



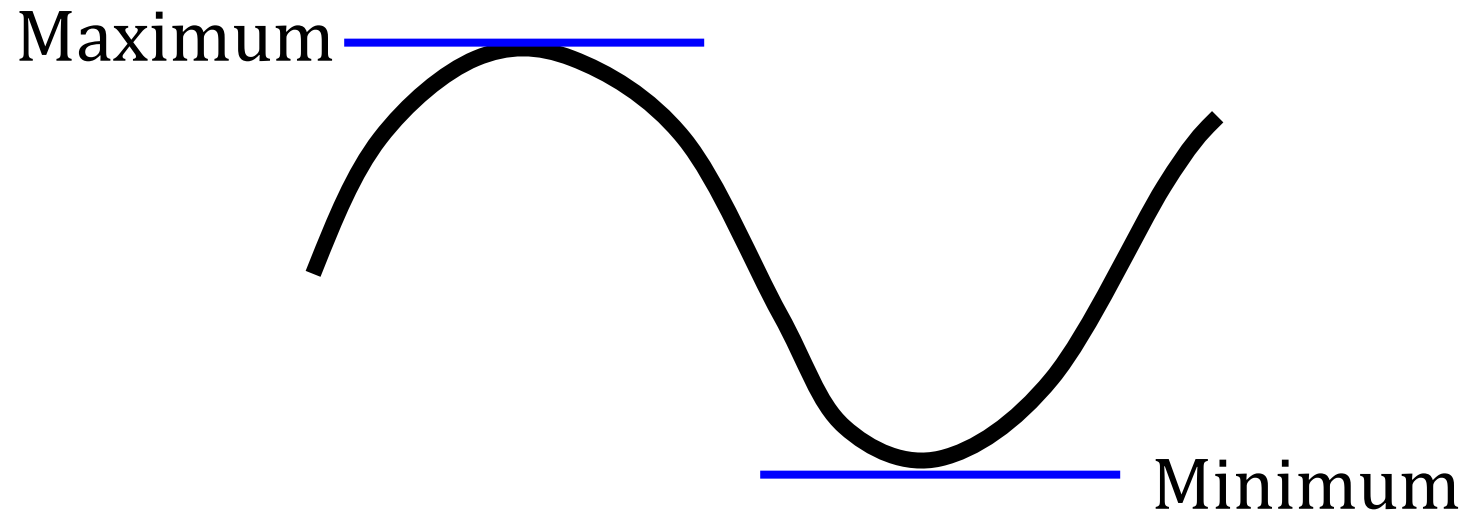
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος

Διαχείριση Υδατικών Πόρων

Βελτιστοποίηση

Μέρος 1α: Συμβατικές Μέθοδοι

Βελτιστοποίηση;



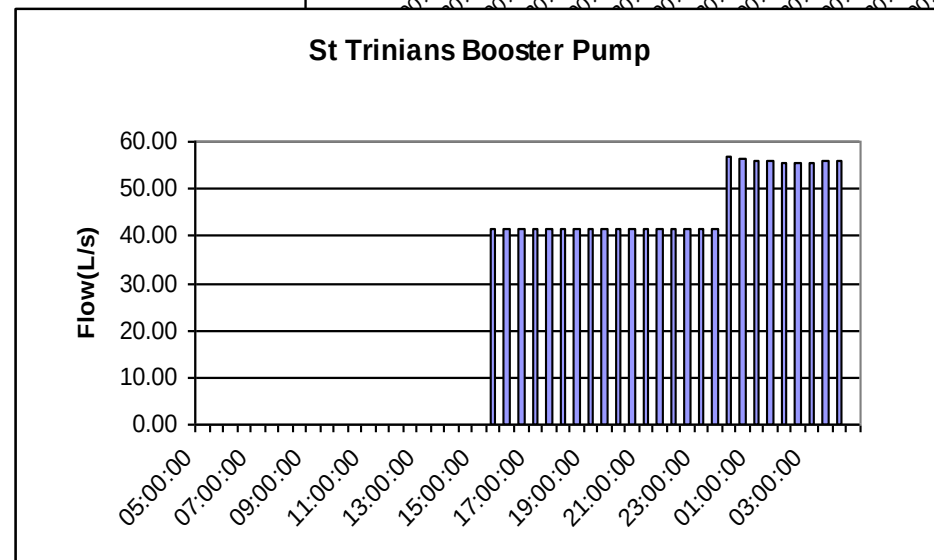
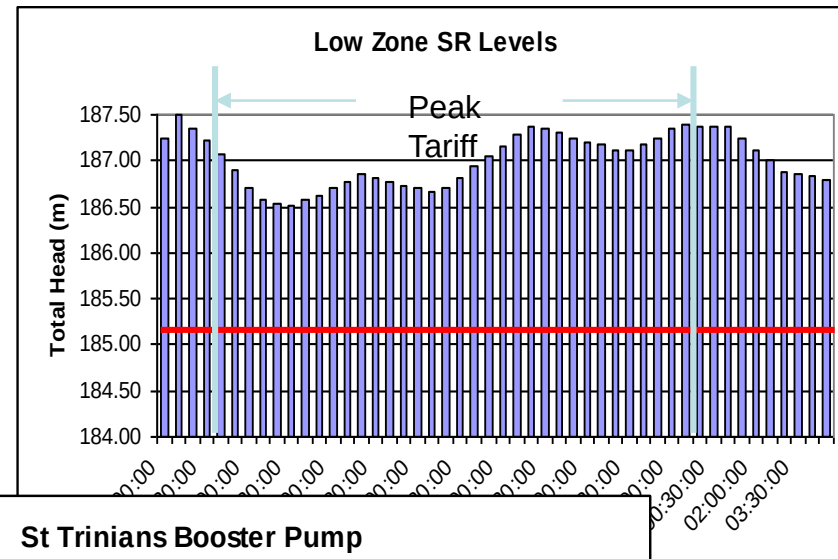
Βελτίωση Δικτύων Ύδρευσης

- Απώλειες σε νερό: 50%
- Μήκος αγωγών: Αθήνας – 7000 km!
- Αντικατάσταση; Ποιων;
- Στόχοι; Νερό; Ενέργεια; Κόστος; Πίεση;



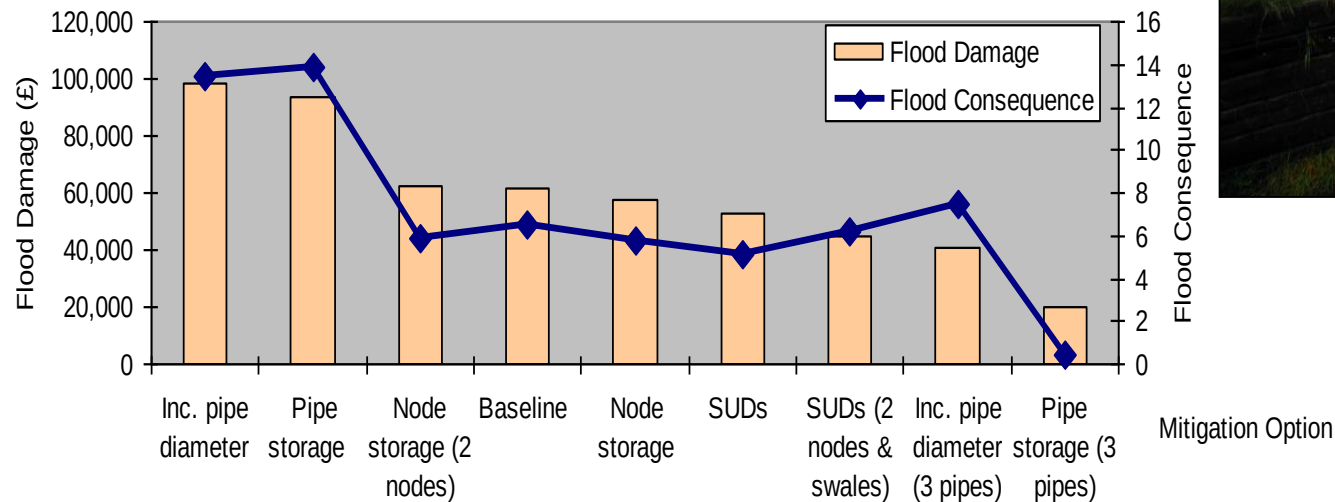
Βέλτιστη Λειτουργία Δικτύων Ύδρευσης

- Βελτιστοποίηση λειτουργίας αντλιών (scheduling)
- Στόχοι; Ενέργεια; Ποιότητα νερού;



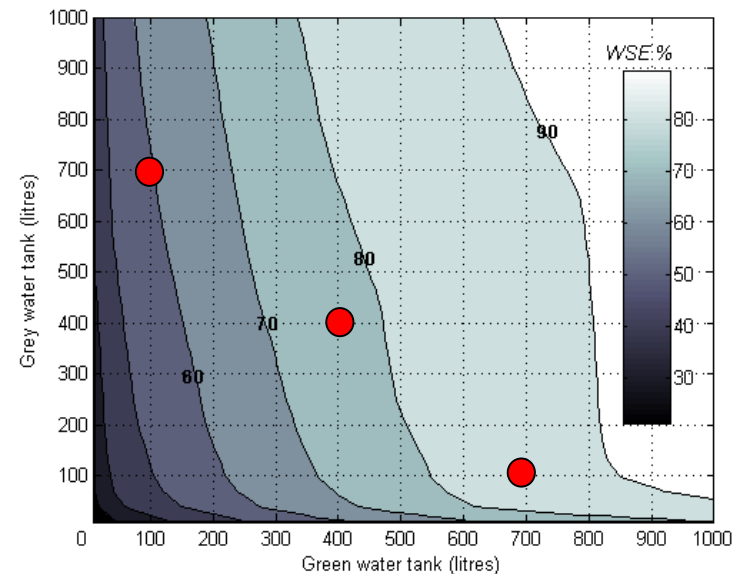
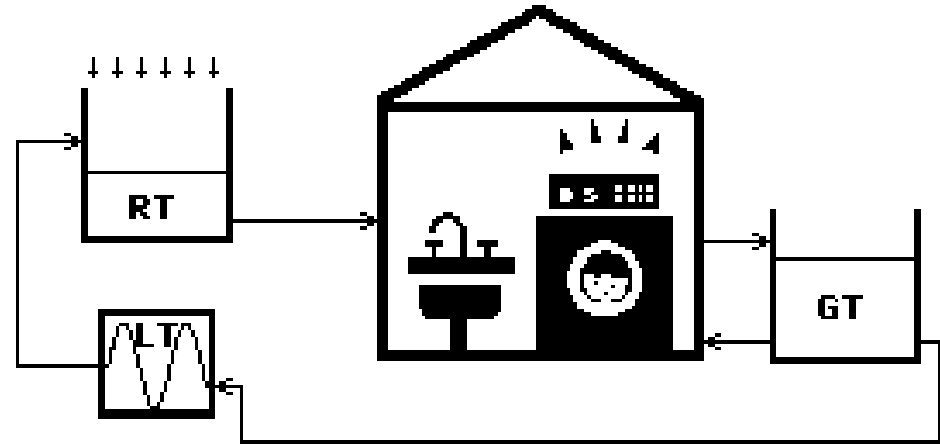
Βελτιστοποίηση Αντιπλημμυρικών Έργων και Σχεδίων

- Επιδιόρθωση δικτύων (ή τοποθέτηση αναχωμάτων)
- Βέλτιστη παρέμβαση για μείωση του οικονομικού και κοινωνικού κόστους...

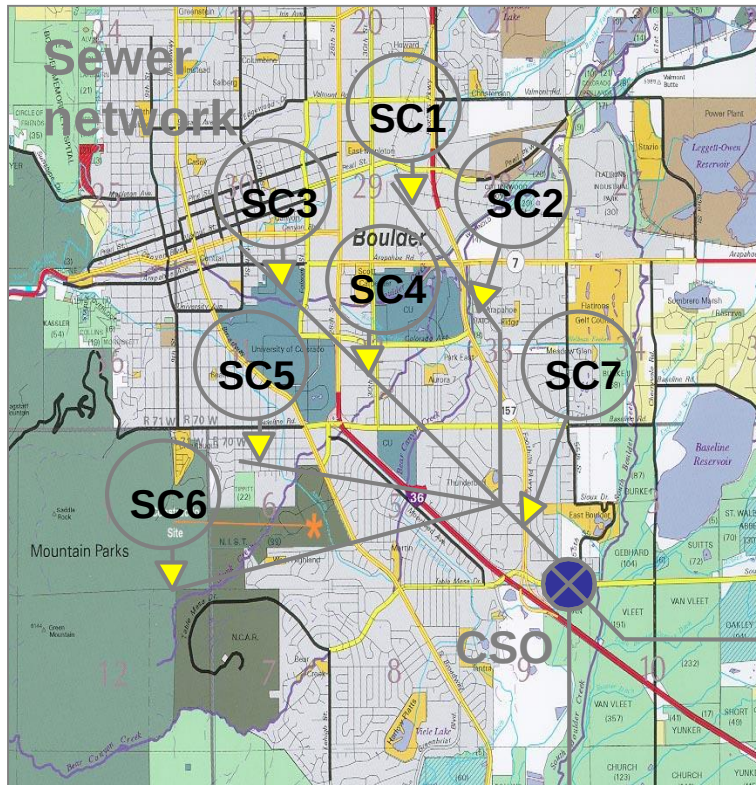


Ποιο απλά προβλήματα;

- Ανακύκλωση Νερού
- Βέλτιστες διαστάσεις συστήματος (δεξαμενές επεξεργασμένου και ανεπεξέργαστου νερού) για την επίτευξη:
 - ❖ μέγιστης μείωσης αναγκών σε πόσιμο νερό
 - ❖ με το ελάχιστο κόστος
 - ❖ και την καλύτερη ποιότητα



Βελτιστοποίηση Ενιαίων Συστημάτων: Δίκτυα αποχέτευσης, βιολογικοί καθαρισμοί, υδάτινοι αποδέκτες



