Πρόχειρες Σημειώσεις Ανάλυσης ΙΙ

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Βασικές έννοιες στον χώρο $\mathbb{R}^n$

1.1. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$, εσωτερικό γινόμενο, μήκος και απόσταση.

(α) Ο *διανυσματικός χώρος* $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των *σημείων (ή διανυσμάτων)* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, (όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$), εφοδιασμένο με τις πράξεις της *πρόσθεσης*:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

για κάθε $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και του *βαθμωτού πολλαπλασιασμού*:

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ αποτελούν την λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρείστε ότι αν $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ είναι ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i.$$

(Επιβεβαιώστε ότι το σύνολο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις είναι όντως διανυσματικός χώρος (επί του $\mathbb{R}$) και ότι τα $\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$ είναι όντως μία βάση του).

(β) Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Το $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ καλείται *(το συνήθες) εσωτερικό γινόμενο* των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις εξής ιδιότητες: (1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$ και άρα $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (2) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$. (3)$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$. (4) $(\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})$.

Αν $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ τότε τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ καλούνται *ορθογώνια*. Αν $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$, παρατηρείστε ότι $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ για κάθε $i \neq j$ και συνεπώς δύο διαφορετικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια.

(γ) Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το *μήκος* (ή την *νόρμα*) του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Κατά αναλογία της ιδιότητας $|x| = \sqrt{x^2}$ για $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

Η ανισότητα Cauchy-Schwarz στον $\mathbb{R}^n$ λέει ότι αν $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

ή ισοδύναμα αν $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ τότε

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

(δείξτε την παραπάνω ανισότητα υψώνοντας στο τετράγωνο και συνεχίζοντας με πράξεις).

Επίσης είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις παρακάτω ιδιότητες του μήκους (ανάλογες της απολύτου τιμής του $\mathbb{R}$):

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Τέλος, όπως στον $\mathbb{R}$ η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών είναι η απόλυτη τιμή τηω διαφοράς τους, η ποσότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$$

ορίζεται να ε·ιναι η *απόσταση* των $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Παρατηρείστε ότι

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}, \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$$

και για κάθε $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$,

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|.$$

Παραδειγμα 1.1. Έστω $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| \right) \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Λύση: Έστω $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Απο την ανισότητα Cauchy-Schwarz στον $\mathbb{R}^n$ για $\mathbf{x} = (|x_1|, \ldots, |x_n|)$ και $\mathbf{y} = (1, \ldots, 1)$ έχουμε

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| = \left| \sum_{i=1}^{n} |x_i| \cdot 1 \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{n}$$

και άρα

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{1.1}$$

Επίσης
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{1.2}$$
αφού
$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i| \cdot |x_j| \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Παραδειγμα 1.2. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι
$$\|\mathbf{x}\| = \max\{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \text{ και } \|\mathbf{a}\| = 1\}. \tag{1.3}$$

Λύση: Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Αν $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ τότε $\|\mathbf{x}\| = 0$ και $\mathbf{a}\cdot\mathbf{0} = 0$ για κάθε $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, οπότε η ανι΄σοτητα (1.3) ισχύει τετριμένα αφού και τα δύο μέλη της είναι ίσα με το μηδέν. Αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε
$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} \leq \|\mathbf{a}| \cdot \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$$
για οποιοδήποτε $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\mathbf{a}\| = 1$. Άρα
$$\sup\{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} : \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \text{ και } \|\mathbf{a}\| = 1\} \leq \|\mathbf{x}\|. \tag{1.4}$$
Απο την άλλη μεριά, $\|x\| \neq 0$ και αν $\mathbf{a}_0 = \dfrac{1}{\|x\|}\mathbf{x}$ τότε $\|\mathbf{a}_0\| = 1$ και
$$\mathbf{a}_0\cdot\mathbf{x} = \left(\frac{1}{\|x\|}\mathbf{x}\right)\cdot\mathbf{x} = \frac{1}{\|x\|}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}) = \frac{1}{\|x\|}\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\| \tag{1.5}$$
(αφού $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$ απο τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου και τοψ μήκους.) Απο τις (1.4) και (1.5) έχουμε το ζητούμενο.

1.2. Ανοικτές και κλειστές μπάλες του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Το σύνολο
$$B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$$
καλείται *ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας ε.* Με άλλα λόγια το $B_r(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν απο το $\mathbf{x}_0$ απόσταση *γνήσια μικρότερη* του ε. Οι ανοικτές μπάλες $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ καλούνται και *(βασικές ανοικτές) περιοχές* του $\mathbf{x}_0$ και αποτελούν γενίκευση των ανοικτών διαστημάτων $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ του $\mathbb{R}$. Το σύνολο
$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon\}$$
καλείται *κλειστή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας ε.* Τέλος το σύνολο
$$S_\varepsilon((\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon\}$$
καλείται *κλειστή σφαίρα του $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας ε.* Προφανώς
$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cup S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$$

Παραδειγμα 1.3. Έστω $\mathbf{Q}^n = \{x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Q}\}$ το σύνολο όλων των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ με ρητές συντεταγμένες.

(α) Δείξτε ότι το $\mathbb{Q}^n$ είναι *πυκνό* στο $\mathbb{R}^n$ δηλαδή σε κάθε ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ περιέχεται ένα σημείο του $\mathbb{Q}^n$.

(β) Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Δείξτε ότι υπάρχουν $\mathbf{x}_0' \in \mathbb{Q}^n$ και $\varepsilon' > 0$ *ρητός* με

$$\mathbf{x}_0 \in B_{\varepsilon'}(\mathbf{x}_0') \subseteq B_\varepsilon(\mathbf{x}_0).$$

(*κάντε ένα σχήμα*).

Λύση: (α) Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Έστω $\delta > 0$ αρκετά μικρό (θα προσδιορισθεί στην συνέχεια). Έστω $1 \leq i \leq n$. Απο την *πυκνότητα των ρητών στο* $\mathbb{R}$ υπάρχει ρητός αριθμός $x_i' \in (x_i - \delta, x_i + \delta)$. Θέτουμε $\mathbf{x}_0' = (x_1', \ldots, x_n')$. Τότε $\mathbf{x}_0' \in \mathbb{Q}^n$ και

$$\|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i)^2 < n\delta^2$$

ή ισοδύναμα

$$\|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| < \sqrt{n} \cdot \delta. \tag{1.6}$$

Για να είναι $\mathbf{x}_0' \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ θα πρέπει $\|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$. Συνεπώς απο την (1.6) αρκεί δ να είναι ένας θετικός αριθμός με

$$\sqrt{n} \cdot \delta \leq \varepsilon \Leftrightarrow \delta \leq \varepsilon/\sqrt{n}.$$

(β) Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Απο το (α) έχουμε ότι υπάρχει $\mathbf{x}_0' \in \mathbb{Q}^n$ με

$$\mathbf{x}_0' \in B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0).$$

Ισοδύναμα, $\|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon/2 \Leftrightarrow \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0'\| < \varepsilon/2$ (αφού $\|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_0'\|$) δηλαδή $\mathbf{x}_0 \in B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0')$.

Μένει να δειχθεί ότι

$$B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0') \subseteq B_\varepsilon(\mathbf{x}_0).$$

Πράγματι έστω $\mathbf{y} \in B_{\varepsilon/2}(\mathbf{x}_0')$. Τότε

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0'\| < \varepsilon/2. \tag{1.7}$$

Επίσης απο την επιλογή του $\mathbf{x}_0'$,

$$\|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon/2. \tag{1.8}$$

Άρα απο τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0'\| + \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

και συνεπώς $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

1.3. Εσωτερικό, εξωτερικό και σύνορο ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(1) Το $\mathbf{x}$ καλείται ***εσωτερικό σημείο του*** X αν *υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$$

Το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του X καλείται ***εσωτερικό*** του X.

(2) Το $\mathbf{x}$ καλείται ***εξωτερικό σημείο του*** X αν *υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$$

(και άρα απο το (1) το $\mathbf{x}$ είναι εξωτερικό σημείο του X αν είναι εσωτερικό σημείο του *συμπληρώματος του* X). Το σύνολο όλων των εξωτερικών σημείων του X καλείται ***εξωτερικό*** του X.

