Αποκατάσταση

Η αποκατάσταση μπορεί να γίνει με τους ρυθμιστικούς κοχλίες της σωληνωτής αεροστάθμης. Το μισό του σφάλματος διορθώνεται από το τρικόχλιο και το υπόλοιπο από τους ρυθμιστικούς κοχλίες. Επίσης αποκατάσταση μπορεί να γίνει με εκλογή νέου κανονικού σημείου, το οποίο θα βρίσκεται στο μέσο της απόστασης μεταξύ των κέντρων της φυσαλίδας της σωληνωτής αεροστάθμης κατά την αρχική οριζοντίωση της και την οριζοντίωση της μετά την περιστροφή της περί τον άξονα Π Π' κατά 100<sup>g</sup>.

Στη περίπτωση μη πλήρωσης της συνθήκης κατακορυφότητας του ΠΠ' δεν είναι δυνατό να γίνει εξάλειψη του σφάλματος με κάποια μεθοδολογία μέτρησης κατά τις εργασίες στο ύπαιθρο. Γιαντό τον λόγο πριν την εκτέλεση των γωνιομετρήσεων πρέπει ο ΠΠ' να κατακορυφώνεται με ακρίβεια.

##### Ι.1.1γ Σφάλμα

Από την απόκλιση ( $i_1$ ) του (ΠΠ'), κατά την σκόπευση ενός σημείου με ζενίθια γωνία (Z) στη διεύθυνση (A), προκαλείται σφάλμα και απαιτείται διόρθωση ( $\delta\alpha_1$ ) που δίνεται από την σχέση :

$$\delta\alpha_1 = i_1 \cdot \sigma\phi(Z) \cdot \sigma\upsilon\nu(A) \quad (I.1)$$

Έτσι, κατά την μέτρηση της οριζόντιας γωνίας  $\alpha = (BA\Gamma)$  απαιτείται να γίνει διόρθωση ( $\delta\alpha$ ):

$$\delta\alpha = i_1 \cdot [\sigma\phi(Z_A) \cdot \sigma\upsilon\nu(A) - \sigma\phi(Z_B) \cdot \sigma\upsilon\nu(B)] \quad (I.2)$$

όπου :  $Z_A, Z_B$ , είναι οι ζενίθιες γωνίες και  $A, B$  είναι οι τιμές των οριζόντιων γωνιών κατά τις διευθύνσεις των σκοπευόμενων σημείων  $A, B$  αντίστοιχα.

Η διόρθωση ( $\delta\alpha_1$ ), σε δευτερόλεπτα μοιρών, σε μια διεύθυνση, μπορεί να δοθεί και από την επόμενη σχέση :

$$\delta\alpha_1'' = S'' \cdot \frac{(\Sigma L - \Sigma R)}{2n} \cdot \sigma\phi(Z) \quad (I.3)$$

Όπου :  $S''$  η ευαισθησία της σωληνωτής αεροστάθμης σε δευτερόλεπτα μοιρών,  $\Sigma L, \Sigma R$  οι αναγνώσεις της αεροστάθμης αριστερά και δεξιά αντίστοιχα,  $n$  το πλήθος των μετρήσεων της διεύθυνσης.

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι όσο αυξάνεται η ζενίθια γωνία τόσο μειώνεται η αντίστοιχη διόρθωση ( $\delta\alpha_1$ ). Έτσι για ζενίθια γωνία  $Z=100^\circ$ , η διόρθωση είναι ( $\delta\alpha_1$ ) = 0.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