River

Βελτιστοποίηση διαχείρισης υδροσυστημάτων

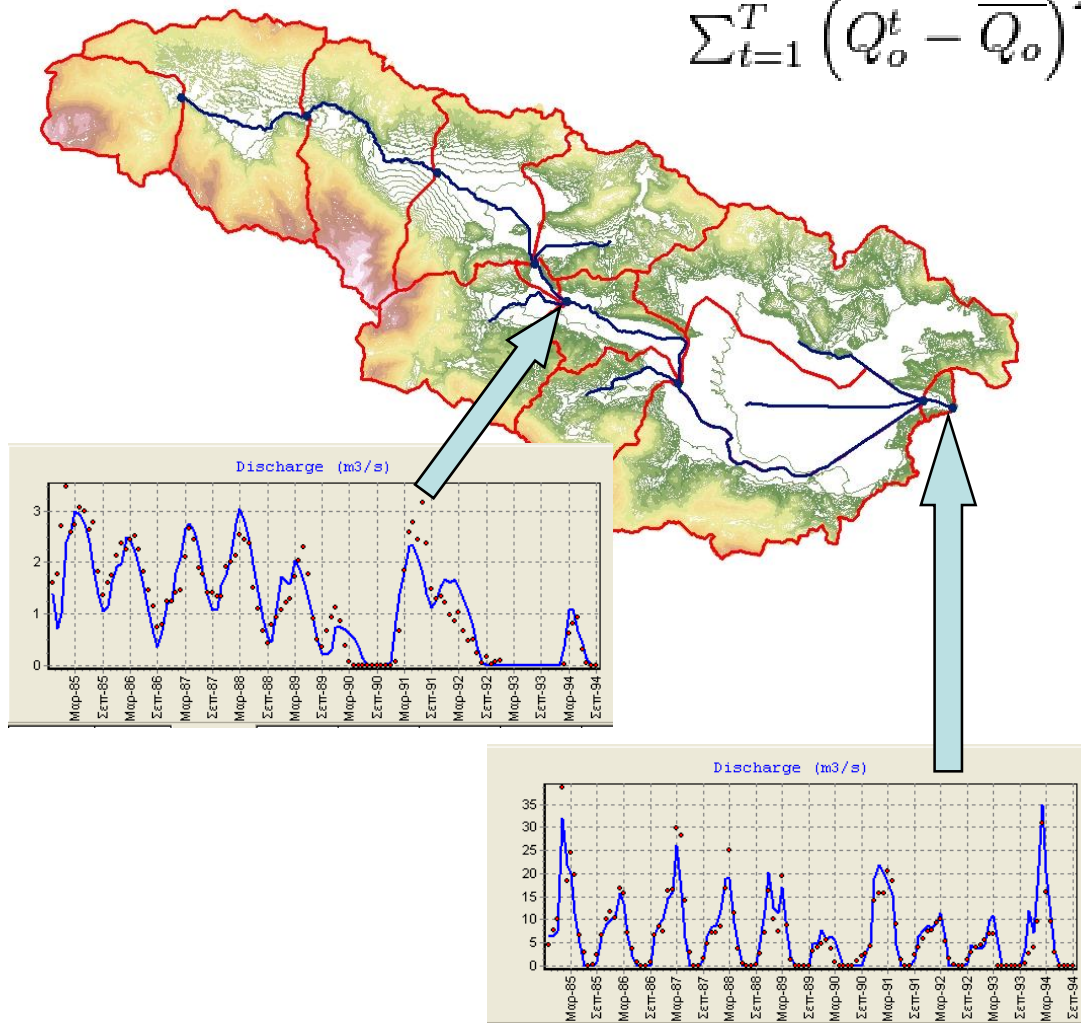


- Μεγάλη χωρική κλίμακα
- Συστήματα πολλαπλού σκοπού
- Ανταγωνιστικά κριτήρια (κόστος, αξιοπιστία, καλή ποιότητα νερού)
- Βελτιστοποίηση υπό καθεστώς αβεβαιότητας (εισροές, ζήτηση, έργα)

Βέλτιστη προσαρμογή (βαθμονόμηση) υδρολογικών μοντέλων

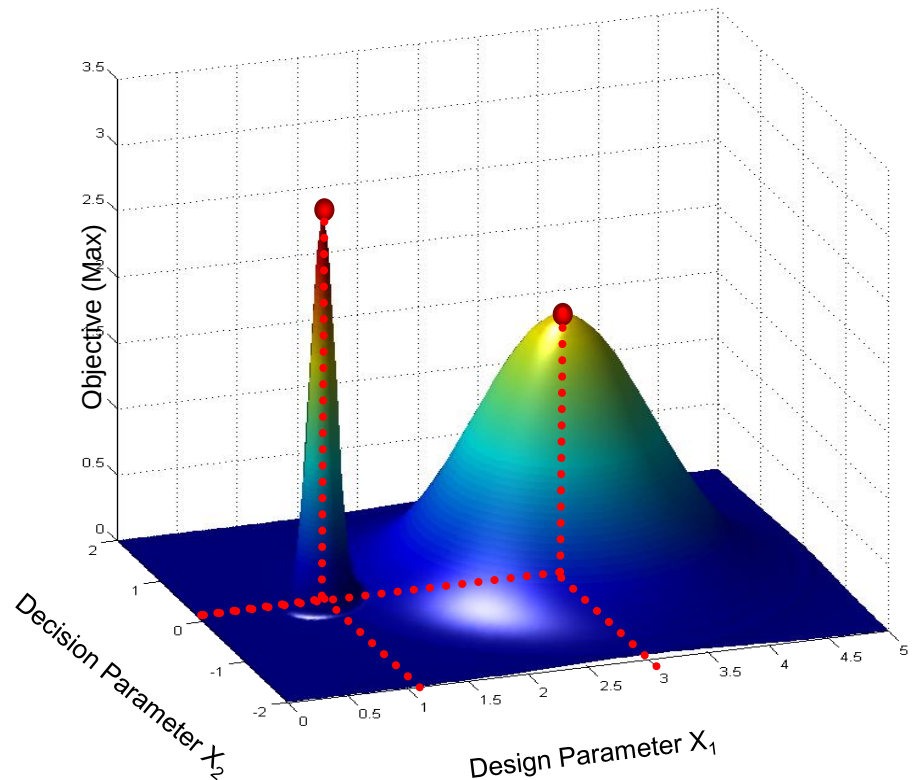
- Αναπαράσταση σύνθετων φυσικών συστημάτων (λεκάνες απορροής, υδροφορείς)
- Διεργασίες με έντονη χωρική ετερογένεια
- Έμμεση εκτίμηση παραμέτρων, μέσω «σύγκρισης» των αποκρίσεων του μοντέλου με μετρήσεις
- Πχ. με **Nash–Sutcliffe**

$$E = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (Q_o^t - Q_m^t)^2}{\sum_{t=1}^T (Q_o^t - \overline{Q_o})^2}$$



Βέλτιστη λύση: όχι πάντα η κορυφή της καμπύλης

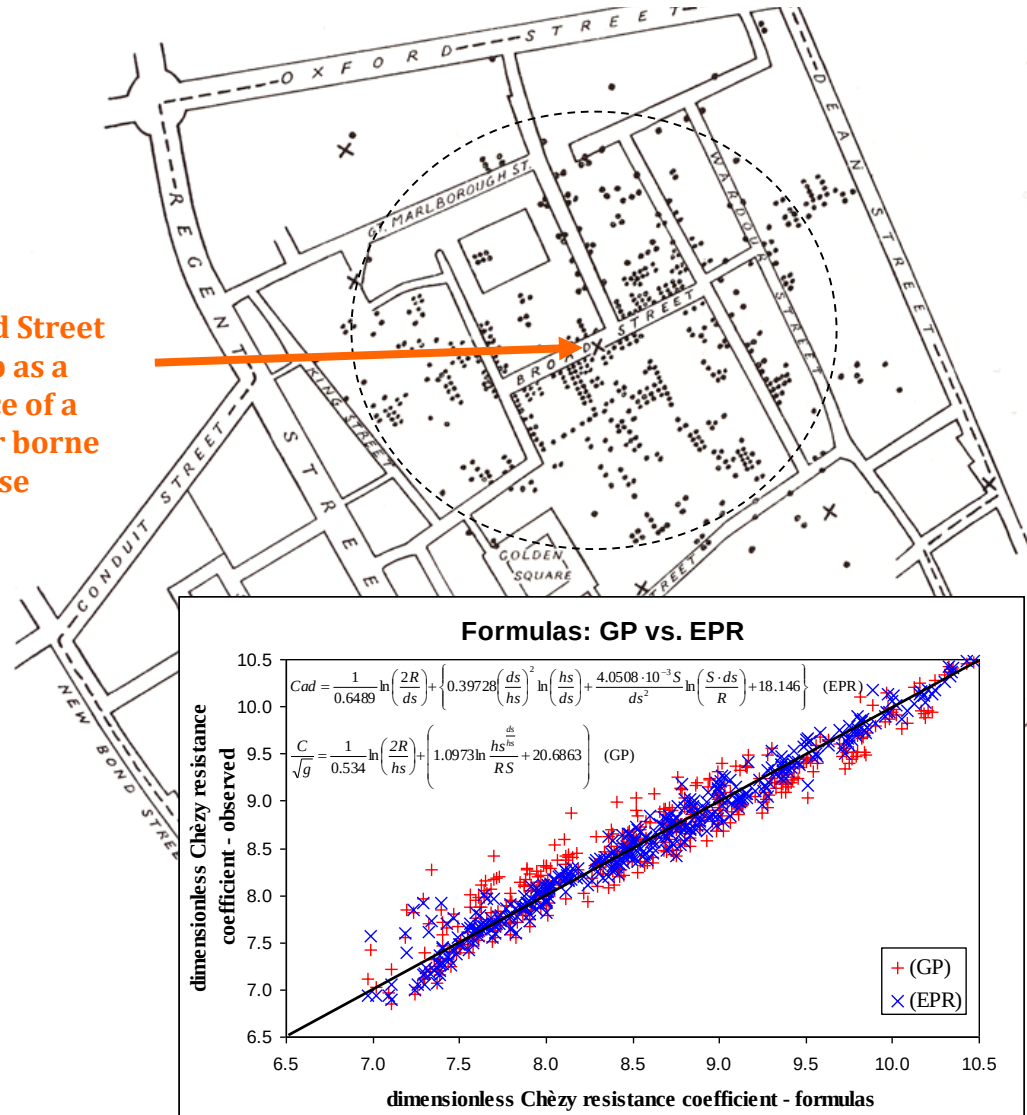
- Αβεβαιότητα στις παραμέτρους
- Αβεβαιότητα στην αντίληψή μας για το πρόβλημα
- Μεταβολές στα δεδομένα και τις διεργασίες του συστήματος
- «Εύρωστη» λύση (robust solution)



Βελτιστοποίηση και πιο «αφηρημένων» προβλημάτων

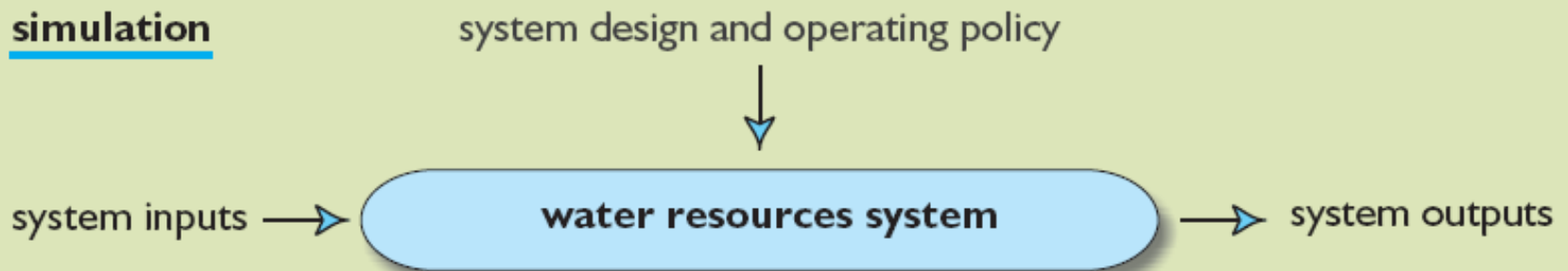
- «Εξόρυξη» δεδομένων
- Αναζήτηση δεδομένων με περισσότερη/πιο χαρακτηριστική πληροφορία
- Μέτρο ποσότητα πληροφορίας; (εντροπία;)

Broad Street Pump as a source of a water borne disease

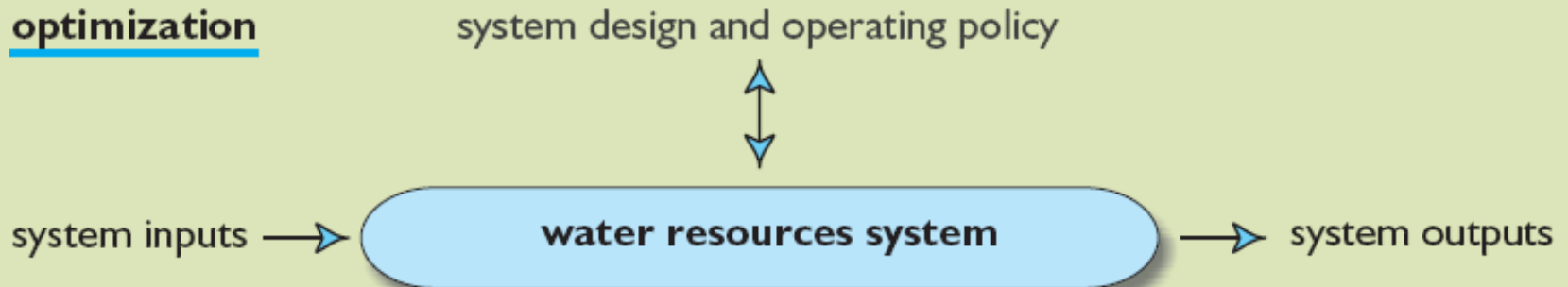


Προσομοίωση - Βελτιστοποίηση

simulation



optimization



Θεμελιώδεις έννοιες βελτιστοποίησης

- Η έννοια της βελτιστοποίησης χρησιμοποιείται (συνήθως) σε προβλήματα **λήψης αποφάσεων** (decision-making) ή **αντίστροφα προβλήματα** (calibration), και προϋποθέτει μια διαδοχή από εναλλακτικές **επιλογές** (alternatives) και **αξιολογήσεις** (evaluations) των επιπτώσεων κάθε επιλογής.
- Κάθε επιλογή που ικανοποιεί τους περιορισμούς του προβλήματος καλείται **εφικτή** (feasible). Το σύνολο των εφικτών επιλογών καλείται **εφικτός χώρος** ή **χώρος αποφάσεων** (decision space) ή **χώρος αναζήτησης** (search space).
- Αν κάθε εφικτή επιλογή μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο μεταβλητών ελέγχου (control variables) $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ και αν σε κάθε τέτοια περιγραφή μπορεί να αντιστοιχιστεί ένα **μέτρο επίδοσης** (performance measure), τότε ως βέλτιστη (optimal) λαμβάνεται η απόφαση που μεγιστοποιεί το εν λόγω μέτρο.
- Η μαθηματική έκφραση του μέτρου επίδοσης καλείται **αντικειμενική** ή **στοχική** συνάρτηση (objective function) και συμβολίζεται $f(\mathbf{x})$.
- Το μέτρο επίδοσης μπορεί να περιλαμβάνει ένα ή περισσότερα κριτήρια, οπότε η στοχική συνάρτηση είναι, αντίστοιχα, **βαθμωτή** ή **διανυσματική**. Η γενική μορφή της πολυκριτηριακής στοχικής συνάρτησης είναι $f(\mathbf{x}) = \{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})\}$.

Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης

□ Γενική διατύπωση:

$$\min/\max f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq, \leq, = 0, \text{ για } j = 1, \dots, k \\ x_i^{\min} &\leq x_i \leq x_i^{\max}, \text{ για } i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq, \leq, = 0, \text{ για } j = 1, \dots, k \\ x_i^{\min} &\leq x_i \leq x_i^{\max}, \text{ για } i = 1, \dots, n \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{Εφικτός χώρος} \\ \text{(πεδίο ορισμού)} \end{array}$$

□ Μορφές αντικειμενικής (ή αλλιώς στοχικής) συνάρτησης:

- Με συνεχείς ή όχι μεταβλητές ελέγχου (π.χ., ακέραιες, διακριτές)
- Γραμμική ή μη
- Προσδιοριστική ή σχοχαστική
- Κυρτή (μοναδικό ακρότατο) ή μη κυρτή (πολλαπλά ακρότατα)
- Με αναλυτική ή μη αναλυτική έκφραση της ίδιας καθώς και των παραγώγων της (1^{ης} και 2^{ης} τάξης).
- Με αμελητέο ή σημαντικό φόρτο υπολογισμού (στοχικές συναρτήσεις σε πραγματικές εφαρμογές που αποτιμώνται μέσω προσομοίωσης)

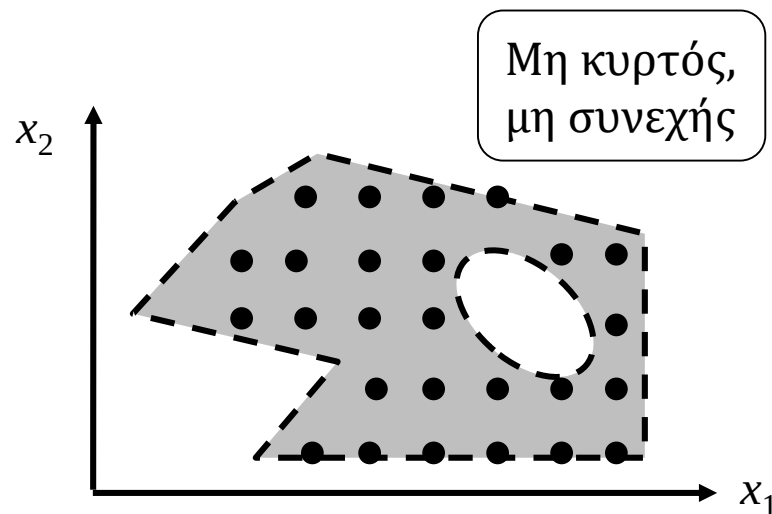
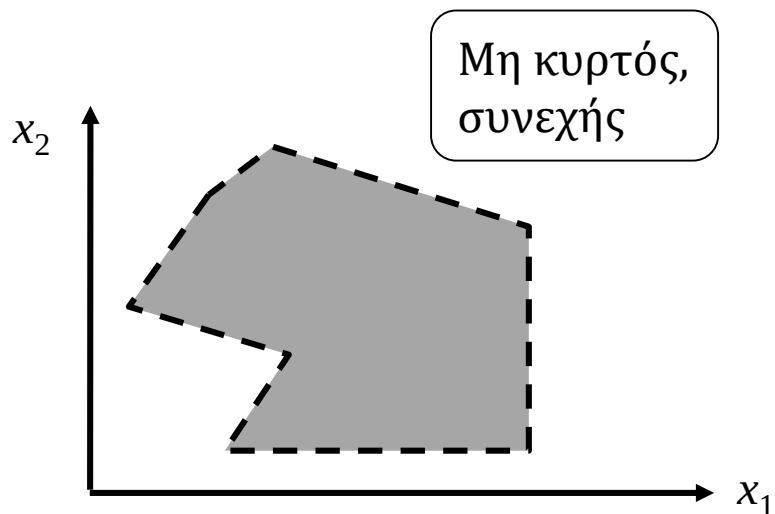
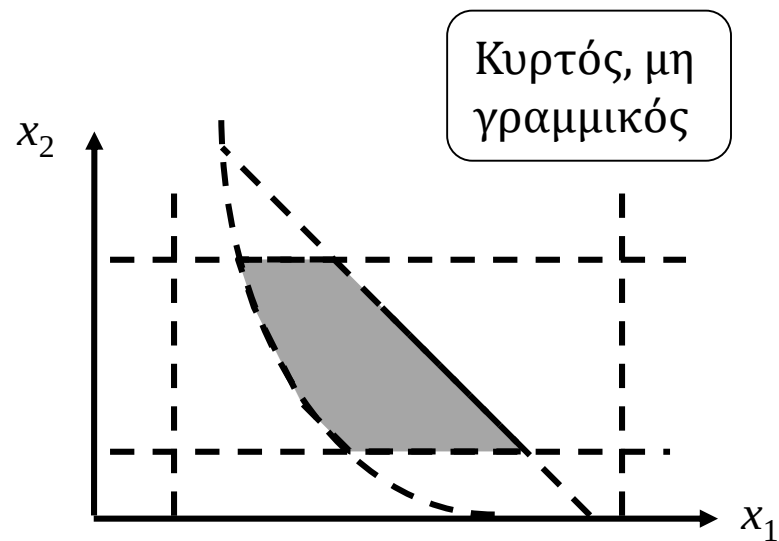
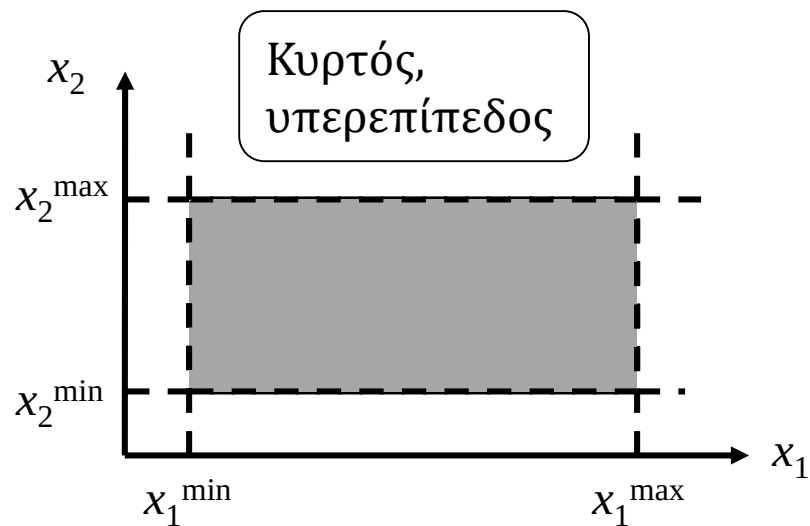
□ Μορφές περιορισμών:

- Ενσωματωμένοι στη στοχική συνάρτηση
- Πεδίο ορισμού = όρια μεταβλητών ελέγχου

Κατηγορίες περιορισμών

- Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε ότι το πεδίο αναζήτησης $X \in R^n$ περιγράφεται από μαθηματικούς περιορισμούς (constraints) της μορφής:
$$g(\mathbf{x}) = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq, =, \geq 0$$
- Στα μοντέλα, οι σχέσεις ισότητας αντιπροσωπεύουν, κατά κανόνα, εξισώσεις διατήρησης μάζας ή ενέργειας, πρόκειται δηλαδή για αυστηρά διατυπωμένους περιορισμούς που απορρέουν από φυσικούς νόμους.
- Η απλούστερη κατηγορία περιορισμών είναι σχέσεις της μορφής $l \leq x \leq u$, που εκφράζουν όρια διακύμανσης παραμέτρων ή περιορισμούς χωρητικότητας. Οι περιορισμοί ορίου αναφέρονται στην βιβλιογραφία ως ρητοί (explicit).
- Ειδικές κατηγορίες περιορισμών:
 - ❖ περιορισμοί ακεραιότητας (integrality), οι οποίοι αναφέρονται σε μεταβλητές ελέγχου που λαμβάνουν αποκλειστικά ακέραιες τιμές.
 - ❖ περιορισμοί δυαδικότητας (boolean), όπου $X = \{0, 1\}$, με την τιμή $x = 0$ να αντιστοιχεί σε άρνηση (false) ενώ η τιμή $x = 1$ υποδηλώνει κατάφαση (true).
 - ❖ τελεστές ή λογικές εκφράσεις, όπως “if...then...else”, “and”, “or”, οι οποίοι κωδικοποιούνται μόνο σε γλώσσα υπολογιστή.
 - ❖ αριθμήσιμα σύνολα τιμών που υποδηλώνουν «διαθέσιμες» επιλογές (π.χ. σύνολα διαμέτρων εμπορίου σε προβλήματα βελτιστοποίησης δικτύων).

Χώρος αναζήτησης



Ακρότατα (βελτιστοποίηση χωρίς περιορισμούς)

Έστω συνάρτηση $f(\mathbf{x})$ ορισμένη στο R^n που είναι **συνεχής** σε όλο το πεδίο ορισμού της και έχει **συνεχείς μερικές παραγώγους** δευτέρας τάξεως. Κάθε σημείο μηδενισμού του διανύσματος κλίσης της συνάρτησης, δηλαδή κάθε σημείο $\mathbf{x}^*$ για το οποίο:

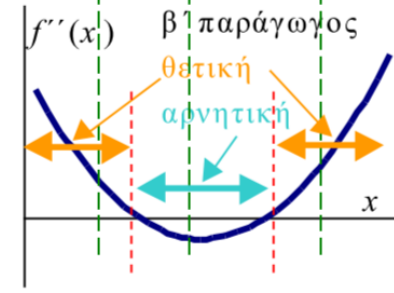
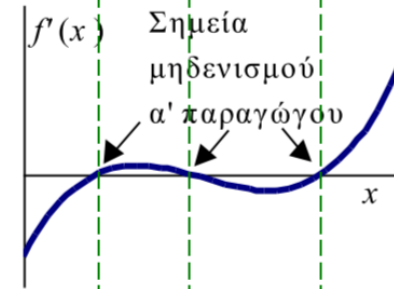
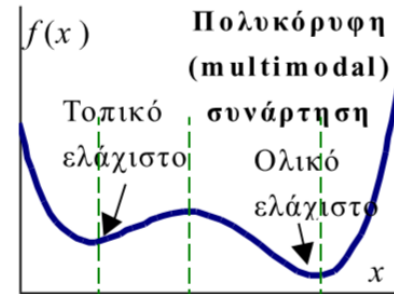
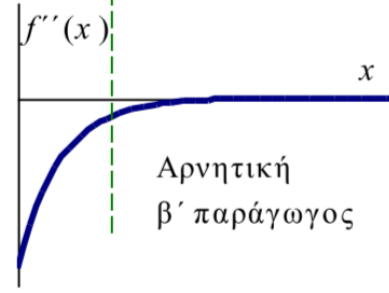
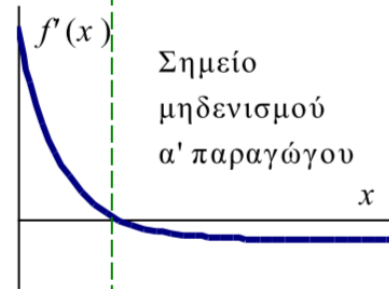
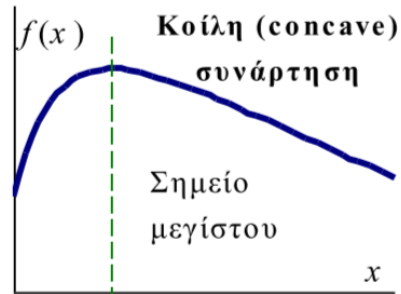
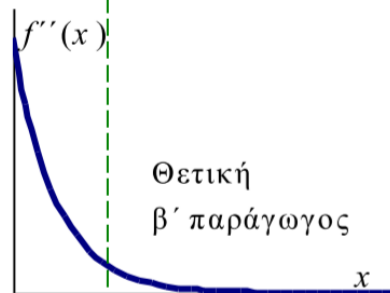
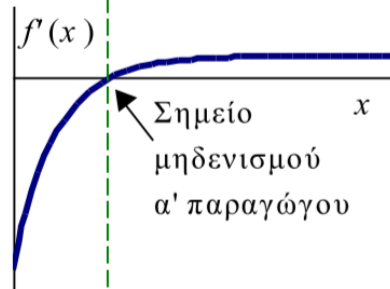
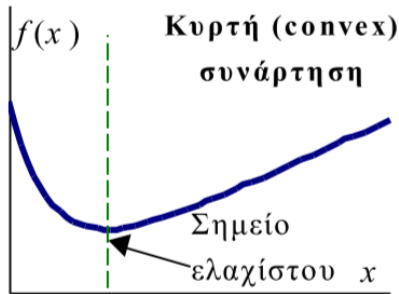
$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \text{grad } f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

ονομάζεται **στάσιμο** (stationary).