(3) Το $\mathbf{x}$ καλείται ***συνοριακό σημείο του*** X αν *για κάθε* $\delta > 0$ έχουμε

$$B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \varnothing \text{ και } B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \neq \varnothing$$

Δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του X αν και μόνο αν κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}$ έχει μη κενή τομή με το X καθώς και με το συμπλήρωμα του X. Το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων του X καλείται ***σύνορο*** του X.

Παρατηρούμε ότι το εσωτερικό του X είναι υποσύνολο του X ενώ το εξωτερικό του X είναι υποσύνολο του συμπληρώματος του X και άρα ξένο με το X. Το δε σύνορο του X ενδέχεται να έχει μη κενή τομή και με το X και με το συμπλήρωμά του.

Πρόταση 1.1. *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ένα ακριβώς απο τα επόμενα ισχύει:*

(i) Το $\mathbf{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του X.

(ii) Το $\mathbf{x}$ είναι εξωτερικό σημείο του X.

(iii) Το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του X.

Με άλλα λόγια για κάθε $X \subseteq \mathbb{R}^n$, ***ο χώρος $\mathbb{R}^n$ διαμερίζεται σε τρία ξένα ανα δύο υποσύνολα (σε σχέση με το X): στο εσωτερικό του X, στο εξωτερικό του X και στο σύνορο του X.***

Απόδειξη. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Έστω και ένα $\delta > 0$. Έχουμε ότι $\mathbb{R}^n = X \cup (\mathbb{R}^n \setminus X)$ και άρα

$$\begin{aligned} B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap \mathbb{R}^n &= B_\delta(\mathbf{x}) \cap (X \cup (\mathbb{R}^n \setminus X)) \\ &= (B_\delta(\mathbf{x}) \cap X) \cup (B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X)) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ένα απο τα επόμενα θα ισχύει:

(1) *Υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) = \varnothing$. Στην περίπτωση αυτή $B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \subseteq X$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του X.

(2) *Υπάρχει* $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \varnothing$. Τότε $B_\delta(\mathbf{x}) = B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι εξωτερικό σημείο του X.

(3) *Για κάθε* $\delta > 0$, έχουμε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X \neq \varnothing$ και $B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) \neq \varnothing$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι συνοριακό σημείο του X.

Είναι φανερό ότι δεν μπορεί ένα $\mathbf{x}$ να είναι ταυτόχρονα συνοριακό και εσωτερικό (ή εξωτερικό) σημείο του X. Επίσης δεν μπορεί να συμβεί το $\mathbf{x}$ να είναι ταυτόχρονα εσωτερικό και εξωτερικό σημείο του X. Πράγματι αν αυτό συνέβαινε για κάποιο $\mathbf{x}$ τότε θα υπήρχαν $\delta_1 > 0$ και $\delta_2 > 0$ με

$$B_{\delta_1}(\mathbf{x}) \subseteq X \quad \text{και} \quad B_{\delta_2}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$$

Όμως τότε αν $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ θα ήταν

$$B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_{\delta_1}(\mathbf{x}) \subseteq X \quad \text{και} \quad B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_{\delta_2}(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus X$$

οπότε

$$B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X \cap (\mathbb{R}^n \setminus X) = \varnothing,$$

άτοπο. Άρα για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ακριβώς ένα απο τα (1)-(3) ισχύει. $\square$

Παραδειγμα 1.4. Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Έστω επίσης $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(α) Αν $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$, δηλαδή το $\mathbf{x}$ ανήκει στην ανοικτή μπάλα $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

(β) Αν $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon$, δηλαδή το $\mathbf{x}$ ανήκει στην σφαίρα $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, τότε για κάθε $\delta > 0$ η $B_\delta(\mathbf{x})$ έχει μη κενή τομή και με το $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και με το $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

(γ) Αν $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$, δηλαδή $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

Λύση: (α) Έστω $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Θέτουμε

$$\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \tag{1.9}$$

Αφού $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon \Leftrightarrow \delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > 0$. Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και απο τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \overset{(1.9)}{=} \varepsilon$$

Συνεπώς $\mathbf{y} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Επειδή το $\mathbf{y}$ είναι τυχόν σημείο της $B_\delta(\mathbf{x})$, έπεται ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

(β) Έστω $\mathbf{x} \in S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και έστω $\delta > 0$. Θεωρούμε την ευθεία L που διέρχεται απο τα $\mathbf{x}, \mathbf{x}_0$. Επειδή η L συνδέει το κέντρο $\mathbf{x}_0$ της ανοικτής μπάλας $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και το σημείο $\mathbf{x}$ της σφαίρας $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ κάνοντας ένα σχήμα βλέπουμε ότι θα περιέχει σημεία και της $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ αλλά και του συμπληρώματος της κλειστής μπάλας $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ *όσο κοντά θέλουμε στο* $\mathbf{x}$. Αυτό θα δείξουμε στην συνέχεια με έναν αυστηρό τρόπο.

Θυμίζουμε πρώτα κάποια βασικές έννοιες απο την Αναλυτική Γεωμετρία για τις ευθείες του $\mathbb{R}^n$. Η ευθεία L είναι η μοναδική ευθεία του $\mathbb{R}^n$ που διέρχεται απο το σημείο $\mathbf{x}$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Άρα ένα σημείο $\mathbf{y}$ ανήκει στην L αν και μόνο αν το διάνυσμα $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, ισοδύναμα υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{y} - \mathbf{x} = t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Συνεπώς

$$L = \{\mathbf{x} + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) : t \in \mathbb{R}\}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι η απόσταση ενός $\mathbf{y} \in L$ απο το $\mathbf{x}$ καθορίζεται απο το $t \in \mathbb{R}$ που ορίζει το $\mathbf{y}$. Πιο συγκεκριμένα αν $\mathbf{y} = \mathbf{x} + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ τότε

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}\| = \|t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| = |t| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|.$$

Άρα για ένα δοθέν $\delta > 0$ θα πρέπει να επιλέξουμε δύο κατάλληλα $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ώστε τα αντίστοιχα $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ που ορίζουν να είναι αφενός δ-κοντά στο $\mathbf{x}$ και αφεταίρου το ένα έξω απο την κλειστή μπάλα και το άλλο μέσα στην ανοικτή μπάλα κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας ε.

Για $t_1 = \dfrac{\delta}{2\varepsilon}$ παίρνουμε το σημείο

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x} + \frac{\delta}{2\varepsilon} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

της L το οποίο απέχει απο το $\mathbf{x}$ απόσταση

$$\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}\| = \|t_1(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| = \frac{\delta}{2\varepsilon} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \frac{\delta}{2\varepsilon} \cdot \varepsilon = \frac{\delta}{2}$$

και άρα $\mathbf{y}_1 \in B_\delta(\mathbf{x})$. Επιπλέον το $\mathbf{y}_1$ απέχει απο το $\mathbf{x}_0$ απόσταση

$$\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_0\| = \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 + \frac{\delta}{2\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right\| = \left(1 + \frac{\delta}{2\varepsilon}\right) \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \left(1 + \frac{\delta}{2\varepsilon}\right) \cdot \varepsilon = \varepsilon + \frac{\delta}{2}$$

και άρα $\|\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$, δηλαδή $\mathbf{y}_1 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

Συνεπώς $\mathbf{y}_1 \in B_\delta(\mathbf{x}) \cap \big(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)\big)$ και άρα

$$B_\delta(\mathbf{x}) \cap \big(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)\big) \neq \varnothing \tag{1.10}$$

Μένει τώρα να δείξουμε ότι

$$B_\delta(\mathbf{x}) \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \neq \varnothing. \tag{1.11}$$

Αν $\delta \geq \varepsilon$ τότε όντως αυτό συμβαίνει αφού $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}) \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Έστω λοιπόν $0 < \delta < \varepsilon$. Θέτουμε $t_2 = -\dfrac{\delta}{2\varepsilon}$. Το σημείο

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{x} - \frac{\delta}{2\varepsilon} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

της L απέχει απο το $\mathbf{x}$ απόσταση

$$\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}\| = \left\|-\frac{\delta}{2\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right\| = \frac{\delta}{2\varepsilon} \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \frac{\delta}{2\varepsilon} \cdot \varepsilon = \frac{\delta}{2} < \delta$$

και απο το $\mathbf{x}_0$ απόσταση

$$\begin{aligned}\|\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_0\| = \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \frac{\delta'}{2\varepsilon}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right\| &= \left\|\left(1 - \frac{\delta}{2\varepsilon}\right)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\right| \\ &= \left|1 - \frac{\delta}{2\varepsilon}\right| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \left(1 - \frac{\delta}{2\varepsilon}\right)\varepsilon < \varepsilon\end{aligned}$$

(αφού $1 - \dfrac{\delta}{2\varepsilon} \geq \dfrac{1}{2} > 0$) και άρα $\mathbf{y}_2 \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

Συνεπώς $\mathbf{y}_2 \in B_\delta(\mathbf{x}) \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και άρα η (1.11) ισχύει. Απο τις (1.10) και (1.11) η απόδειξη του (β) είναι πλήρης.