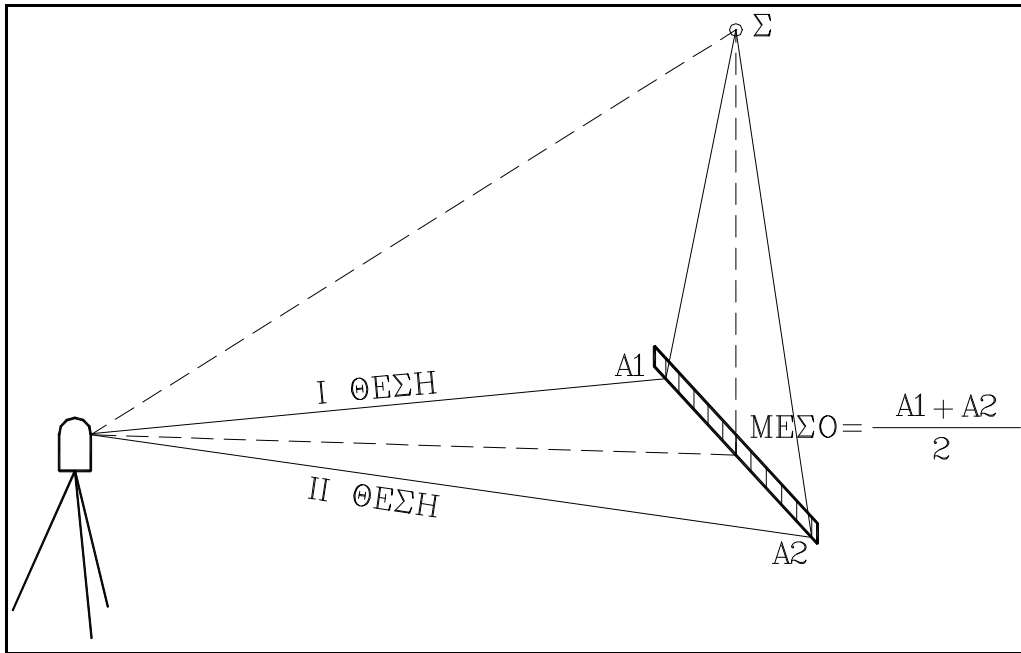
Η ευαισθησία της σωληνωτής αεροστάθμης του γωνιομετρικού οργάνου είναι  $S'' = 10''$ . Οι αναγνώσεις των χαραγών της σωληνωτής αεροστάθμης του, μετά τον έλεγχο, μετρήθηκαν  $\Sigma L = 1$  και  $\Sigma R = 5$ . Η ζενίθια γωνία του σκοπευόμενου σημείου μετρήθηκε  $Z = 85^\circ$ . Σε αυτή την περίπτωση, σε μια σκόπευση του σημείου, η διόρθωση της οριζόντιας γωνίας είναι :  $\delta\alpha_1 \cong -5''$  ή  $\delta\alpha_1 \cong 15^{\text{cc}}$ .

## I.1.2 Δεύτερων άξονας κάθετος στον πρωτεύοντα

### I.1.2α Έλεγχος

Για τον έλεγχο της συνθήκης μπορεί να χρησιμοποιηθεί η λιναίη, η οποία σκοπεύεται με το σταυρόνημα του οργάνου από το ανώτερο σημείο της μέχρι το κατώτερο, στρέφοντας το τηλεσκόπιο του οργάνου περί τον  $\Delta\Delta'$ . Αν κατά την στροφή του τηλεσκοπίου το σταυρόνημα παραμένει πάνω στην λιναίη τότε ισχύει η συνθήκη ( $\Delta\Delta' \perp \Pi\Pi'$ ).

Άλλος τρόπος για τον έλεγχο της συνθήκης είναι ο επόμενος (σχ. I.1). Σκοπεύεται στη θέση I το σημείο  $\Sigma$ , που βρίσκεται όσο πιο ψηλά είναι δυνατό να γίνει σκόπευση. Το τηλεσκόπιο στρέφεται περί τον  $\Delta\Delta'$  και σκοπεύεται οριζόντιος χάρακας (σταδία) που βρίσκεται στο έδαφος, διαβάζεται η ανάγνωση  $A_1$ . Στη συνέχεια γίνεται η ίδια εργασία στη θέση II και διαβάζεται η ανάγνωση  $A_2$  πάνω στον χάρακα. Αν  $A_1 \neq A_2$  τότε δεν ισχύει η συνθήκη.