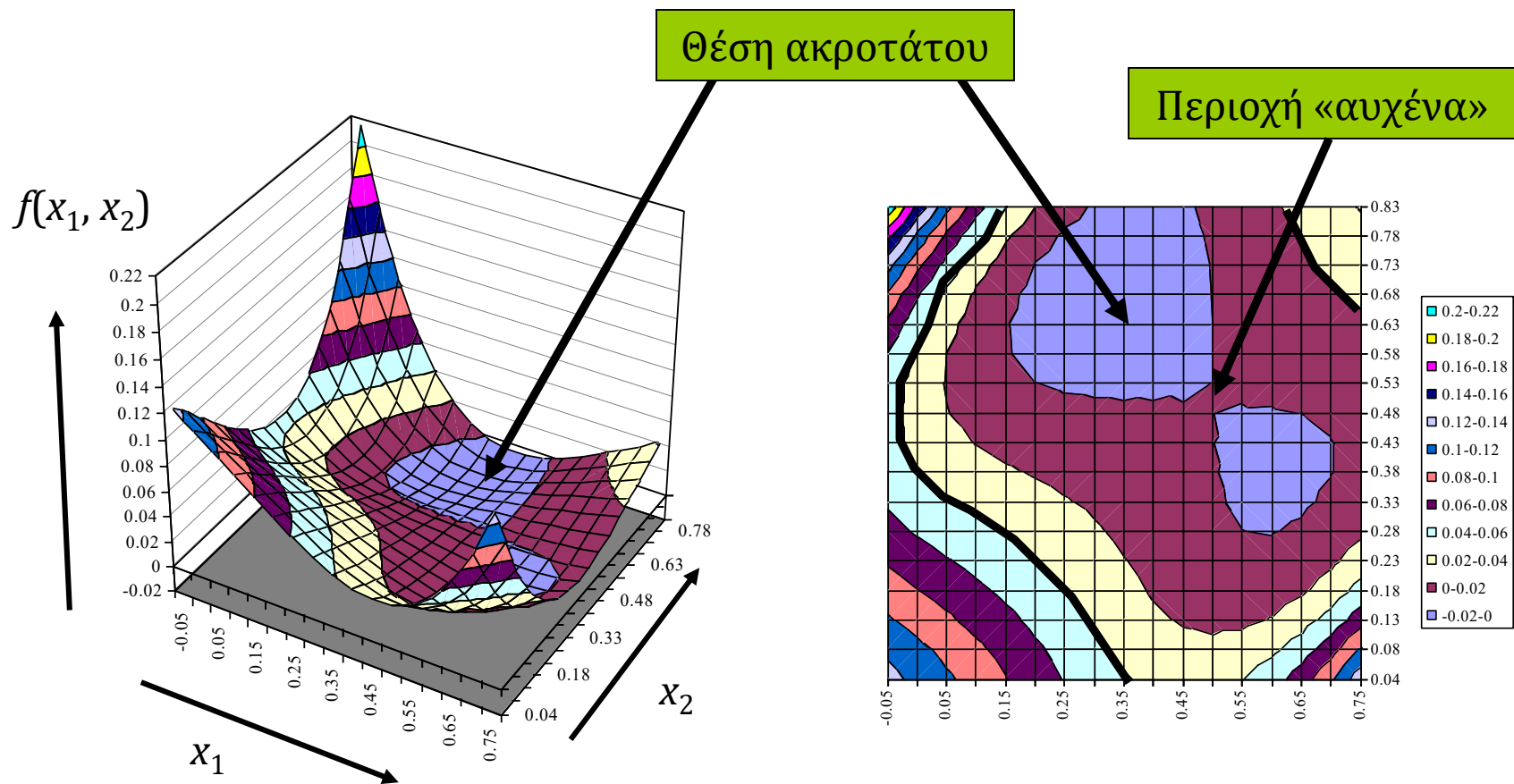
Στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι **κυρτή**, η f έχει **μοναδικό** στάσιμο σημείο που αντιστοιχεί στο **ολικό ακρότατο** αυτής (ελάχιστο ή μέγιστο). Κατά συνέπεια, αν μια συνάρτηση ικανοποιεί την **αναγκαία συνθήκη της στασιμότητας** ($\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$) και την **ικανή συνθήκη κυρτότητας**, τότε παρουσιάζει **μοναδικό** (ολικό) ακρότατο στο σημείο $\mathbf{x}^*$.

Αν η συνάρτηση είναι **μη κυρτή**, τότε έχει περισσότερα του ενός στάσιμα σημεία, καθένα από τα οποία μπορεί να είναι τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο ή σημείο σέλας.

Ακρότατα συναρτήσεων

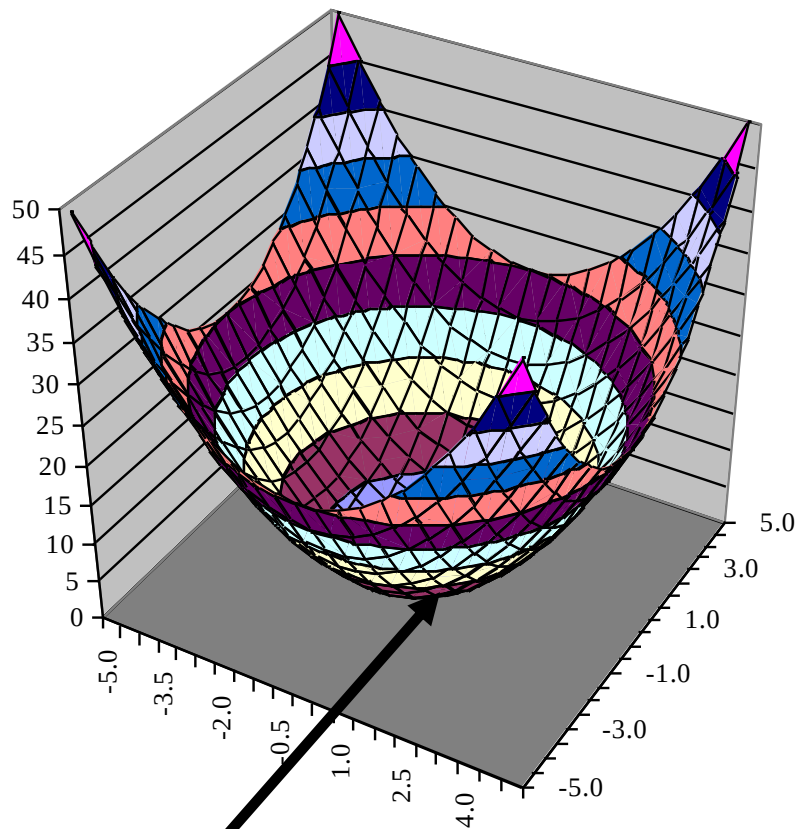


Χώρος απόκρισης $f(x)$



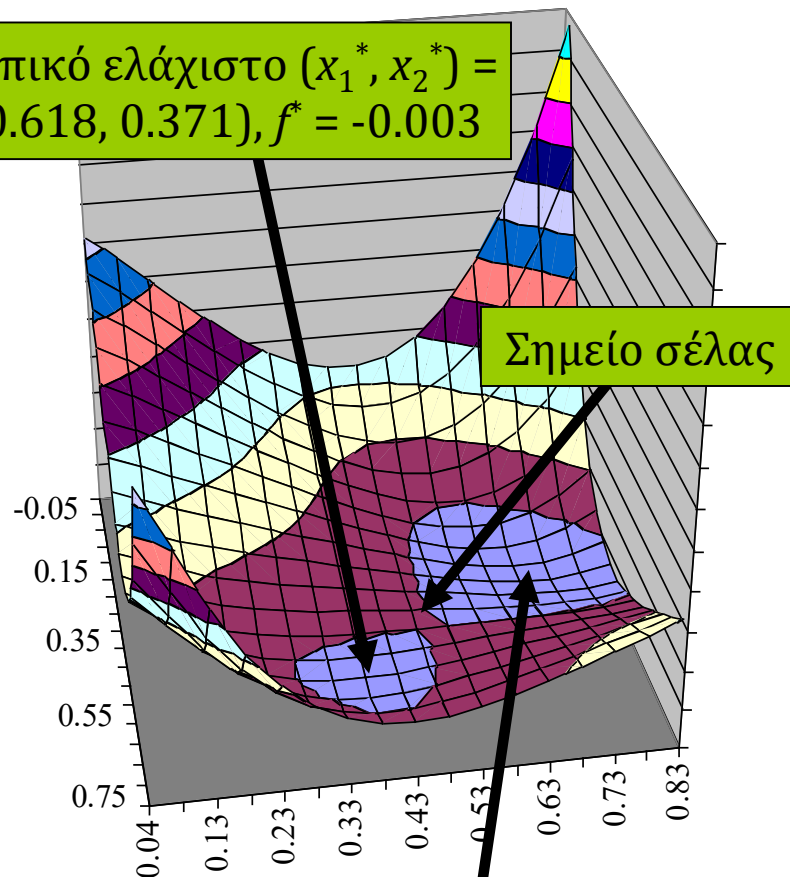
Τοπικά και ολικά ακρότατα

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$



Ολικό ελάχιστο
 $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0), f^* = 0$

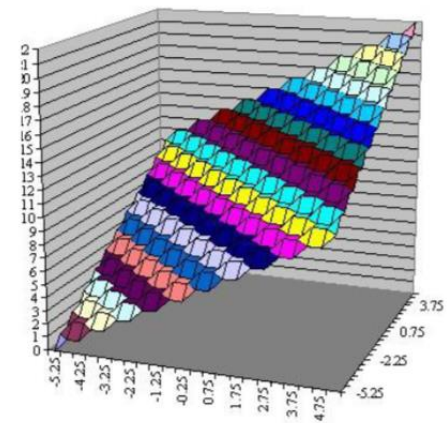
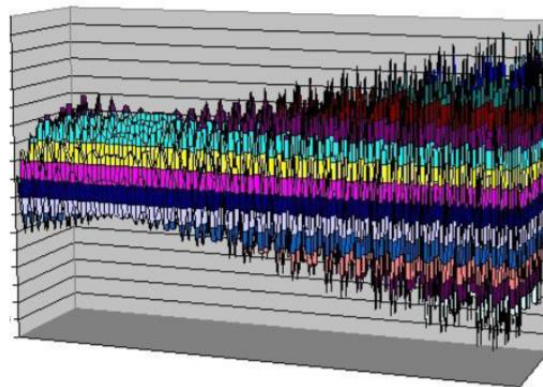
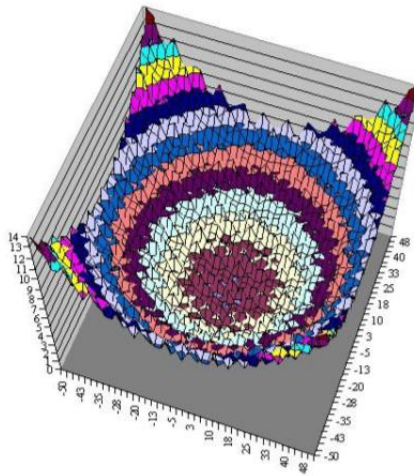
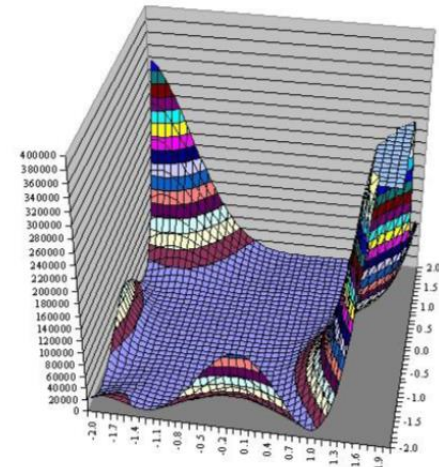
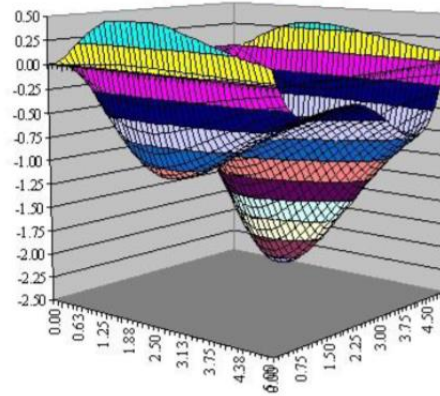
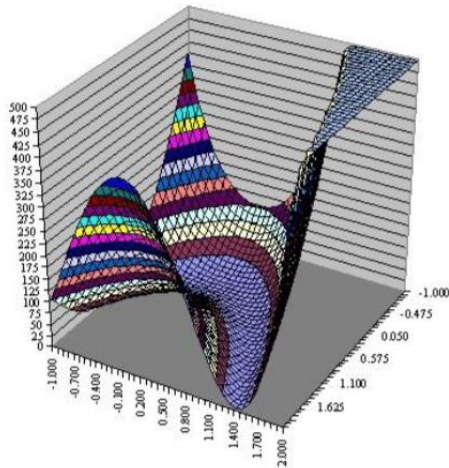
Τοπικό ελάχιστο $(x_1^*, x_2^*) = (0.618, 0.371), f^* = -0.003$



Ολικό ελάχιστο $(x_1^*, x_2^*) = (0.314, 0.705), f^* = -0.011$

$$f(x_1, x_2) = 0.5(1.1x_1 - x_2)^4 + 0.5(x_1 - 0.5)(x_2 - 0.5)$$

Παραδείγματα μη κυρτών συναρτήσεων



Ακρότατα (βελτιστοποίηση με περιορισμούς)

Έστω συνάρτηση $f(\mathbf{x})$, με k περιορισμούς της μορφής $\mathbf{g}(\mathbf{x}) := [g_1(\mathbf{x}), \dots, g_k(\mathbf{x})]^T \leq \mathbf{0}$.

Το σημείο $\mathbf{x}^*$ είναι η ολικά ελάχιστη λύση της f εφόσον ικανοποιεί τους περιορισμούς και επιπλέον υπάρχει διάνυσμα **μη αρνητικών** συντελεστών $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T$ τέτοιο ώστε:

$$\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \text{για καθε } i = 1, \dots, k$$

$$\frac{df(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{d\mathbf{g}(\mathbf{x}^*)}{d\mathbf{x}} = \mathbf{0}^T$$

Οι παραπάνω εκφράσεις, που είναι αναγκαίες προϋποθέσεις ύπαρξης ακροτάτου ενός προβλήματος με περιορισμούς, είναι γνωστές ως **συνθήκες Kuhn-Tucker**. Οι συνθήκες Kuhn-Tucker είναι **ικανές** και **αναγκαίες** για την ύπαρξη ολικού ελαχίστου της f , **εφόσον τόσο η συνάρτηση όσο και οι περιορισμοί είναι κυρτές συναρτήσεις**.

Κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης **με περιορισμούς** μπορεί να αναχθεί σε πρόβλημα **χωρίς περιορισμούς**, με θεώρηση της βοηθητικής συνάρτησης:

$$\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in R^n$$

Δεδομένου ότι $\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ για κάθε i , το ολικό ακρότατο της $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ ταυτίζεται με το ολικό ακρότατο της $f(\mathbf{x})$, δηλαδή $\varphi(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = f(\mathbf{x}^*)$. Η επίλυση του μετασχηματισμένου προβλήματος γίνεται θεωρώντας ως μεταβλητές ελέγχου τις αρχικές παραμέτρους $\mathbf{x}$ καθώς και τους συντελεστές $\boldsymbol{\lambda}$ (**πολλαπλασιαστές Lagrange**).

Εφαρμογή

- Έστω ότι ένα εργοστάσιο αφαλάτωσης χρειάζεται για να λειτουργήσει $h = 20$ €/ώρα για το κόστος εργασίας και $s = 170$ €/τόνο για χημικά.
- Έστω, ότι το συνολικά του έσοδα περιγράφονται από την παρακάτω εξίσωση:

$$R(h, s) = 200h^{0.5}s^{0.2}$$

Αν ο συνολικός διαθέσιμος προϋπολογισμός είναι $\Pi_0 = 20\,000$ €.

Να βρείτε τις παραμέτρους h, s που αποδίδουν τα μέγιστα συνολικά έσοδα?

Περιορισμός: $\Pi_0 = 20h + 170s$ ή $20h + 170s - \Pi_0 = 0$

Εφαρμογή: Επίλυση

$$\varphi(h, s, \lambda) = 200h^{0.5}s^{0.2} - \lambda(20h + 170s - \Pi_0)$$

$$\frac{d\varphi}{dh} = 0 = 100h^{-0.5}s^{0.2} - 20\lambda$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0 = 20h^{0.5}s^{-0.8} - 170\lambda$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0 = -20h - 170s + \Pi_0 \quad \rightarrow \quad \Pi_0 = 20h + 170s$$

- Αφού, $\Pi_0 = 20\,000\text{€}$ τότε μένει να λύσουμε ένα σύστημα 3 αγνώστων και 3 εξισώσεων.
- Λύνοντας το παραπάνω σύστημα για οποιαδήποτε τιμή Π_0 παίρνουμε τη βέλτιστη λύση των h, s .

Εφαρμογή: Υδραυλικά βέλτιστες διατομές

- Η διαστασιολόγηση επενδεδυμένων αγωγών σε συνθήκες ομοιόμορφης ροής γίνεται με τη μέθοδο της υδραυλικά βέλτιστης διατομής.

- Εφαρμόζεται η σχέση του Manning:

$$Q = E V = (1 / n) E R^{2/3} J^{1/2} = (1 / n) E^{5/3} \Pi^{-2/3} J^{1/2}$$

όπου Q η διερχόμενη παροχή (καθορισμένη από τον σχεδιασμό), V η ταχύτητα ροής, n ο συντελεστής τραχύτητας (εξαρτάται από το υλικό επένδυσης), J η κατά μήκος κλίση του αγωγού (καθορίζεται από την τοπογραφία), E η υγρή επιφάνεια της διατομής, Π η βρεχόμενη περίμετρος και R η υδραυλική ακτίνα ($R = E / \Pi$).

- Από τη σχέση του Manning προκύπτει ότι, για δεδομένη επιφάνεια $E = E_0$, η παροχευευστικότητα της διατομής μεγιστοποιείται όταν η βρεχόμενη περίμετρος γίνεται ελάχιστη (ελαχιστοποιούνται οι απώλειες λόγω τριβών).
- Τα μεγέθη E και Π είναι συνάρτηση του ομοιόμορφου βάθους ροής y_0 και ενός αριθμού μη καθορισμένων γεωμετρικών χαρακτηριστικών $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, τα οποία εξαρτώνται από το σχήμα της διατομής (π.χ. πλάτος πυθμένα, κλίσεις πρανών, διάμετρος). Το σχετικό πρόβλημα βελτιστοποίησης διατυπώνεται ως εξής:

$$\text{minimize } \Pi = \Pi(x_1, \dots, x_{n-1}, y_0)$$

$$\text{s.t. } E = E(x_1, \dots, x_{n-1}, y_0) = E_0$$

Εφαρμογή: Βέλτιστη ορθογωνική διατομή

□ Μεταβλητές ελέγχου: πλάτος πυθμένα b , βάθος ροής y_0

□ Γεωμετρικά μεγέθη:

■ Εμβαδόν υγρής διατομής $E = b y_0$

■ Βρεχόμενη περίμετρος $\Pi = b + 2y_0$

□ Διατύπωση προβλήματος βελτιστοποίησης:

$$\text{minimize } \Pi(b, y_0) = b + 2y_0$$

$$\text{s.t. } E(b, y_0) = b y_0 = E_0$$

□ Διατύπωση μετασχηματισμένου προβλήματος, με εισαγωγή ενός πολλαπλασιαστή Lagrange:

$$\text{minimize } \varphi(b, y_0, \lambda) = (b + 2y_0) - \lambda (b y_0)$$

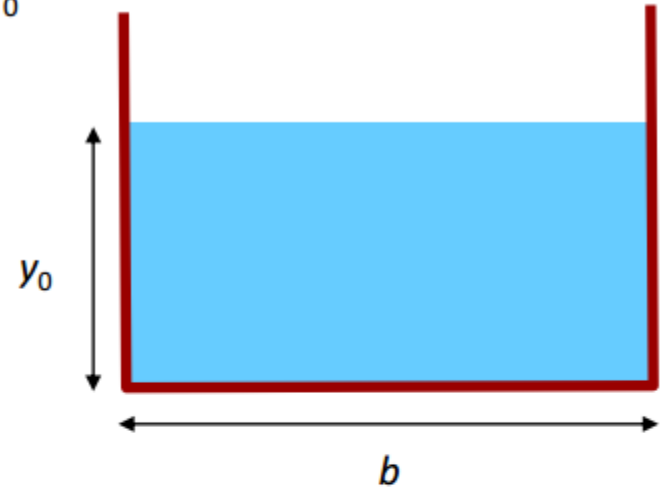
□ Συνθήκη στασιμότητας:

$$\partial \varphi / \partial b = 1 - \lambda y_0 = 0$$

$$\partial \varphi / \partial y_0 = 2 - \lambda b = 0$$

□ Από την επίλυση του συστήματος προκύπτει η βέλτιστη αναλογία διαστάσεων της διατομής:

$$b = 2y_0$$



Χειρισμός περιορισμών μέσω συναρτήσεων ποινής

Η ύπαρξη **περιορισμών** σε ένα μη γραμμικό πρόβλημα βελτιστοποίησης δυσχεραίνει εξαιρετικά την διαδικασία βελτιστοποίησης, καθώς προϋποθέτει:

- την αναλυτική έκφραση των παραγώγων της στοχικής συνάρτησης και των περιορισμών (ώστε να μπορούν να διατυπωθούν οι συνθήκες Kuhn-Tucker).
- την εύρεση των στάσιμων σημείων της βοηθητικής συνάρτησης, δηλαδή των διανυσμάτων $\mathbf{x}^*$ και λ^* (αναγκαία συνθήκη στασιμότητας).
- την ισχύ της ικανής συνθήκης κυρτότητας.

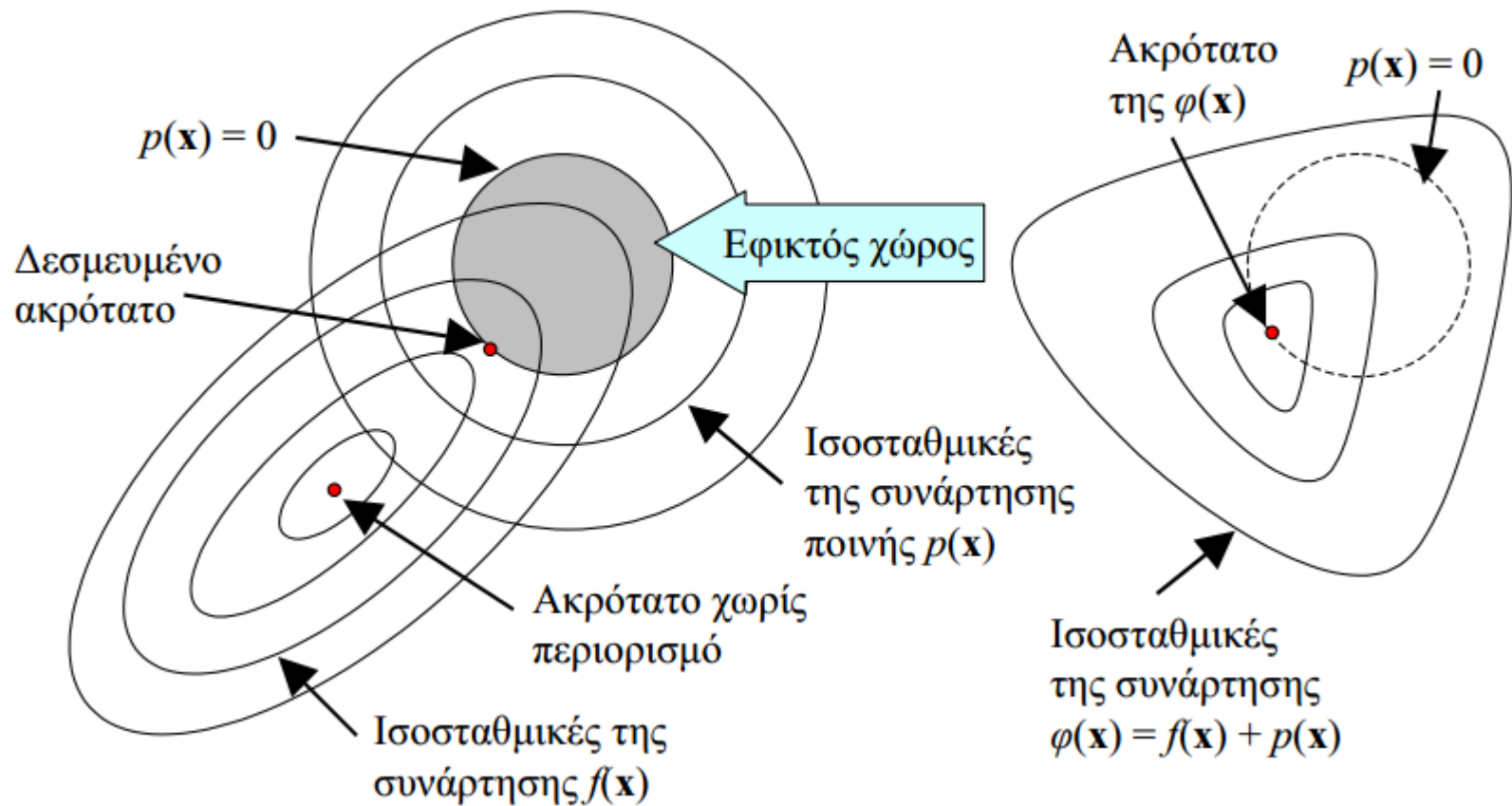
Εναλλακτικά, οι περιορισμοί ενσωματώνονται στη στοχική συνάρτηση ως **συναρτήσεις ποινής** (penalty functions). Στην περίπτωση αυτή, ορίζεται ένα μετασχηματισμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς, της μορφής:

$$\min \varphi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k p_i(\mathbf{x})$$

όπου $p_i(\mathbf{x}) \geq 0$ κατάλληλα ορισμένη συνάρτηση, τέτοια ώστε $p_i(\mathbf{x}) = 0$ αν $g_i(\mathbf{x}) \leq 0$, και $p_i(\mathbf{x}) > 0$ αν $g_i(\mathbf{x}) > 0$. Μειονέκτημα της παραπάνω προσέγγισης είναι:

- ο αυθαίρετος ορισμός των συναρτήσεων $p_i(\mathbf{x})$.
- η ύπαρξη ασυνέχειας στο όριο του εφικτού χώρου (συνήθως δεχόμαστε $p_i(\mathbf{x}) \approx 0$ αν δεν παραβιάζεται ο περιορισμός ή παραβιάζεται οριακά, και $p_i(\mathbf{x}) \gg 0$ αλλιώς).

Γεωμετρική ερμηνεία συναρτήσεων ποινής



Παρατήρηση: Ενώ με την προσθήκη των όρων ποινής αίρονται όλοι οι περιορισμοί, οπότε ο εφικτός χώρος ταυτίζεται με το R^n , αλλοιώνεται η επιφάνεια απόκρισης της στοχικής συνάρτησης, η γεωμετρία της οποίας γίνεται γενικά πιο πολύπλοκη.