(γ) Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$. Θέτουμε

$$\delta = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \varepsilon \tag{1.12}$$

Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ ισοδύναμα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ για κάθε $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Αυτό βέβαια συνεπάγεται ότι

Πράγματι έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ και απο τριγωνική ανισότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$$

και συνεπώς

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \delta \overset{(1.12)}{=} \varepsilon.$$

Παραδειγμα 1.5. Χρησιμοποιώντας τα (α)-(γ) του Παραδείγματος 1.3.1. δείξτε ότι το εσωτερικό, το εξωτερικό και το σύνορο της κλειστής μπάλας $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι αντίστοιχα τα σύνολα $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

Λύση : Δείχνουμε πρώτα ότι η $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι υποσύνολο του εσωτερικού της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Πράγματι έστω $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Από το (α) του Παραδείγματος 1.3.1 έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x})) \subseteq B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Επειδή $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subseteq \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, έπεται ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Άρα το $\mathbf{x}$ είναι εσωτερικό σημείο της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Επειδή αυτό συμβαίνει για κάθε $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ έπεται ότι $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι υποσύνολο του εσωτερικού της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Αντίστροφα, έστω $\mathbf{x}$ εσωτερικό σημείο της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Αφού κάθε εσωτερικό σημείο της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ ανήκει στη $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ θα πρέπει $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon$. Αν $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon$, τότε απο το (β) του Παραδείγματος 1.3.1 έχουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ η $B_\delta(\mathbf{x})$ έχει μη κενή τομή με το $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και άρα δεν υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Συνεπώς κάθε $\mathbf{x}$ στην σφαίρα $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ δεν αν·ηκει στο εσωτερικό της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Άρα αν $\mathbf{x}$ εσωτερικό σημείο της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$, ισοδύναμα $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Απο τα παραπάνω έπεται ότι το εσωτερικό της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι η $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

Έστω τώρα $\mathbf{x} \in S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Απο το (β) του Παραδείγματος 1.3.1 το $\mathbf{x}$ ανήκει στο σύνορο της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Αντίστροφα, έστω $\mathbf{x}$ συνοριακό σημείο της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Απο τα (α) και (γ) δεν μπορεί να είναι $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ ή $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$. Άρα $\mathbf{x} \in S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, δηλαδή το σύνορο είναι υποσύνολο της $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Συνεπώς το σύνορο της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και η $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ ταυτίζονται. Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι ένα $\mathbf{x}$ είναι εξωτερικό σημείο της $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ αν και μόνο αν $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$.

Παραδειγμα 1.6. Ομοίως με το Παράδειγμα 1.5 δείξτε ότι το εσωτερικό, το εξωτερικό και το σύνορο της ανοικτής μπάλας $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι αντίστοιχα πάλι τα σύνολα $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, $S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

Λύση : Απο το (α) έχουμε ότι κάθε σημείο του $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι εσωτερικό του σημείο και συνεπώς το $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι υποσύνολο του εσωτερικού του. Επειδή ο αντίστροφος εγκλεισμός ισχύει πάντα έχουμε ότι το εσωτερικό του $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και το $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ ταυτίζονται.

Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Επειδή $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subseteq \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \supseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, απο το (β) του Παραδείγματος 1.3.1.έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| = \varepsilon &\Rightarrow \forall \delta > 0, B_\delta(\mathbf{x}) \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \neq \varnothing \text{ και } B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)) \neq \varnothing \\ &\Rightarrow \forall \delta > 0, B_\delta(\mathbf{x}) \cap B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \neq \varnothing \text{ και } B_\delta(\mathbf{x}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)) \neq \varnothing \\ &\Rightarrow \text{ το } \mathbf{x} \text{ ανήκει στο σύνορο της } B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \tag{1.13}$$

και απο το (γ),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| > \varepsilon &\Rightarrow \exists \delta > 0 \;\; B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \\ &\Rightarrow \exists \delta > 0 \;\; B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \\ &\Rightarrow \text{ το } \mathbf{x} \text{ ανήκει στο εξωτερικό της } B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Μένει να δειχθούν οι αντίστροφες συνεπαγωγές. Έστω $\mathbf{x}$ ένα συνοριακό σημείο της $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Τότε $\mathbf{x} \notin B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ διότι διαφορετικά το $\mathbf{x}$ θα ήταν εσωτερικό σημείο της $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, άτοπο αφού το σύνορο με το εσωτερικό είναι ξένα. Άρα είτε $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ ή $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| = \varepsilon$. Αν $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ τότε απο την (1.14) το $\mathbf{x}$ θα ανήκε στο εξωτερικό της $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$, άτοπο αφού το σύνορο με το εξωτερικό είναι ξένα. Άρα θα πρέπει $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| = \varepsilon$. Με παρόμοιο τρόπο εργαζόμαστε για να δείξουμε ότι αν $\mathbf{x}$ εξωτερικό σημείο της $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ τότε $\|\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| > \varepsilon$.

1.4. Στοιχεία Τοπολογίας του $\mathbb{R}^n$

Ορισμος 1.2. *(**Ανοικτά, κλειστά, συμπαγή υποσύνολα του** $\mathbb{R}^n$) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$.*

*(1) Το X καλείται **ανοικτό** αν κάθε σημείο του X είναι και εσωτερικό του σημείο (ισοδύναμα το X ταυτίζεται με το εσωτερικό του).*

*(2) Το X καλείται **κλειστό** αν το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό.*

*(3) Το X καλείται **φραγμένο** αν υπάρχει $M > 0$ με $\|\mathbf{x}\| \leq M$ (ισοδύναμα το X είναι υποσύνολο της κλειστής μπάλας $\overline{B}_M(\mathbf{0})$ κέντρου $\mathbf{0}$ και ακτίνας M).*

*(4) Το X καλείται **συμπαγές** αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Ορισμος 1.3. *(**Απομονωμένα σημεία και σημεία συσσώρευσης ενός υποσυνόλου του** $\mathbb{R}^n$) Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$.*

*(1) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται **απομονωμένο σημείο του** X αν ανήκει στο X και υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε η απόσταση κάθε άλλου σημείου του X απο το $\mathbf{x}$ να είναι τουλάχιστον δ (ισοδύναμα $X \cap B_\delta(\mathbf{x}) = \{x\}$).*

*(2) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται **σημείο συσσώρευσης του** X αν οσοδήποτε κοντά στο $\mathbf{x}$ υπάρχει σημείο του X διαφορετικό απο το $\mathbf{x}$, ισοδύναμα για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{y} \in X$ με $0 < \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\| < \delta$.*

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων.

Πρόταση 1.4. ***(Χαρακτηρισμός των κλειστών συνόλων)*** *Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Το X είναι κλειστό.