Σχήμα I.1 Έλεγχος της συνθήκης ( $\Delta\Delta' \perp \Pi\Pi'$ ). [11]

### I.1.2β Αποκατάσταση – Εξάλειψη

Αν υπάρχει δυνατότητα αποκατάστασης της συνθήκης στο ύπαιθρο, θα πρέπει η ανάγνωση του κατακόρυφου νήματος του σταυρονήματος πάνω στο χάρακα, και στις δυο θέσεις τηλεσκοπίου, να ρυθμιστεί έτσι ώστε τελικά να είναι ο μέσος όρος  $\frac{A_1 + A_2}{2}$ .

Στο ύπαιθρο για να εξαλειφθεί το σφάλμα θα πρέπει να γίνονται σκοπεύσεις σε δυο θέσεις I και II τηλεσκοπίου.

### I.1.2γ Σφάλμα

Το σφάλμα που προκύπτει από την μη πλήρωση της συνθήκης αντιστοιχεί στην ποσότητα  $\frac{A_2 - A_1}{2}$ . Αν D η απόσταση οργάνου – χάρακα, τότε το σφάλμα ( $\delta a_2'$ ) σε δευτερόλεπτα βαθμού (cc) υπολογίζεται από την σχέση :

$$\delta a_2' \text{ cc} = \frac{A_2 - A_1}{2 \cdot D} \cdot 636620 \quad (\text{I.4})$$

όπου  $A_1$  και  $A_2$  οι αναγνώσεις πάνω στον χάρακα

Το συγκεκριμένο σφάλμα επιδρά στις οριζόντιες αναγνώσεις με αποτέλεσμα να απαιτείται διόρθωση ( $\delta a_2$ ), η οποία δίνεται από την σχέση :

$$\delta a_2 = \delta a_2' \cdot \sigma\phi Z \quad (\text{I.5})$$

όπου Z η ζενίθια γωνία του σκοπευόμενου σημείου.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

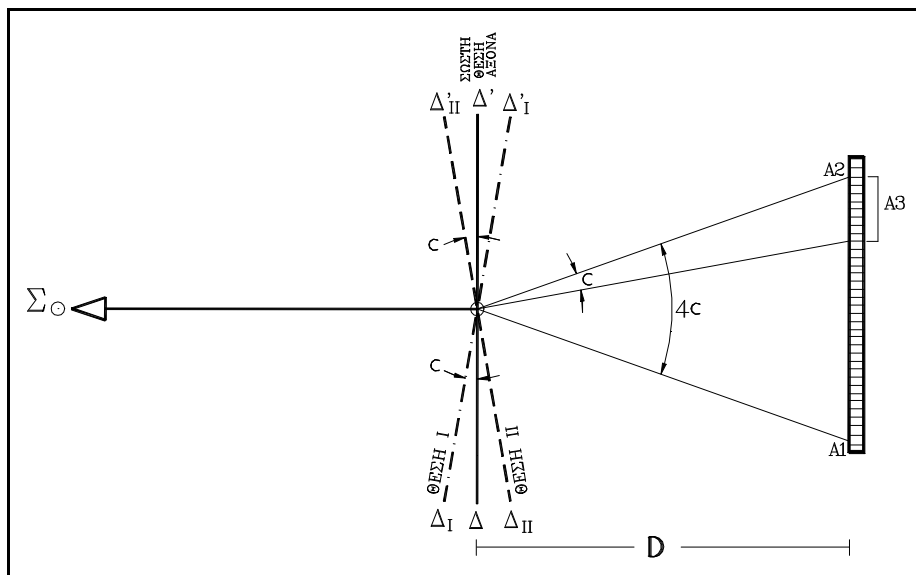
Μετά τον έλεγχο για την ισχύ της συνθήκης ( $\Delta\Delta' \perp \Pi\Pi'$ ) μετρήθηκε, πάνω στον χάρακα, το διάστημα  $(A_2 - A_1) = 20\text{mm}$ . Η απόσταση του οργάνου από τον χάρακα είναι  $D = 30\text{m}$ . Η ζενίθια γωνία του σκοπευόμενου σημείου μετρήθηκε  $Z = 85^\circ$ .