Παράδειγμα:

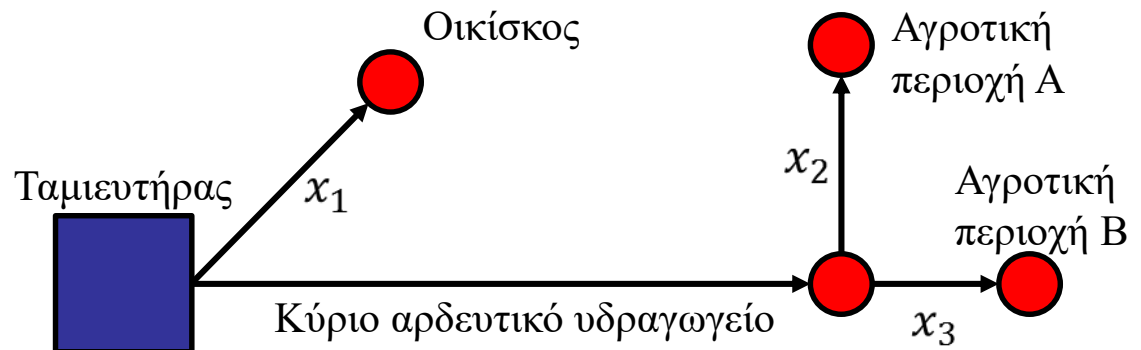
Βέλτιστη κατανομή υδατικών πόρων

- Ταμιευτήρας χρησιμοποιείται για την ύδρευση ενός οικισμού και την άρδευση δύο αγροτικών περιοχών. Η ολική ποσότητα νερού που διατίθεται ανά έτος είναι **10 hm³**, ενώ η παροχρεωτικότητα του κύριου αρδευτικού υδραγωγείου, ανηγμένη σε ετήσια βάση, ανέρχεται σε 6 hm³.
- Για λόγους πολιτικής πρέπει να δοθούν τουλάχιστον 2 hm³ για την ύδρευση και από 1 hm³ για τις δύο αρδευτικές χρήσεις.
- Να εκτιμηθεί η **βέλτιστη κατανομή νερού** για τις τρεις χρήσεις, ώστε να μεγιστοποιείται το κέρδος από αυτό. Δίνονται οι συναρτήσεις απόδοσης για τις τρεις χρήσεις:

$$f_1(x_1) = 4x_1^{1.3}$$

$$f_2(x_2) = 5\exp(0.3x_2 - 1)$$

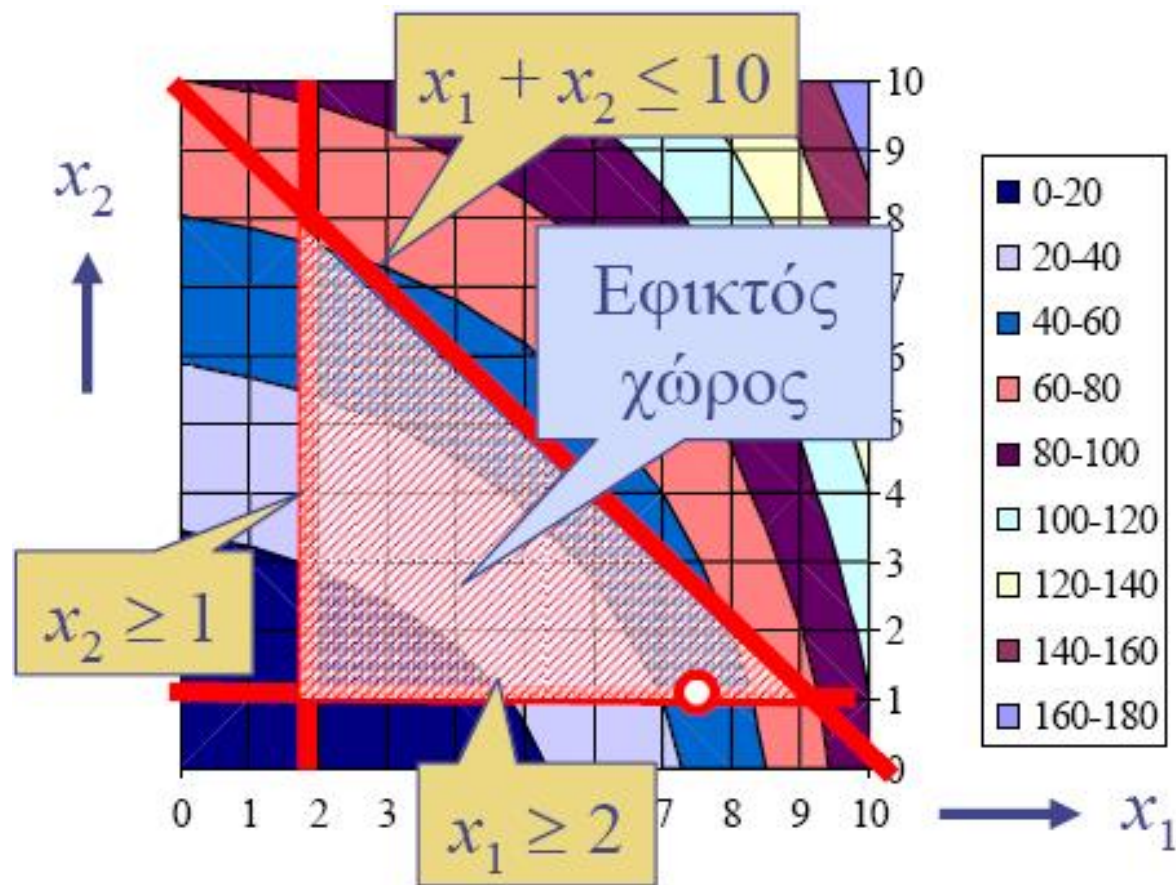
$$f_3(x_3) = 15(2x_3)^{0.5}$$

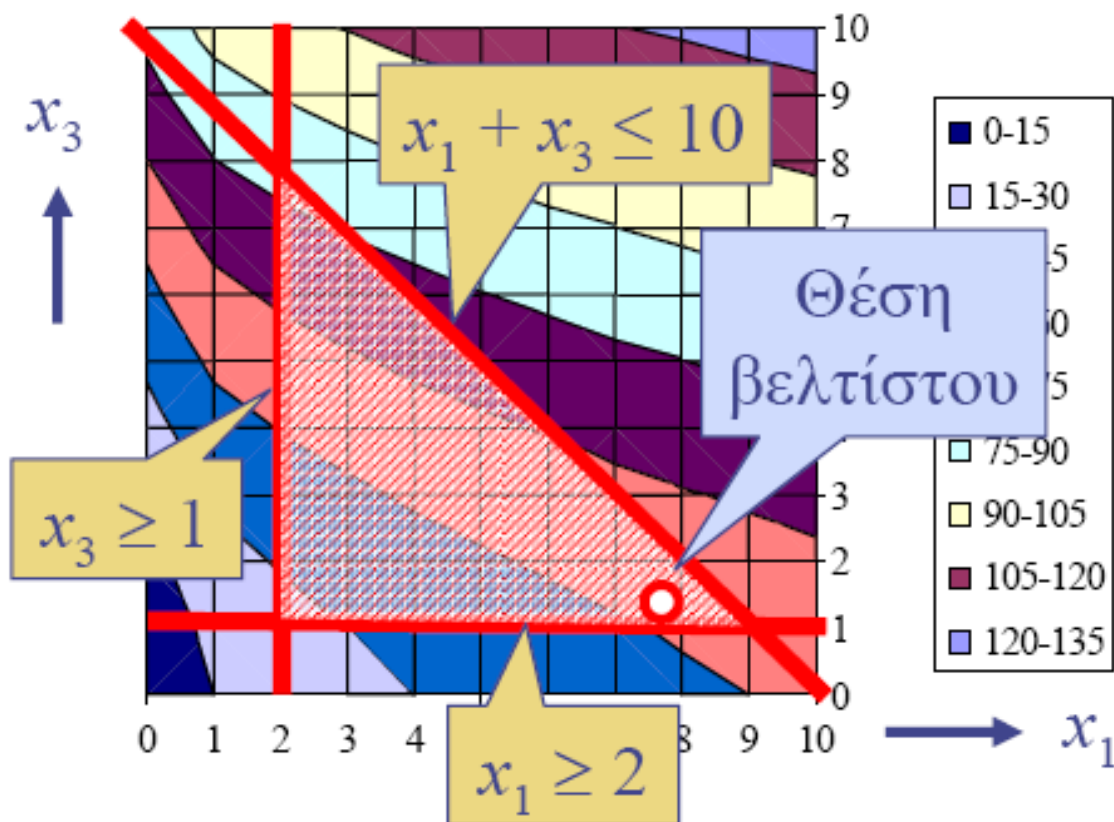


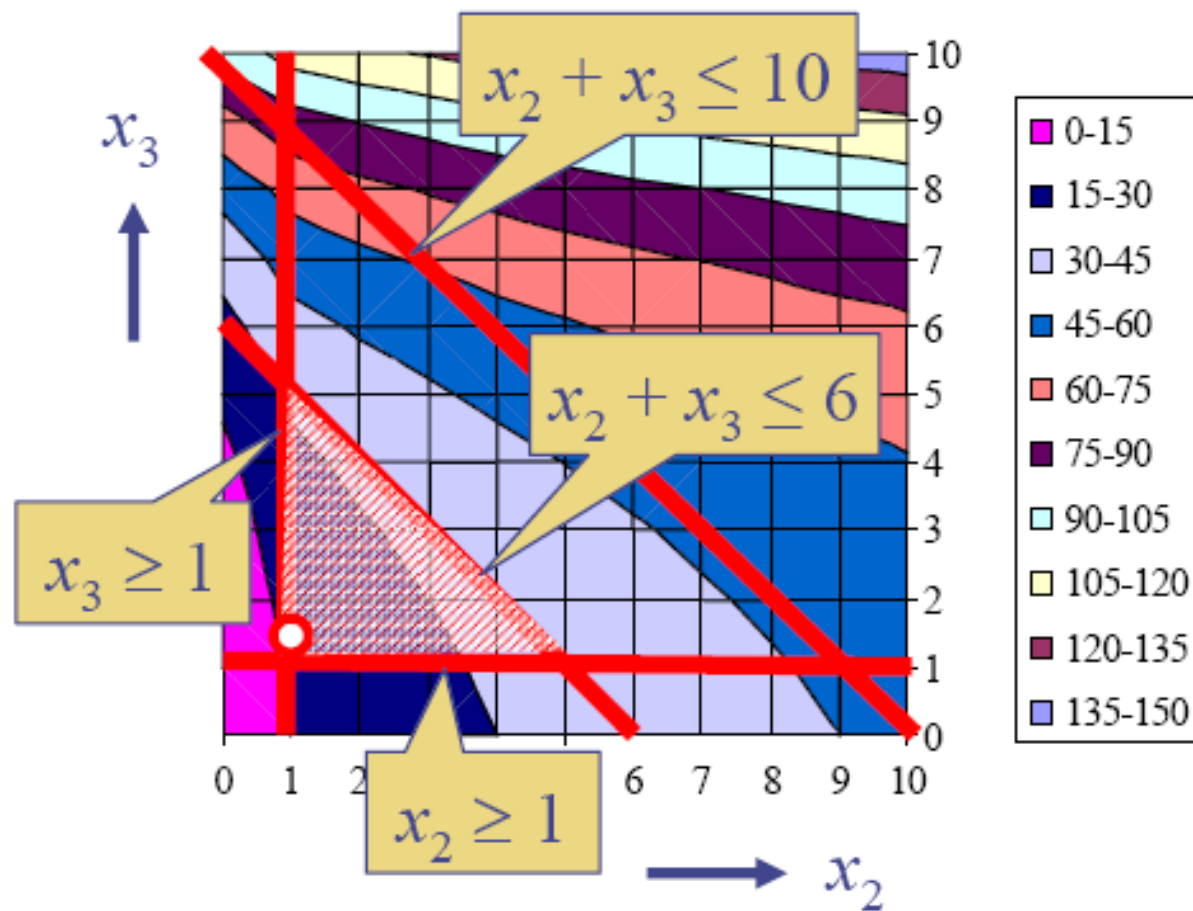
- **Μεταβλητές ελέγχου:** ποσότητες που διατίθεται για ύδρευση (x_1), άρδευση περιοχής Α (x_2) και άρδευση περιοχής Β (x_3).
- **Αντικειμενική συνάρτηση** (= οικονομικό όφελος, προς μεγιστοποίηση):

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^{1.3} + 5 \exp(0.3x_2 - 1) + 15(2x_3)^{0.5}$$

- **Φυσικοί περιορισμοί :**
 - Συνολική ποσότητα που διατίθεται: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$
 - Παροχευτικότητα κύριου αρδευτικού υδραγωγείου: $x_2 + x_3 \leq 6$
- **Λειτουργικοί περιορισμοί :**
 - Ελάχιστη απαίτηση για ύδρευση: $x_1 \geq 2$
 - Ελάχιστη απαίτηση για άρδευση περιοχής Α: $x_2 \geq 1$
 - Ελάχιστη απαίτηση για άρδευση περιοχής Β: $x_3 \geq 1$







- Αν δεν υπήρχαν περιορισμοί, η βέλτιστη λύση θα ήταν...?
- Εξαιτίας του **εξισωτικού περιορισμού**, η βέλτιστη λύση βρίσκεται πάνω σε ένα επίπεδο- ποιο;

Επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης

- Επίλυση με **εξονυχιστική απαρίθμηση** όλων των λύσεων.
- Με τυχαία αναζήτηση (Random Search)...
- Επίλυση με αναλυτικές, μαθηματικές μεθόδους (**hill climbing**)
- Επίλυση με **δυναμικό προγραμματισμό**, με διάσπαση του προβλήματος σε στάδια και διακριτοποίηση του πεδίου ορισμού των μεταβλητών.
- Επίλυση με **γραμμικό προγραμματισμό**, με «γραμμικοποίηση» της αντικειμενικής συνάρτησης.
- Επίλυση με **μη γραμμικές τεχνικές** (π.χ. εξελικτικοί αλγόριθμοι), με ενσωμάτωση των περιορισμών ως όρων ποινής στη αντικειμενική συνάρτηση.

Εξονυχιστική Απαρίθμηση

- Επιλέγεται ένα βήμα **διακριτοποίησης** των μεταβλητών ελέγχου (π.χ. 1 hm³), το οποίο προσδιορίζει την **ακρίβεια** προσέγγισης της βέλτιστης λύσης.

$$f_1(x_1) = 4x_1^{1.3}$$

$$f_2(x_2) = 5\exp(0.3x_2 - 1)$$

$$f_3(x_3) = 15(2x_3)^{0.5}$$

Περιορισμοί:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

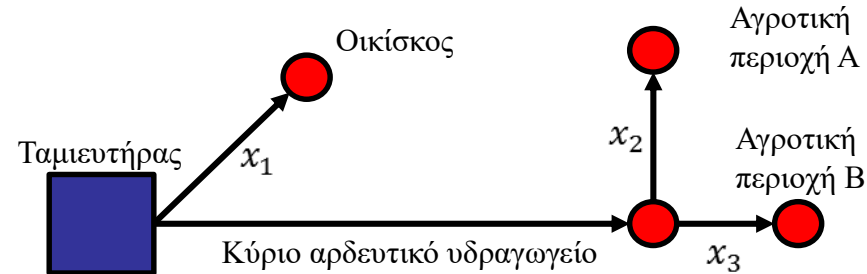
$$x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_2, x_3 \geq 1$$

- Εξετάζονται **όλοι οι συνδυασμοί** λύσεων, δηλαδή $11^3 = 1331$ συνδυασμοί, και απορρίπτονται αυτοί που παραβιάζουν τους περιορισμούς ως μη εφικτοί.

- Από το σύνολο των **εφικτών λύσεων**, εντοπίζεται αυτή που μεγιστοποιεί την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης.