(2) Το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω ότι το X είναι κλειστό και έστω $\mathbf{x}$ σημείο συσσώρευσης του X. Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\mathbf{x} \notin X$. Τότε $\mathbf{x} \in X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ και επειδή το X^c είναι ανοικτό θα υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X^c$. Αλλά τότε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \varnothing$, άτοπο απο τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης.

(2) $\Rightarrow$ (1): Έστω ότι το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του. Θα δείξουμε ότι το X είναι κλειστό, ισοδύναμα ότι το X^c είναι ανοικτό δηλαδή κάθε σημείο του X^c είναι εσωτερικό του σημείο. Πράγματι έστω $\mathbf{x} \in X^c$. Επειδή το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του το $\mathbf{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X. Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ δεν ανήκει στο X. Επειδή, απο υπόθεση και το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο X, έξουμε ότι όλη η ανοικτή μπάλα $B_\delta(\mathbf{x})$ περιέχεται στο X^c, δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι εσωτερικό σημείο του X^c. □

Παράδειγμα 1.7. Δείξτε ότι κάθε ανοικτή (αντ. κλειστή) μπάλα του $\mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό (αντ. κλειστό) υποσύνολο του.

Λύση : Απο το Παράδειγμα 1.6 έχουμε ότι κάθε σημείο μιας ανοικτής μπάλας είναι εσωτερικό της σημείο. Άρα κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Για να δείξουμε τώρα ότι και κάθε κλειστή μπάλα είναι κλειστό αρκεί να δείξουμε ότι το συμπλήρωμα κάθε κλειστής μπάλας είναι ανοικτό πράγμα που προκύπτει άμεσα απο το (γ) του Παραδείγματος 1.3.1.

Παράδειγμα 1.8. Δείξτε ότι κάθε μονοσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό.

Λύση : Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Για να δείξουμε ότι το $\{\mathbf{x}\}$ είναι κλειστό αρκεί να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό. Το συμπλήρωμα του $\{\mathbf{x}$ είναι το σύνολο όλων των $\mathbf{y}$ με $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Έστω λοιπόν $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Τότε για $\varepsilon = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ έχουμε ότι $\mathbf{x} \notin B_\varepsilon(\mathbf{y})$ και άρα όλη η $B_\varepsilon(\mathbf{y})$ περιέχεται στο συμπλήρωμα του $\{\mathbf{x}\}$. Άρα κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$, ισοδύναμα το $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό.

Παράδειγμα 1.9. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι το εσωτερικό του X είναι το μεγαλύτερο ανοικτό υποσύνολο του X (δηλαδή κάθε ανοικτό υποσύνολο του X περιέχεται στο εσωτερικό του X και το ίδιο το εσωτερικό του X είναι ανοικτό υποσύνολο του X).

Λύση : Έστω $A \subseteq X$ ανοικτό και $\mathbf{x} \in A$. Αφού το A είναι ανοικτό υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq A$ και επειδή $A \subseteq X$, έπεται ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$. Άρα το $\mathbf{x}$ ανήκει στο εσωτερικό του X. Συνεπώς κ΄θε σημείο του A ανήκει στο X δηλαδή το A περιέχεται στο εσωτερικό του X. Απο την άλλη μεριά το ερσωτερικό του X είναι ανοικτό σύνολο. Πράγματι, έστω $\mathbf{x}$ στο εσωτερικό του X. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$. Απο το Παράδειγμα 1.5 η $B_\delta(\mathbf{x})$ είναι ανοικτό και άρα απο τα προηγούμενα περιέχεται στο εσωτερικό του X. Άρα για κάθε $\mathbf{x}$ στο εσωτερικό του X υπάρχει $\delta > 0$ με την $B_\delta(\mathbf{x})$ υποσύνολο του εσωτερικού του X, δηλαδή το εσωτερικό του X είναι ανοικτό.

1.5. Ακολουθίες στον χώρο $\mathbb{R}^n$

Όπως και στον $\mathbb{R}$ ***ακολουθία στον*** $\mathbb{R}^n$ είναι κάθε απεικόνιση απο το $\mathbb{N}$ στον $\mathbb{R}^n$.

1.5.1. Η έννοια του ορίου ακολουθίας. Αν $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ λέμε ότι το *όριο* της $(\mathbf{x}_k)$ είναι το $\mathbf{x}$ (ή ότι η $(\mathbf{x}_k)$ συγκλίνει στο $\mathbf{x}$) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $k \geq k_0$, με άλλα λόγια κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}$ περιέχει *τελικά όλη* την $(\mathbf{x}_k)$. Συμβολικά γράφουμε $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ ή $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$.

Πρόταση 1.5. *(Πρώτος χαρακτηρισμός σύγκλισης στον $\mathbb{R}^n$) Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $d_k = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$, $k \in \mathbb{N}$. Απο τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \geq k_0 \;\; \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \geq k_0 \;\; d_k < \varepsilon \\ &\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall k \geq k_0 \;\; |d_k - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} d_k = 0\end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.6. *(**Δεύτερος χαρακτηρισμός σύγκλισης στον** $\mathbb{R}^n$) Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Έστω*

$$\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \ldots, x_{n,k}) \text{ και } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

Τότε $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\lim_{k\to\infty} x_{i,k} = x_i$ για όλα τα $1 \leq i \leq n$.

Απόδειξη. Θέτουμε $d_k = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\|$ και $d_{i,k} = |x_{i,k} - x_i|$, $k \in \mathbb{N}$. Απο τον ορισμό της απόστασης στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$d_k = \sqrt{d_{1,k}^2 + \cdots + d_{n,k}^2}. \tag{1.15}$$

Έστω ότι $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Τότε απο την Πρόταση 1.5 έχουμε ότι $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$.Έστω $1 \leq i \leq n$. Απο την (1.15) έπεται ότι

$$0 \leq d_{i,k} \leq d_k$$

οπότε απο το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών στον $\mathbb{R}$ έπεται ότι και $\lim_{k\to\infty} d_{i,k} = 0$.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι $\lim_{k\to\infty} d_{i,k} = 0$ για όλα τα $1 \leq i \leq n$. Τότε απο την (1.15) και τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών στον $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} d_k = \sqrt{\lim_{k\to\infty} d_{1,k} + \cdots + \lim_{k\to\infty} d_{n,k}} = 0.$$

Άρα πάλι απο την Πρόταση 1.5 έπεται ότι $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. □

1.5.2. Υπακολουθίες και το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass. Ένα βασικό θεώρημα στις ακολουθίες πραγματικών αριθμών είναι το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass που λέει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.6 το θεώρημα αυτό επεκτείνεται εύκολα στον $\mathbb{R}^n$. Πριν το διατυπώσουμε θυμίζουμε τους σχετικούς ορισμούς.

Ορισμος 1.7. *Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρώντας την ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ ως συνάρτηση απο το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}$, κάθε περιορισμός της σε ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ καλείται* υπακολουθία *της $(\mathbf{x}_k)$. Κάθε υπακολουθία της $(\mathbf{x}_k)$ είναι και αυτή ακολουθία του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, αν $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$ είναι το άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ όπου περιορίζεται η $(\mathbf{x}_k)$, τότε η αντίστοιχη υπακολουθία της $(\mathbf{x}_k)$ είναι η ακολουθία $(\mathbf{y}_k)$ με $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{m_k}$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$. Την υπακολουθία αυτήν θα την συμβολίζουμε και με $(\mathbf{x}_m)_{m\in M}$. Επίσης αν $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ με τον συμβολισμό*

$$\mathbf{x}_m \overset{m\in M}{\to} \mathbf{y} \tag{1.16}$$

θα εννοούμε ότι $\lim \mathbf{y}_k = \mathbf{y}$.