Η διορθωση της οριζόντιας ανάγνωσης είναι :  $\delta a_2 \cong 50^{\text{cc}}$ .

### 1.1.3 Σκοπευτικός άξονας κάθετος στον δευτερεύοντα

#### 1.1.3α Έλεγχος

Για τον έλεγχο της συνθήκης ( $\Sigma\Sigma' \perp \Delta\Delta'$ ) εφαρμόζεται η επόμενη μέθοδος γνωστή ως *μέθοδος του τετραπλάσιου σφάλματος* (σχ. 1.2). Σκοπεύεται στη θέση I ένα μακρινό σημείο  $\Sigma$ , που βρίσκεται στο ύψος περίπου του οργάνου. Στη συνέχεια το τηλεσκόπιο περιστρέφεται περί τον ( $\Delta\Delta'$ ), σκοπεύεται χάρακας (σταδία) που βρίσκεται πίσω από το όργανο και διαβάζεται η ανάγνωση  $A_1$ . Η ίδια εργασία γίνεται στη θέση II και διαβάζεται η ανάγνωση  $A_2$ . Αν  $A_1 \neq A_2$  τότε δεν ισχύει η συνθήκη.



Σχήμα 1.2 Έλεγχος της συνθήκης ( $\Sigma\Sigma' \perp \Delta\Delta'$ ). [11]

#### 1.1.3β Αποκατάσταση – Εξάλειψη

Αν υπάρχει δυνατότητα αποκατάστασης στο ύπαιθρο της συνθήκης, θα πρέπει η ανάγνωση του κατακόρυφου νήματος του σταυρονήματος πάνω στο χάρακα, μετά την ρύθμιση, να μετατοπισθεί σε απόσταση από την  $A_2$  προς την  $A_1$ ,  $A_3 = \frac{A_1 - A_2}{4}$ . Δηλαδή, αν  $A_1 = 5\text{cm}$   $A_2 = 1\text{cm}$  τότε το κατακόρυφο νήμα του σταυρονήματος πρέπει να μετακινηθεί κατά  $A_3 = 1\text{cm}$  πάνω στον χάρακα. Επομένως να βρίσκεται στην ανάγνωση  $A_2 = 2\text{cm}$ .

Στο ύπαιθρο για να εξαλειφθεί το σφάλμα θα πρέπει να γίνονται σκοπεύσεις σε δυο θέσεις I και II τηλεσκοπίου.



### I.1.3γ Σφάλμα

Το σφάλμα που προκύπτει από την μη πλήρωση της συνθήκης αντιστοιχεί στην ποσότητα  $C = \frac{A_1 - A_2}{4}$ . Αν  $D$  η απόσταση οργάνου – χάρακα, τότε το σφάλμα ( $\delta\alpha_3'$ ) σε δευτερόλεπτα βαθμού (cc) υπολογίζεται από την σχέση:

$$\delta\alpha_3'^{cc} = \frac{A_1 - A_2}{4 \cdot D} \cdot 636620 \quad (\text{I.6})$$

Το συγκεκριμένο σφάλμα επιδρά στις οριζόντιες αναγνώσεις με αποτέλεσμα να απαιτείται διόρθωση ( $\delta\alpha_3$ ), η οποία δίνεται από την σχέση :

$$\delta\alpha_3 = \frac{\delta\alpha_3'}{\eta\mu Z} \quad (\text{I.7})$$

όπου  $Z$  η ζενίθια γωνία του σκοπευόμενου σημείου.