$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^{1.3} + 5\exp(0.3x_2 - 1) + 15(2x_3)^{0.5}$$

Λύση	x_1	x_2	x_3	g_1	g_2	g_3	f	Εφικτή
A	1	0	0	4.000	0.000	0.000	4.000	Όχι
B	5	1	4	32.413	1.749	42.426	76.589	Ναι
Γ	8	3	5	59.714	7.298	47.434	114.446	Όχι
Δ	4	3	3	24.251	7.298	36.742	68.292	Ναι

Κόστος μιας τέτοιας προσέγγισης

Πλήθος
μεταβλητών

- Απαιτούμενος αριθμός δοκιμών για $n = 10$
και $\delta = 0.001$ $h m^3$: περίπου $1001^{10} \sim 10^{30} !!!$
- Απαιτούμενος αριθμός δοκιμών με
εξελικτικό αλγόριθμο: 10^3 έως 10^4

Τυχαία Αναζήτηση

maxf=0

For j=1 to n

 x2=rand[εφικτό]

 x3=rand[εφικτό]

 x1=10-x2-x3

 Calculate: f(x1,x2,x3)

 IF f(x1,x2,x3) > maxf

 maxf= f(x1,x2,x3)

 maxx1=x1

 maxx2=x2

 maxx3=x3

 end

Next j

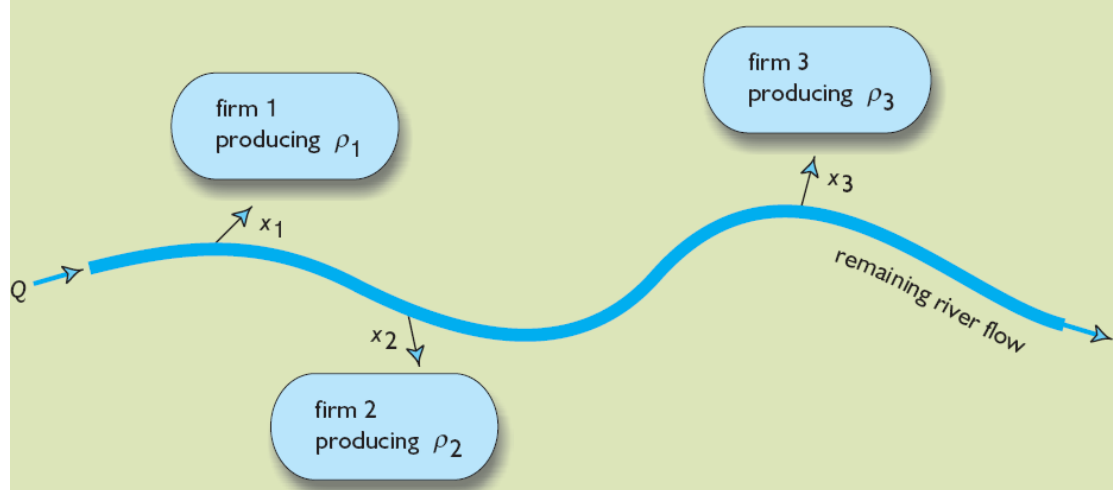
n: αριθμός επαναλήψεων

(Δυστυχώς μεγάλος – και το
αποτέλεσμα δεν είναι εγγυημένο)

Αναλυτικές μέθοδοι (gradient or hill-climbing methods)

- Βασίζονται στις μερικές παραγώγους των συναρτήσεων
- Προϋποθέτουν συνέχεια, ύπαρξη παραγώγων και μοναδικού ελάχιστου
- Καταλήγουν σε τοπικά βέλτιστα

Πρόβλημα



Έχουμε ένα ποτάμι και 3 εργοστάσια που ανήκουν στην ίδια εταιρεία και φτιάχνουν διαφορετικά προϊόντα (που χρειάζονται **όσο περισσότερο νερό γίνεται** στη διαδικασία παραγωγής).

- Εργοστάσια $j = 1, 2$ and 3
- Κατανομή νερού x_j και R (η οικολογική παροχή)

- Ποια κατανομή **μεγιστοποιεί το συνολικό καθαρό κέρδος** της εταιρείας; ($\sum_j NB_j(x_j)$).
- Το συνολικό νερό περιορίζεται σε μια ποσότητα.
- Υποθέστε ότι το καθαρό κέρδος $NB_j(x_j)$, από το νερό x_j για κάθε εργοστάσιο j , είναι:

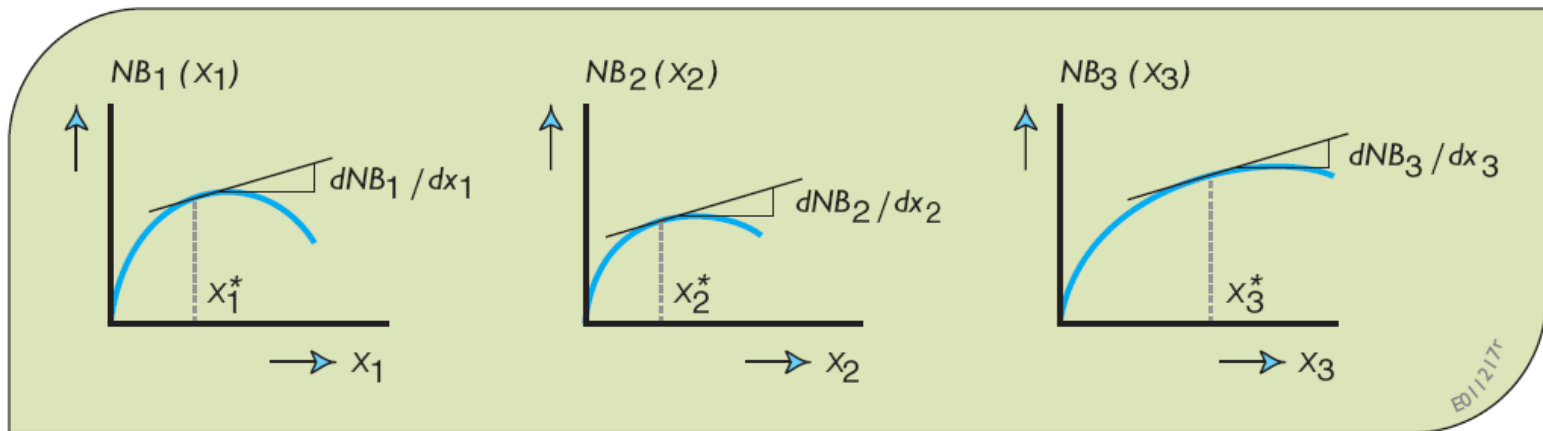
$$NB_1(x_1) = 6x_1 - x_1^2$$

$$NB_2(x_2) = 7x_2 - 1.5x_2^2$$

$$NB_3(x_3) = 8x_3 - 0.5x_3^2$$

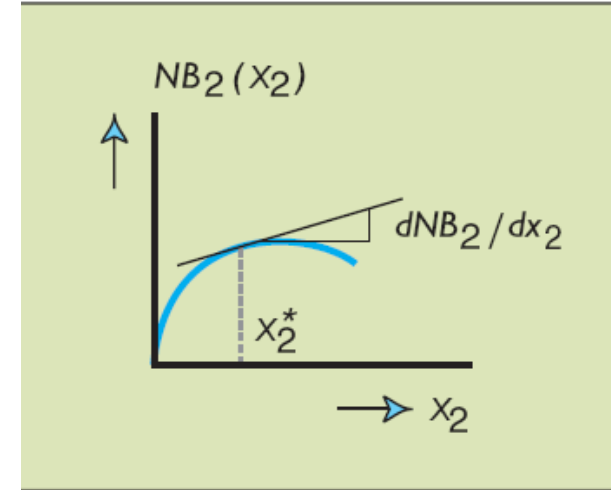
Επίλυση με Αναλυτική μέθοδο (κλίσεις- gradients)

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το βέλτιστο σημείο για κάθε εργοστάσιο **ξεχωριστά** (το μέγιστο της συνάρτησης: $df/dx=0$)
- $dNB(x_1)/dx_1 = 0$ για $x_1 = 3$ ($x_2=2.33$, $x_3=8$)
- Σύνολο: 13.33
- Τι γίνεται όμως αν έχουμε μόνο 6;
- Προφανώς η απλή ανάλυση δεν αρκεί (η λύση 13.33 είναι ανέφικτη).

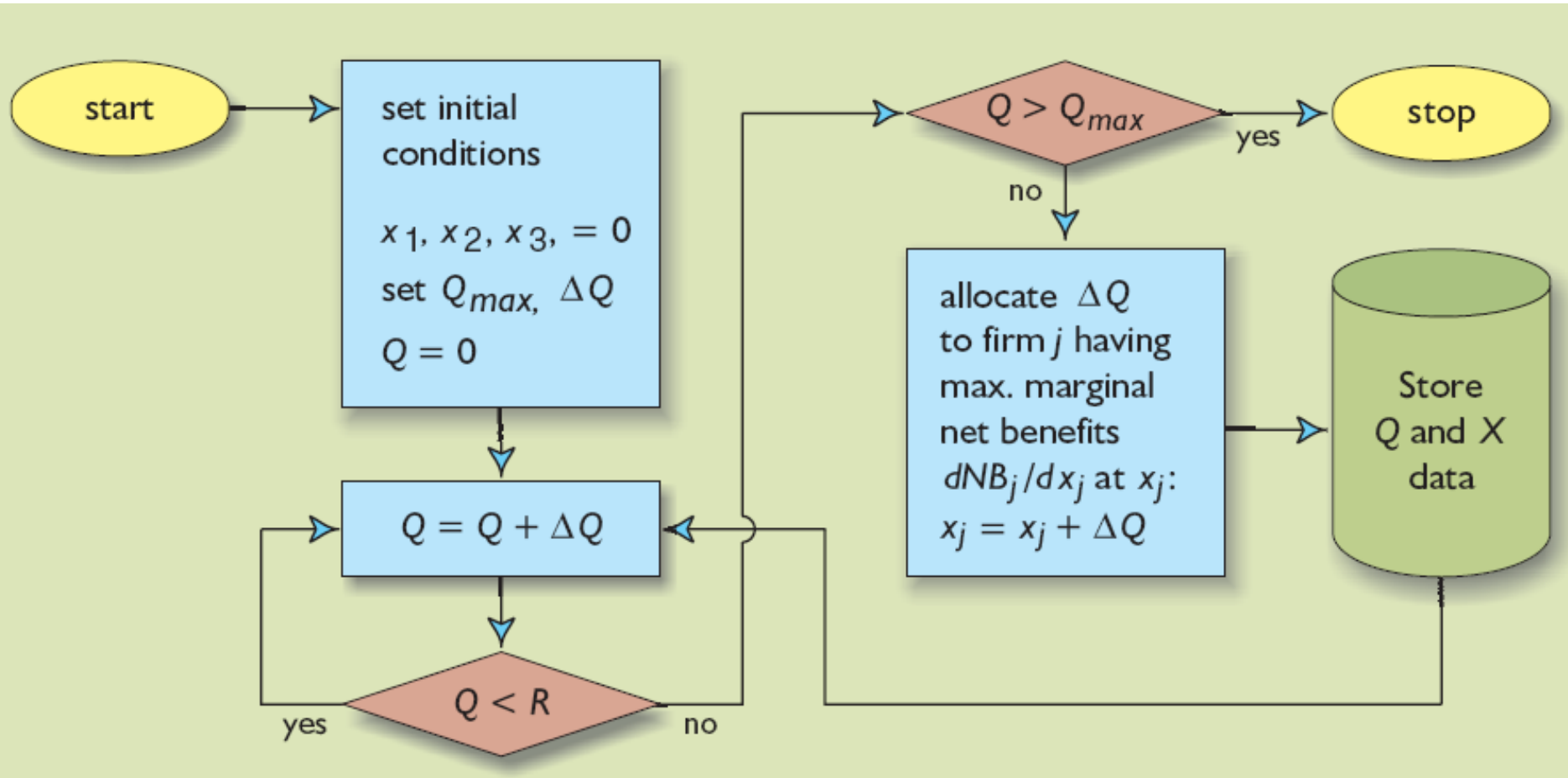


Hill Climbing

- Αναλυτική μέθοδος.
- Η μέθοδος διαιρεί το διαθέσιμο Q σε ΔQ
- Κατανέμει το κάθε ΔQ με τρόπο ώστε να προκύπτει **η μέγιστη σχετική αύξηση** του καθαρού κέρδους για το ΔQ .
- Η διαδικασία δουλεύει εδώ γιατί οι συναρτήσεις είναι **κοίλες**: το σχετικό κέρδος μειώνεται όσο περισσότερο νερό κατανέμεται νερού.