Προταση 1.8. *Αν μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν.*

Αποδειξη. Έστω $(\mathbf{x}_k)$ συγκλίνουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}$ το όριό της, $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{m_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η υπακολουθία της $(\mathbf{x}_k)$ που ορίζεται απο το M. Θα δείξουμε ότι $\mathbf{y}_k \to \mathbf{x}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ θα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $k \geq k_0$. Ισχυριζόμαστε ότι $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $k \geq k_0$. Πράγματι έστω $k \geq k_0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $m_k \geq k$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$ και άρα $m_k \geq k \geq k_0$ οπότε $\|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ δηλαδή $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$. □

Θεωρημα 1.9. ***(Bolzano-Weierstrass)*** *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

Αποδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n. Για $n = 1$ το θεώρημα ως γνωστόν ισχύει. Έστω $n \geq 2$ και ας υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για φραγμένες ακολουθίες στον $\mathbb{R}^{n-1}$. Έστω $(\mathbf{x}_k)$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ και $M > 0$ με $\|\mathbf{x}_k\| \leq M$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n,k})$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και απο τον ορισμό του μήκους έχουμε $\sqrt{x_{1,k}^2 + \dots + x_{n,k}^2} \leq M$. Άρα $\sqrt{x_{1,k}^2 + \dots + x_{n-1,k}^2} \leq M$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή η ακολουθία $\mathbf{x}'_k$ του $\mathbb{R}^{n-1}$ με $\mathbf{x}'_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n-1,k})$ είναι φραγμένη. Συνεπώς απο την επαγωγική μας υπόθεση υπάρχει $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{n-1}$ με

$$\mathbf{x}'_m \overset{m\in M_1}{\to} \mathbf{x}' \tag{1.17}$$

Ομοίως η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_{n,k})$ είναι φραγμένη απο το M και άρα το ίδιο ισχύει και για την υπακολουθία $(x_{n,m})_{m\in M_1}$. Επειδή το Θεώρημα ισχύει για $n = 1$ έπεται ότι υπάρχει $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο και $x_n \in \mathbb{R}$ με

$$x_{n,m} \overset{m\in M_2}{\to} x_n \tag{1.18}$$

Επειδή $M_2 \subseteq M_1$ η ακολουθία $(\mathbf{x}'_m)_{m\in M_2}$ είναι υπακολουθία της $(\mathbf{x}'_m)_{m\in M_1}$ και άρα συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτή, δηλαδή $\mathbf{x}'_m \overset{m\in M_2}{\rightarrow} \mathbf{x}'$. Αφού $\mathbf{x}'_m = (x_{1,m}, \ldots, x_{n-1,m})$, απο Πρόταση 1.5. 2 σημαίνει ότι

$$x_{1,m} \overset{m\in M_2}{\rightarrow} x_1, \ldots, x_{n-1,m} \overset{m\in M_2}{\rightarrow} x_{n-1} \tag{1.19}$$

όπου $(x_1, \ldots, x_m) = \mathbf{x}'$. Απο (1.18), (1.19) και την Πρόταση 1.6 έπεται ότι $\mathbf{x}_m \overset{m\in M_2}{\rightarrow} \mathbf{x}$, όπου $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. $\square$

1.6. Ακολουθίες Cauchy

Οι ακολουθίες Cauchy στον $\mathbb{R}^n$ ορίζονται όπως στο $\mathbb{R}$, δηλαδή μια ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ στον $\mathbb{R}^n$ καλείται ***Cauchy*** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$ για όλα τα $k, m \geq k_0$. Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy. Το γεγονός αυτό γενικεύεται και στον $\mathbb{R}^n$.

Θεωρημα 1.10. *Μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy.*

Αποδειξη. Με επαγωγή στο n χρησιμοποιώντας ότι για $n = 1$ ισχύει. $\square$

Θεωρημα 1.11. ***(Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach).*** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz συνάρτηση με σταθερά $0 < \vartheta < 1$, δηλαδή η f ικανοποιεί την ιδιότητα $\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leq \vartheta\ \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, για κάθε $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε η f έχει ένα σταθερό σημείο που επιπλέον είναι και μοναδικό.*

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{x}_0$ ένα τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ αναδρομικά θέτοντας $\mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η $(\mathbf{x}_k)$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνουσα.

Δείχνουμε πρώτα με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$ ότι

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leq \vartheta^k\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|. \tag{1.20}$$

Πράγματι για $k = 1$ η (1.20) ισχύει αφού $\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_0)$ και άρα

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0\| \leq \vartheta\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$$

Έστω ότι η (1.20) ισχύει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για το $k + 1$ στην θέση του k. Πράγματι,

$$\|\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}\| = \|f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}_k)\| \leq \vartheta\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \overset{(1.20)}{\leq} \vartheta^{k+1}\ \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$$

Άρα η (1.20) ισχύει για όλα τα $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k < m$,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\| &= \|(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + (\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}) + \cdots + (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1})\| \\ &= \|\sum_{j=k}^{m-1}(\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j)\| \\ &\leq \sum_{j=k}^{m-1}\|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\| \\ &\overset{(1.20)}{\leq} \left(\sum_{j=k}^{m-1}\vartheta^j\right)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leq \left(\sum_{j=k}^{\infty}\vartheta^j\right)\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = \frac{\vartheta^k}{1-\vartheta}\;\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|.\end{aligned}$$

Επειδή $0 < \vartheta < 1$ έχουμε ότι $\vartheta^k \to 0$ και η παραπάνω σχέση δίνει ότι η ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ είναι Cauchy. (Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\vartheta^k \to 0$ έπεται και ότι $\dfrac{\vartheta^k}{1-\vartheta} \to 0$. Συνεπώς για το $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|}$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ με $\dfrac{\vartheta^k}{1-\vartheta} < \varepsilon'$ για κ'θε $k \geq k_0$. Έστω $m, k > k_0$. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m \geq k$ και άρα $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\| \leq \dfrac{\vartheta^k}{1-\vartheta}\;\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon$.)

Αφού η $(\mathbf{x}_k)$ είναι Cauchy είναι και συγκλίνουσα και έστω $\mathbf{x}$ το όριό της. Τότε

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| &\leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_{k+1}\| + \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| \\ &= \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_k)\| + \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| \\ &\leq \vartheta\;\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\|\end{aligned}$$

και άρα

$$0 \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \leq \vartheta \lim \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| + \lim \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| = 0$$

δηλαδή $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Η f δεν έχει άλλο σταθερό σημείο. Πράγματι αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ δύο σταθερά σημεία της f τότε

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \vartheta\|\mathbf{x} - \mathbf{x}\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

άτοπο. □

Παρατηρηση 1.1. Παρατηρείστε ότι απο την παραπάνω απόδειξη προκύπτει ότι απο οποιδήποτε $\mathbf{x}_0$ και να ξεκινούσαμε στο ιδιο $\mathbf{x}$ θα καταλήγαμε!

1.7. Ακολουθίες, σημεία συσσώρευσης και συμπαγή υποσύνολα

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται ***οριακό σημείο του*** X αν υπάρχει ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ στο X (δηλαδή $\mathbf{x}_k \in X$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$) με $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$.

Παρατηρείστε ότι κάθε σημείο του X είναι τετριμένα οριακό του σημείο ως το όριο της σταθερής ακολουθίας.

Προταση 1.12. ***(Σχέση σημείων συσσώρευσης και οριακών σημείων)*** *Κάθε σημείο συσσώρευσης του X είναι και οριακό του σημείο. Ειδικότερα, ένα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο συσσώρευσης του X αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ στο X* με όρους διαφορετικούς απο το $\mathbf{x}$ *με* $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}$ σημείο συσσώρευσης του X. Τότε, απο τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να επιλέξουμε ένα σημείο $\mathbf{x}_k \in X$ με $0 < \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < 1/k$. Απο την Πρόταση 1.5 η προκύπτουσα ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ συγκλίνει στο $\mathbf{x}$ (αφού $0 < \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < 1/k$ και άρα, απο θεώρημα ισοσυγκλινουσών, $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| \to 0$). Αντίστροφα, έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα να υπάρχει ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ στο X με $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Έστω $\delta > 0$. Επειδή $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}$ υπάρχει k_0 με $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \delta$ για όλα τα $k \geq k_0$. Θέτουμε $\mathbf{y} = \mathbf{x}_{k_0}$ και έχουμε $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$. Συνεπώς για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{y} \in X$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ και άρα το $\mathbf{x}$ είναι σημείο συσσώρευσης του X. □