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Μετά τον έλεγχο για την ισχύ της συνθήκης ( $\Sigma\Sigma' \perp \Delta\Delta'$ ) μετρήθηκε, πάνω στον χάρακα, το διάστημα  $(A_1 - A_2) = 25\text{mm}$ . Η απόσταση του οργάνου από τον χάρακα είναι  $D = 30\text{m}$ . Η ζενίθια γωνία του σκοπευόμενου σημείου μετρήθηκε  $Z = 85^\circ$ .

Η διόρθωση της οριζόντιας ανάγνωσης είναι  $\delta\alpha_3 \cong 1.4''$ .

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΙΙ

### ΙΙ.1 ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΙΚΗ ΔΙΑΘΛΑΣΗ

Κατά την διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μέσα στην ατμόσφαιρα παρατηρείται μεταβολή της ταχύτητας τους και απόκλιση από την ευθύγραμμη πορεία. Αυτές οι αλλαγές οφείλονται στο φαινόμενο της διάθλασης και εξαρτώνται από τον τοπικό δείκτη διάθλασης  $n$ . Ο δείκτης διάθλασης ενός κύματος που διαδίδεται μέσα σε ένα μέσο ορίζεται από την σχέση:

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (\text{II.1})$$

όπου:  $c_0$  η ταχύτητα του φωτός στο κενό, η τιμή του  $c_0 = 299792458 \pm 1.2\text{ms}^{-1}$  (XVI Γενική Συνέλευση της I.U.G.G., Grenoble 1975) και  $c$  η ταχύτητα του κύματος στο μέσο που διαδίδεται.

Η διάδοση ενός κύματος διέπεται από τους επόμενους νόμους:

$$(\text{αρχή του Fermat}) \quad \Delta t = \frac{1}{c_0} \int^s n \cdot ds = \min \quad (\text{II.2})$$

$$(\text{νόμος του Snell}) \quad n \cdot \eta\mu\beta = \text{σταθ.} \quad (\text{II.3})$$

όπου:  $\Delta t$  ο χρόνος διαδρομής του κύματος,  $\beta$  η γωνία μεταξύ της κάθετης στην επιφάνεια με  $\eta = \text{σταθερό}$  και της εφαπτομένης στην ακτίνα του κύματος.

Η καμπυλότητα του κύματος ( $\frac{1}{r}$ ) περιγράφεται από την σχέση:

$$\frac{1}{r} = -\frac{|\text{grad}n|}{n} \cdot \eta\mu\beta \quad (\text{II.4})$$

Οι οριζόντιες συνιστώσες του  $\text{grad}n$  προκαλούν την οριζόντια διάθλαση που επηρεάζει τις μετρήσεις οριζόντιων γωνιών. Αν θεωρηθεί ότι η οριζόντια διάθλαση είναι αμελητέα τότε ο συντελεστής  $k$  περιγράφει την κατακόρυφη διάθλαση και ορίζεται από την σχέση:

$$k = \frac{R}{r} \quad (\text{II.5})$$

όπου:  $R$  η ακτίνα καμπυλότητας της επιφάνειας αναφοράς.

Η κατακόρυφη διάθλαση επηρεάζει τις ζενίθιες γωνίες, τις μετρήσεις των αποστάσεων και τις γεωμετρικές χωροσταθμίσεις.

Εξαιτίας της επίδρασης της ατμοσφαιρικής διάθλασης οι γωνιομετρήσεις προτείνονται να γίνονται σε συγκεκριμένα χρονικά διαστήματα κατά την διάρκεια της ημέρας (Ενότητες 2.5.2 και 2.5.4). Οι ζενίθιες γωνίες διορθώνονται κατά τον προσδιορισμό των υψομετρικών διαφορών των σημείων με την μέθοδο της Τριγωνομετρικής Υψομετρίας (Ενότητα 4.13.2). Στις μετρήσεις μηκών γίνεται σχετική διόρθωση λόγω της καμπύλωσης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (Ενότητα 3.4.3). Τέλος κατά την διεξαγωγή των γεωμετρικών χωροσταθμίσεων λαμβάνεται υπόψη η καμπυλότητα των οπτικών ακτίνων (Ενότητα 4.13.1).