Διάγραμμα ροής ενός αλγορίθμου «hill climbing»



R: οικολογική παροχή

Επίλυση (για $Q_{\max}=8, R=2$)

$Q_{\max} = 8; Q_i = 0; \Delta Q = 1; \text{ river flow } R \geq \min \{Q, 2\}$

iteration i	Q_i	allocations. R, x_j			marginal net benefits dNB/dx			$Q_i + \Delta Q$		new allocations			total net benefits $\Sigma_j NB_a(x_1)_j$	
		R	x_1	x_2	x_3	$6-2x_1$	$7-3x_2$	$8-x_3$		R	x_1	x_2	x_3	
1-3	0-2	0-2	0	0	0	6	7	8	3	2	0	0	1	7.5
4	3	2	0	0	1	6	7	7	4	2	0	0	2	14.0
5	4	2	0	0	2	6	7	6	5	2	0	1	2	19.5
6	5	2	0	1	2	6	4	6	6	2	0	1	3	25.0
7	6	2	0	1	3	6	4	5	7	2	1	1	3	30.0
8	7	2	1	1	3	4	4	5	8	2	1	1	4	34.5
9	8	2	1	1	4	4	4	4	-	-	-	-	-	---

Η διαδικασία σταματά όταν

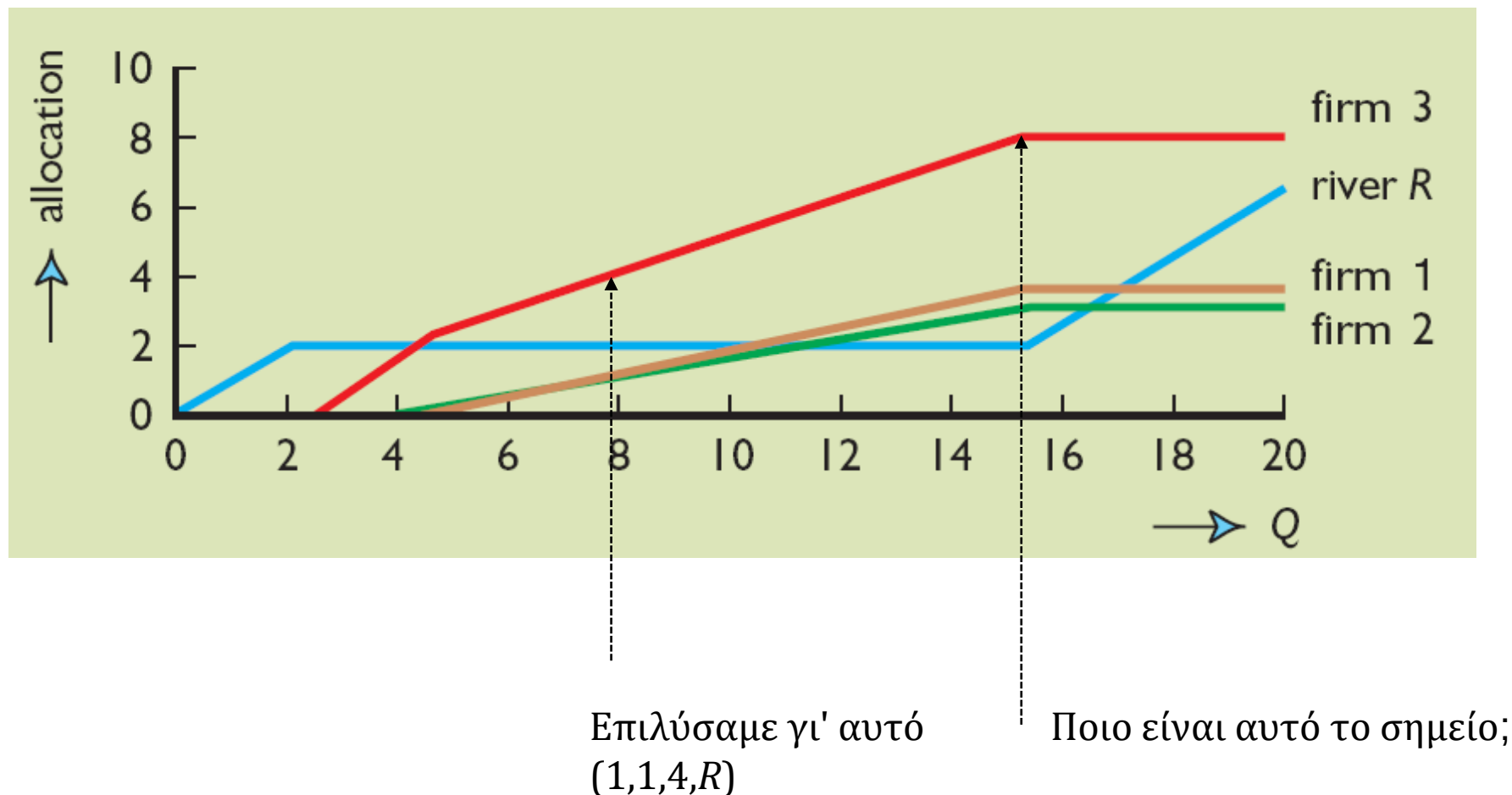
Η διαδικασία σταματά όταν η μέγιστη σχετική αύξηση είναι ισο-μοιρασμένη

Όσο μικρότερο το ΔQ , τόσο πιο ακριβές το αποτέλεσμα

Μικρό $\Delta Q \rightarrow$ καλύτερη κατανομή

$Q_{max} = 20;$		$\Delta Q \rightarrow 0;$			river flow $R \geq \min \{Q, 2\}$			selected values of Q	
Q		allocations. R, x_j			marginal net benefits			total net benefits	
	R	x_1	x_2	x_3	$6-2x_1$	$7-3x_2$	$8-x_3$	$\sum_j NB_j(x_1)$	
0-2	0-2	0	0	0	6	7	8	0.0	
4	2	0	0.25	1.75	6.00	6.25	6.25	14.1	
5	2	0.18	0.46	2.36	5.64	5.64	5.64	20.0	
8	2	1.00	1.00	4.00	4.00	4.00	4.00	34.5	
10	2	1.55	1.36	5.09	2.91	2.91	2.91	41.4	
15	2	2.91	2.27	7.82	0.18	0.18	0.18	49.1	
20	6.67	3.00	2.33	8.00	0	0	0	49.2	

Πολιτική κατανομής στα εργοστάσια;



Λύση με πολλαπλασιαστές Lagrange

- Ας υποθέσουμε ότι το κέρδος των εργοστασίων $B_j(x_j)$, καθορίζεται εν μέρει **από τη ποσότητα** του προϊόντος που παράγει και **τη τιμή μονάδας**.
- Όπως πριν, το νερό είναι ο περιοριστικός παράγοντας.
- Η ποσότητα του παραγόμενου προϊόντος p_j , από κάθε εργοστάσιο j *εξαρτάται από το νερό x_j που παίρνει το εργοστάσιο*.
- $P_j(x_j)$ είναι ο **μέγιστος αριθμός προϊόντος**, p_j , που μπορεί να παράγει το εργοστάσιο j *αν πάρει νερό x_j* .

(Συναρτήσεις παραγωγής: γενικά κοίλες = όσο αυξάνει το x_j , η κλίση $dP_j(x_j)/dx_j$ της συνάρτησης παραγωγής μειώνεται).

Δεδομένα

Συναρτήσεις Παραγωγής

$$p_1 = 0.4(x_1)^{0.9}$$

$$p_2 = 0.5(x_2)^{0.8}$$

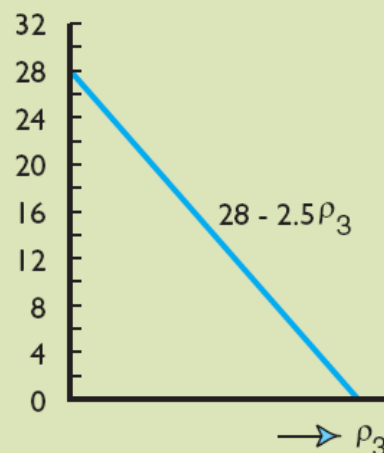
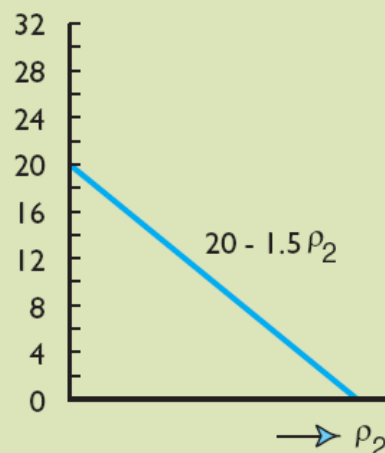
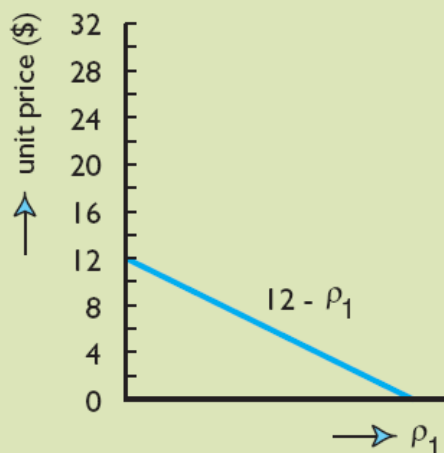
$$p_3 = 0.6(x_3)^{0.7}$$

Συναρτήσεις Κόστους Παραγωγής

$$C_1 = 3(p_1)^{1.3}$$

$$C_2 = 5(p_2)^{1.2}$$

$$C_3 = 6(p_3)^{1.15}$$



Τιμές Μονάδας:
όσο μικρότερη η τιμή
τόσο περισσότερο
προϊόν μπορούν να
πουλήσουν

Αντικειμενική Συνάρτηση

$$\text{Net_benefit} = \text{Total_return} - \text{Total_cost}$$

$$\begin{aligned} \text{Total_return} = & (12 - p_1)p_1 + (20 - 1.5p_2)p_2 \\ & + (28 - 2.5p_3)p_3 \end{aligned}$$

$$\text{Total_cost} = 3(p_1)^{1.30} + 5(p_2)^{1.20} + 6(p_3)^{1.15}$$

$$p_1 \leq 0.4(x_1)^{0.9}$$

$$p_2 \leq 0.5(x_2)^{0.8}$$

$$p_3 \leq 0.6(x_3)^{0.7}$$

Περιορισμοί:
Σχέση νερού και
παραγωγής

Επίλυση

- Μπορούμε (αρχικά) να βρούμε το μέγιστο καθαρό κέρδος για κάθε εργοστάσιο θεωρώντας ότι δεν υπάρχει πρόβλημα διαθέσιμου νερού:

$$\begin{aligned}\text{Total Net_benefit} = & [(12 - p_1)p_1 + (20 - 1.5p_2)p_2 \\ & + (28 - 2.5p_3)p_3] - [3(p_1)^{1.30} \\ & + 5(p_2)^{1.20} + 6(p_3)^{1.15}]\end{aligned}$$

Και να υπολογίσουμε
που μηδενίζεται η
πρώτη παράγωγος για
κάθε εργοστάσιο:

$$\partial(\text{Net_benefit})/\partial p_1 = 0 = 12 - 2p_1 - 1.3(3)p_1^{0.3}$$

$$\partial(\text{Net_benefit})/\partial p_2 = 0 = 20 - 3p_2 - 1.2(5)p_2^{0.2}$$

$$\partial(\text{Net_benefit})/\partial p_3 = 0 = 28 - 5p_3 - 1.15(6)p_3^{0.15}$$

- Προκύπτει $p_1=3.2$, $p_2=4.0$, $p_3=3.9$
- Μέγιστο καθαρό κέρδος 155.75.
- Αυτό θέλει $x_1=10.2$, $x_2=13.6$ και $x_3=14.5 = 38.3$ μονάδες παροχής.

Αν έχουμε λιγότερο;

Πρέπει να προσθέσουμε τους περιορισμούς σαν ισότητες:

Θυμηθείτε ότι:

$$p_1 \leq 0.4(x_1)^{0.9}$$

$$p_2 \leq 0.5(x_2)^{0.8}$$

$$p_3 \leq 0.6(x_3)^{0.7}$$

Περιορισμοί:

Σχέση νερού και παραγωγής



$$p_1 - 0.4(x_1)^{0.9} = 0$$

$$p_2 - 0.5(x_2)^{0.8} = 0$$

$$p_3 - 0.6(x_3)^{0.7} = 0$$

$$R + x_1 + x_2 + x_3 - Q = 0$$

Όμως, από Kuhn-Tucker: Δεδομένου ότι $\lambda_i g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ για κάθε i , το ολικό ακρότατο της $\varphi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ ταυτίζεται με το ολικό ακρότατο της $f(\mathbf{x})$, δηλαδή $\varphi(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = f(\mathbf{x}^*)$.

$$\begin{aligned} L = & [(12 - p_1)p_1 + (20 - 1.5p_2)p_2 + (28 - 2.5p_3)p_3] \\ & - [3(p_1)^{1.30} + 5(p_2)^{1.20} + 6(p_3)^{1.15}] \\ & - \lambda_1[p_1 - 0.4(x_1)^{0.9}] - \lambda_2[p_2 - 0.5(x_2)^{0.8}] \\ & - \lambda_3[p_3 - 0.6(x_3)^{0.7}] - \lambda_4[R + x_1 + x_2 + x_3 - Q] \end{aligned}$$



Πολλαπλασιαστές Lagrange

Παίρνοντας παραγώγους ως προς τους 10 αγνώστους προκύπτουν 10 εξισώσεις:

$$\partial L / \partial p_1 = 0 = 12 - 2p_1 - 1.3(3)p_1^{0.3} - \lambda_1$$

$$\partial L / \partial p_2 = 0 = 20 - 3p_2 - 1.2(5)p_2^{0.2} - \lambda_2$$

$$\partial L / \partial p_3 = 0 = 28 - 5p_3 - 1.15(6)p_3^{0.15} - \lambda_3$$

$$\partial L / \partial x_1 = 0 = \lambda_1 0.9(0.4)(x_1)^{-0.1} - \lambda_4$$

$$\partial L / \partial x_2 = 0 = \lambda_2 0.8(0.5)(x_2)^{-0.2} - \lambda_4$$

$$\partial L / \partial x_3 = 0 = \lambda_3 0.7(0.6)(x_3)^{-0.3} - \lambda_4$$

$$\partial L / \partial \lambda_1 = 0 = p_1 - 0.4(x_1)^{0.9}$$

$$\partial L / \partial \lambda_2 = 0 = p_2 - 0.5(x_2)^{0.8}$$

$$\partial L / \partial \lambda_3 = 0 = p_3 - 0.6(x_3)^{0.7}$$

$$\partial L / \partial \lambda_4 = 0 = R + x_1 + x_2 + x_3 - Q$$

Τι κάνουμε εδώ;

Μεγιστοποιούμε την αντικειμενική συνάρτηση ($\nabla f(x^*)=0$)

Οι οποίες μπορούν να επιλυθούν σαν
 σύστημα (βλ. μαθηματικά 1^{ου}-2^{ου} εξαμήνου)
 για διαφορετικές τιμές του Q

water	allocations to firms			product productions			Lagrange multipliers			
available	1	2	3	1	2	3	marginal net benefits			
$Q-R$	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2	p_3	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
10	1.2	3.7	5.1	0.46	1.44	1.88	8.0	9.2	11.0	2.8
20	4.2	7.3	8.5	1.46	2.45	2.68	4.7	5.5	6.6	1.5
30	7.5	10.7	11.7	2.46	3.34	3.37	2.0	2.3	2.9	0.6
38	10.1	13.5	14.4	3.20	4.00	3.89	0.1	0.1	0.1	0.0
38.3	10.2	13.6	14.5	3.22	4.02	3.91	0	0	0	0

Προσοχή:

- Δεν είναι σίγουρο ότι έχουμε πραγματικά βέλτιστη λύση με αναλυτικές μεθόδους (μπορεί να είναι τοπικά ακρότατα).
- Οι πολλαπλασιαστές δεν διαχωρίζουν μέγιστα από ελάχιστα (απλά $df/dx=0$), άρα πρέπει να προσέχετε τη μορφή της συνάρτησης.