Η Πρόταση 1.4 αναδιατυπώνεται τώρα ως εξής:

Πρόταση 1.13. *(**Χαρακτηρισμός κλειστών υποσυνόλων του** $\mathbb{R}^n$) Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.*

Επίσης απο το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass και τον ορισμό των συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ έχουμε την εξής:

Πρόταση 1.14. *(**Χαρακτηρισμός συμπαγών υποσυνόλων του** $\mathbb{R}^n$) Ένα υποσύνολο του X του $\mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν κάθε ακολουθία στο X περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο X.*

Απόδειξη. Έστω X συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία με $\mathbf{x}_k \in X$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Απο τον ορισμό των συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι το X είναι κλειστό και φραγμένο. Άρα η $(\mathbf{x}_k)$ είναι φραγμένη και άρα απο το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass έπεται ότι υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(\mathbf{x}_m)_{m\in M}$ της $(\mathbf{x}_k)$. Έστω $\mathbf{x}$ το όριο της $(\mathbf{x}_m)_{m\in M}$. Επειδή $\mathbf{x}_m \in X$ το $\mathbf{x}$ είναι οριακό σημείο του X. Επειδή το X είναι κλειστό απο Πρόταση 1.13 έχουμε ότι $\mathbf{x} \in X$.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι κάθε ακολουθία στο X περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο στο X. Θα δείξουμε ότι το X είναι συμπαγές, δηλαδή κλειστό και φραγμένο. Δείχνουμε πρώτα ότι το X είναι κλειστό. Απο Πρόταση 1.13 αρκεί να δειχθεί ότι περιέχει τα οριακά του σημεία. Πράγματι έστω $\mathbf{x}$ οριακό σημείο του X. Έστω ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ στο X με $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Απο την υπόθεσή μας για το X η $(\mathbf{x}_k)$ έχει μια υπακολουθία $(\mathbf{x}_m)_{m\in M}$ με όριο στο X. Αλλά η $(\mathbf{x}_k)$ είναι συγκλίνουσα και άρα κάθε υπακολουθία της έχει το ίδιο όριο με αυτήν. Άρα το $\mathbf{x}$ είναι το όριο της $(\mathbf{x}_m)_{m\in M}$ οπότε ανήκει στο X. Μένει να δείξουμε ότι το X είναι φραγμένο. Πράγματι έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι το X δεν ήταν φραγμένο. Τότε για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x}\| > M$. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\mathbf{x}_k \in X$ με $\|\mathbf{x}_k\| > k$. Κάθε υπακολουθία $(\mathbf{x}_m)_{m\in M}$ της $(\mathbf{x}_k)$ δεν είναι φραγμένη (αφού $\|\mathbf{x}_m\| > m$ για κάθε $m \in M$). Άρα η $(\mathbf{x}_k)$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (αφού όπως και στο $\mathbb{R}$ κάθε συγκλίνουσα ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ είναι και φραγμένη), άτοπο. □

Κεφάλαιο 2

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, όρια και συνέχεια

2.1. Γενικές έννοιες.

2.1.1. Είδη συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Με τον όρο *συνάρτηση πολλών μεταβλητών* εννοούμε γενικά μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ μη κενό. (αν $m = n = 1$ τότε έχουμε την κλασική περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής). Οι συναρτήσεις αυτές ταξινομούνται ως εξής:

(I) ***Πραγματικές*** (ή ***βαθμωτές.***) Είναι οι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$.

2) $f : D \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ όπου $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$ είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4) $f : B \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, όπου $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική συναρτήσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιστοιχίσουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη (όπως πχ. η θερμοκρασία, η ατμοσφαιρική πίεση) στα σημεία του χώρου.

(II) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις μιας μεταβλητής.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ και $m \geq 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (t, t^2)$.

3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ με τύπο $f(t) = \big(t, t^2, \ldots, t^m\big)$.

Οι συναρτήσεις $f : X \to \mathbb{R}^m$ με $X \subseteq \mathbb{R}$ γράφονται πάντα στην μορφή

$$f(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

όπου $x_1(t), \ldots, x_k(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής απο το X στο $\mathbb{R}$ (Πρόταση 2.1. παρακάτω).

Αν $X = I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f : I \to \mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια *m-διάστατη καμπύλη*. Πχ. η $f(t) = (\cos t, sint)$, μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο, η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t σαν χρόνο συναρτήσεις της μορφής $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να απεικονίζουν την θέση ενός κινητού στον χώρο την ξρονική στιγμή t.

(III) ***Διανυσματικές Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.*** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \to \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $n, m \geq 2$ (αν $n = m$ οι συναρτήσεις αυτές καλούνται και *διανυσματικά πεδία*). Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = (-y, x)$.

Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να περιγράψουν διανυσματικά πεδία, όπως είναι ένα πεδίο βαρύτητας, ή πεδίο ταχύτητας ρευστού (Παραπάνω παραδείγματα 1 και 2,3 αντίστοιχα).

2.1.2. Το γράφημα μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Αν $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε το *γράφημα* της f ορίζεται να είναι το σύνολο

$$Gr(f) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \ \mathbf{x} \in X \text{ και } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}. \tag{2.1}$$

Ειδικότερα αν $m = 1$ δηλαδή η f είναι βαθμωτή, γράφοντας το $\mathbf{x}$ ως $(x_1, \ldots, x_n)$ και θέτοντας $x_{n+1} = y$ το γράφημα παίρνει και την μορφή:

$$Gr(f) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ (x_1, \ldots, x_n) \in X \text{ και } x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\} \tag{2.2}$$

οπότε αν επιπλέον $X = \mathbb{R}^n$,

$$Gr(f) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \tag{2.3}$$

Επειδή το καρτεσιανό γινόμενο $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ταυτίζεται φυσιολογικά με τον $\mathbb{R}^{n+m}$, αν ένας απο τους n, m είναι μεγαλύτερος του 1, το γράφημα μιας συνάρτησης δεν μπορεί να απεικονισθεί στο επίπεδο (όπως γίνεται στις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής). Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$ έχει γράφημα το σύνολο $\{(x, y, z) : z = x^2 + y^2\}$ που αποτελεί μια διδιάστατη επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ (είναι το λεγόμενο παραβολοειδές που προκύπτει απο την περιστροφή της $y = x^2$ γύρω απο τον άξονα των x). Γενικά το γράφημα μιας βαθμωτής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αποτελεί μια "n-διάστατη επιφάνεια" του $\mathbb{R}^{n+1}$.

2.1.3. Ισοσταθμικά σύνολα μιας βαθμωτής συνάρτησης. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ $X \subseteq \mathbb{R}^n$ μια βαθμωτή συνάρτηση και $c \in \mathbb{R}$ με c να είναι στο σύνολο τιμών τηω f. Το σύνολο

$$S(f,c) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = c\} = f^{-1}(\{c\}) \subseteq \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

καλείται *ισοσταθμικό σύνολο (ή σύνολο στάθμης) της* f. Ειδικότερα αν $n = 2$ καλείται και *ισοσταθμική καμπύλη της* f ενώ αν $n = 3$ καλείται και *ισοσταυμική επιφάνεια*. Γενικά κάθε ισοσταθμικό σύνολο μιας βαθμωτής συνάρτησης αποτελεί (συνήθως) μια "$(n-1)$-διάστατη επιφάνεια" του $\mathbb{R}^n$. Πχ. αν $f(x,y) = x^2+y^2$ τότε για $c = 0$ έχουμε $S(f,c) = \{\mathbf{0}\}$ ενώ για $c > 0$, $S(f,c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\}$, δηλαδή το S_c είναι ο κύκλος κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $R = \sqrt{c}$.

Παρατηρείστε ότι

$$\mathbf{x} \in I(f,c) \Leftrightarrow (\mathbf{x},c) \in Gr(f) \tag{2.5}$$

Άρα τα ισοσταθμικά σύνολα μας βοηθούν να καταλάβουμε το γράφημα μιας συνάρτησης $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Πχ. αν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τότε απο την (2.5) έχουμε ότι οι ισοσταθμικές καμπύλες της f αποτελούν ουσιαστικά τις παράλληλες προς τον άξονα των z προβολές των τομών του γραφήματος της f με τα επίπεδα $z = c$.

2.1.4. Ανάλυση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ σε συνιστώσες συναρτήσεις. Η επόμενη πρόταση ουσιαστικά ανάγει την μελέτη όλων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών στις βαθμωτές συναρτήσεις.

Πρόταση 2.1. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $f_1, \ldots, f_m$ απο το X στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε*

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$. Συμβολικά γράφουμε

$$f = (f_1, \ldots, f_m)$$

και οι $f_1, \ldots, f_m$ καλούνται οι συνιστώσες συναρτήσεις *της f.*

Απόδειξη. Για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ έστω $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ η i-προβολή του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή η συνάρτηση

$$\pi_i(y_1, \ldots, y_m) = y_i.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ του $\mathbb{R}^m$ γράφεται ως

$$\mathbf{y} = (\pi_1(\mathbf{y}), \ldots, \pi_m(\mathbf{y}))\,. \tag{2.6}$$

Έστω τώρα ένα τυχόν $\mathbf{x} \in X$. Θέτοντας $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ απο την (2.6) έχουμε

$$f(\mathbf{x}) = (\pi_1\,(f(\mathbf{x}))\,, \ldots, \pi_m\,(f(\mathbf{x}))) \tag{2.7}$$

Άρα αν θέσουμε $f_i = \pi_i \circ f : X \to \mathbb{R}$, να είναι η σύνθεση των π_i και f, τότε $f_i(\mathbf{x}) = \pi_i\,(f(\mathbf{x}))$ και άρα απο την (2.7) έχουμε

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))\,. \tag{2.8}$$

Μένει να δειχθεί ότι οι $f_1, \ldots, f_m$ είναι και οι μοναδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (2.8). Πράγματι αν $g_1, \ldots, g_m$ συναρτήσεις απο τον X στο $\mathbb{R}$ με

$$f(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x}))$$

τότε αναγκαστικά $g_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x})) = \pi_i \circ f(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ και κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. □

2.2. Γραμμικές απεικονίσεις.

Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ καλείται *γραμμική* αν για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι

(i) $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, και

(ii) $T(\lambda \mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$,

2.2.1. Γραμμικές απεικονίσεις απο τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$. Ισχύει ο επόμενος χαρακτηρισμός των γραμμικών απεικονίσεων απο το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 2.2. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Τότε η T είναι γραμμική αν και μόνο αν υπάρχει $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,*

$$T(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η T είναι γραμμική. Έστω $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $a_1 = T(\mathbf{e}_1), \ldots, a_n = T(\mathbf{e}_n)$ και έστω $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Τότε για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i$, έχουμε

$$T(\mathbf{x}) = T(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n T(x_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i T(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}.$$

Αντίστροφα αν $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$ τότε απο τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου προκύπτει εύκολα ότι η T είναι γραμμική. □

Παράδειγμα 2.1. Η προβολή $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ στην i-συντεταγμένη, $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$, είναι γραμμικές απεικονίσεις απο τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$ και γράφεται ως $\pi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}$ όπου $\mathbf{e}_i$ είναι το i-διάνυσμα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 2.2. Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια μη μηδενική γραμμική συνάρτηση. Βρείτε τι απεικονίζουν γεωμετρικά (α) το γράφημα της T και (β) τα ισοσταθμικά σύνολα της T;

Λύση: Απο την Πρόταση 2.2 έχουμε ότι $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$ για κάποιο $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

(α) Απο την (2.3) γράφημα της T είναι το σύνολο

$$Gr(T) = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n\}$$

που αναπαριστά τον γραμμικό υποχώρο διάστασης n του $\mathbb{R}^{n+1}$ (δηλαδή ένα ***υπερεπίπεδο*** του $\mathbb{R}^{n+1}$) με εξίσωση $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n - x_{n+1} = 0$.

(β) Είναι εύκολο να δούμε ότι το σύνολο τιμών μιας μη μηδενικής γραμμικής απεικόνισης απο τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}$ είναι όλο το $\mathbb{R}$. (Πράγματι έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ με $f(\mathbf{x}) = c_0 \neq 0$. Τότε για κάθε $c \in \mathbb{R}$, $y = T\left(\dfrac{c}{c_0} \cdot \mathbf{x}\right)$). Αν c είναι λοιπόν ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός τότε

$$I(T, c) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = c\}$$

που αναπαριστά ένα υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^n$ (που είναι παράλληλο προς τον γραμμικό υποχώρο διάστασης $n-1$ του $\mathbb{R}^n$ με εξίσωση $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$).

2.2.2. Γραμμικές απεικονίσεις απο τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$. Η επόμενη πρόταση γενικεύει την Πρόταση 2.2 για γραμμικές απεικονίσεις $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Πρόταση 2.3. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η T είναι γραμμική.

(2) Υπάρχουν $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε η T έχει την μορφή

$$T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x}) \tag{2.9}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω $T = (T_1, \ldots, T_m)$ η ανάλυση της T με $T_i = \pi_i \circ T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, όπου $\pi_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ η i-προβολή του $\mathbb{R}^m$ (δείτε την απόδειξη της Πρότασης 2.1). Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει κάθε π_i είναι γραμμική συνάρτηση. Είναι εύκολο να δούμε ότι η σύνθεση δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Άρα κάθε f_i είναι γραμμική συνάρτηση απο τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}$ και συνεπώς απο την Πρόταση 2.2 για κάθε $i \in \{1, \ldots, m\}$ υπάρχει $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^m$ με $T_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}$ για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Απο τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= (\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y}), \ldots, \mathbf{a}_m \cdot (\mathbf{x}+\mathbf{y})) \\ &= (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a}_m \mathbf{y})) \\ &= (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{y}, \ldots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned} T(\lambda \mathbf{x}) &= (\mathbf{a}_1 \cdot (\lambda \mathbf{x}), \ldots, \mathbf{a}_m \cdot (\lambda \mathbf{x})) \\ &= (\lambda(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}), \ldots, \lambda(\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x})) \\ &= \lambda(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \ldots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

2.2.3. Αναπαράσταση γραμμικής απεικόνισης με πίνακα. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συνήθως ταυτίζουμε τα διανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ του χώρου $\mathbb{R}^n$ με τον πίνακα γραμμή $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ ή με τον πίνακα στήλη

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \ldots x_n]^T$$

Χρησιμοποιώντας την ***ταύτιση των διανυσμάτων του $\mathbb{R}^n$ με πίνακες στήλες***, απο την Πρόταση 2.3 παίρνουμε και την επόμενη γνωστή πρόταση της Γραμμικής Άλγεβρας σχετικά με τις γραμμικές απεικονίσεις $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Πρόταση 2.4. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η T είναι γραμμική.

(2) Υπάρχει $m \times n$ πίνακας A τέτοιος ώστε

$$T(\mathbf{x}) = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot [x_1 \dots x_n]^T. \tag{2.10}$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2): Απο την Πρόταση 2.3 έχουμε ότι υπάρχουν $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε η T έχει την μορφή

$$T(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}, \dots, \mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x}) \tag{2.11}$$

Ταυτίζοντας όπως αναφέραμε κάθε διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ του $\mathbb{R}^m$ με τον πίνακα στήλη $\begin{bmatrix} y_1 \\ . \\ . \\ . \\ y_m \end{bmatrix} = [y_1 \dots y_m]^T$, η (2.11) παίρνει την μορφή

$$T(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x} \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}.$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Προκύπτει εύκολα απο τις τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού πινάκων ότι αν η T έχει την μορφή της (2.10) τότε $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ και $T(\lambda \mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$. $\square$

Πρόταση 2.5. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική και έστω $A = (a_{ij})$ ο $m \times n$ πίνακας που αναπαριστά την T, δηλαδή*

$$T(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ . & \dots & . \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

(1) Αν $T = (T_1, \dots, T_m)$ η ανάλυση της T σε συνιστώσες συναρτήσεις τότε για κάθε $i = 1, \dots, m$, η i-γραμμή του πίνακα A, είναι ο πίνακας που αναπαριστά την T_i, δηλαδή

$$T_i(x_1,\ldots,x_n) = [\ a_{i1}\ \ldots\ a_{in}\ ]\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

(2) Αν $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $j\in\{1,\ldots,n\}$, η j-στήλη του A είναι η εικόνα μέσω της T του διανύσματος $\mathbf{e}_j$, δηλαδή

$$T(\mathbf{e}_j) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Αποδειξη. (1) Από την (2.12) και τον κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων έχουμε ότι

$$T(x_1,\ldots,x_n) = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 & +\ldots & +a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & +\ldots & +a_{2n}x_n \\ . & \ldots & . \\ a_{m1}x_1 & +\ldots & +a_{mn}x_n \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Απο την άλλη μεριά επειδή $T=(T_1,\ldots,T_m)$ έχουμε $T(\mathbf{x})=(T_1(\mathbf{x}),\ldots,T_m(\mathbf{x}))$ ή σε μορφή στήλης

$$T(x_1,\ldots,x_n) = \begin{bmatrix} T_1(x_1, & \ldots & ,x_n) \\ & \ldots & \\ T_m(x_1, & \ldots & ,x_n) \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Συγκρίνοντας τις (2.13) και (2.14) παίρνουμε ότι

$$T_i(x_1,\ldots,x_n) = a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n = [\ a_{i1}\ \ldots\ a_{in}\ ]\cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

για κάθε $i=1,\ldots,m$.

(2) Όπως εύκολα ελέγχεται, ο πολλαπλασιασμός ενός $m\times n$ πίνακα A με τον $n\times 1$ πίνακα που έχει 0 σε όλες τις θέσεις εκτός απο την j-θέση όπου έχει 1, είναι η j-στήλη του A:

$$T(\mathbf{e}_j) = A\cdot \begin{bmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

□

2.3. Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Στην παράγραφο αυτή υα μελετήσουμε την έννοια του ορίου συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Όπως θα δούμε είναι μια απλή γενίκευση της γνωστής αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Όπως και για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, για να ορίζεται το ορίο μιας συνάρτησης $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ σε ένα $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ θα πρέπει το $\mathbf{x}_0$ να είναι *σημείο συσσώρευσης*[1] *του πεδίου ορισμού της* f.

2.3.1. Όριο πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

Ορισμος 2.6. *Έστω* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *σημείο συσσώρευσης του* X *και* $L \in \mathbb{R}$. *Λέμε ότι η* f *έχει στο* $\mathbf{x}_0$ *όριο το* L *και γράφουμε*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta > 0$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $\mathbf{x} \in X$ *με* $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ *ισχύει ότι* $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$.

Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ χρήσιμο γιατί μεταφέρει το όριο συνάρτησης σε ακολουθίες. Με βάση το θεώρημα αυτό αποδεικνύονται όλες οι αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων βαθμωτών συναρτήσεων. Θυμίζουμε (Πρόταση 1.5.7) ότι ένα $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο συσσώρευσης του $X \subseteq \mathbb{R}^n$ αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ στο X με $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$.

Θεωρημα 2.7. *(Αρχή Μεταφοράς για όρια) Έστω* $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ *σημείο συσσώρευσης του* X *και* $L \in \mathbb{R}$. *Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

(2) Για οποιαδήποτε ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ *απο στοιχεία του* X *με* $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *και* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ *ισχύει ότι* $f(\mathbf{x}_n) \to L$.

Αποδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2) : Έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στο X με $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(f(\mathbf{x}_n))$ (που είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών) συγκλίνει στο L, ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon > 0$ πρέπει να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$.

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, για το δοθέν ε υπάρχει $\delta > 0$ με

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \text{ για όλα τα } \mathbf{x} \in X \text{ με } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta. \tag{2.15}$$

Επειδή τώρα $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \delta$ για όλα τα $n \geq n_0$. άρα απο την (2.15) έπεται ότι

$$|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon \text{ για όλα τα } n \geq n_0$$

Άρα $f(\mathbf{x}_n) \to L$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι δεν ισχύει η (1) ενώ ισχύει η (2). Απο την άρνηση του ορισμού του $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, έχουμε ότι θα υπάρχει

[1] Θυμίζουμε ότι ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ καλείται σημείο συσσώρευσης ενός υποσυνόλου X του $\mathbb{R}^n$ αν οσοδήποτε κοντά του μπορούμε να βρούμε σημείο του X διαφορετικό του $\mathbf{x}_0$, δηλαδή για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{y} \in X$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

$\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{x}_\delta \in X$ με $0 < \|\mathbf{x}_\delta - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και $|f(\mathbf{x}_\delta) - f(\mathbf{x})| \geq \varepsilon_0$. Άρα για $\delta = 1/n$ υπάρχει $\mathbf{x}_n \in X$ με

$$0 < \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < 1/n \tag{2.16}$$

και

$$|f(\mathbf{x}_n) - L| \geq \varepsilon_0. \tag{2.17}$$

Απο την (2.16) έπεται ότι $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \to 0$ και άρα απο την Πρόταση 1.5. 1. έχουμε ότι $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$. Απο την υπόθεσή μας έχουμε ότι $f(\mathbf{x}_n) \to 0$ ή ισοδύναμα $|f(\mathbf{x}_n) - L| \to 0$, άτοπο απο (2.17). □

Παραδειγμα 2.3. Χρησιμοποιώντας την Αρχή Μεταφοράς δείξτε ότι το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

δεν υπάρχει.

Λύση: Έστω $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. Παρατηρούμε ότι το $(0,0)$ είναι ένα σημείο συσσώρευσης του X που δεν ανήκει στο X. Απο την Αρχή Μεταφοράς για να δείξουμε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n, y_n) και (x'_n, y'_n) του X (άρα και $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n) \neq (0,0)$) με $\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(x'_n, y'_n) = (0,0)$ αλλά $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n)$.

Πράγματι, για την ακολουθία $(1/n, 0)$, έχουμε $(1/n, 0) \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(1/n, 0) \to (0,0)$ (Πρόταση 1.6) και

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, 0) = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}+0} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

Ομοίως για την ακολουθία $(1/n, 1/n)$, έχουμε πάλι $(1/n, 1/n) \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(1/n, 1/n) \to (0,0)$, αλλά

$$\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Προταση 2.8. *(Κανόνας παρεμβολής) Έστω $g, f, h : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X. Αν $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$, για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$$

τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

Πορισμα 2.9. *(Κανόνας παρεμβολής για μηδενικές συναρτήσεις) Έστω $f, h : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X. Αν 1) $h(\mathbf{x}) \geq 0$, 2) $|f(\mathbf{x})| \leq h(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και (3) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = 0$ τότε $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$.*

Παραδειγμα 2.4. Δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0.$

Λύση: Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |x| + \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |y| \leq |x| + |y|$$

Άρα αν θέσουμε $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ και $h(x, y) = |x| + |y|$, τότε

$$|f(x, y)| \leq h(x, y)$$

Επιπλέον $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y) = 0.$ [2]

Απο το Πόρισμα 2.9 έπεται ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Παραδειγμα 2.5. Δείξτε ότι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin(\frac{1}{y}) = 0$.

Λύση: Έστω $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ και $f : X \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x \sin(\dfrac{1}{y})$. Παρατηρούμε ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του X που δεν αν·ηκει στο X. Έστω (x_n, y_n) ακολουθία στο X (οπότε $y_n \neq 0$ και άρα $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) και $(x_n, y_n) \to (0, 0)$. Έχουμε $x_n \to 0$ (Πρόταση 1.6) και $|\sin(\dfrac{1}{y_n})| \leq 1$. Άρα

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \left[x_n \cdot \sin(\frac{1}{y_n})\right] = 0$$

(μηδενική $\times$ φραγμένη). Άρα απο την Αρχή Μεταφοράς $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

Η επόμενη πρόταση είναι και αυτή μια Αρχή Μεταφοράς αλλά με καμπύλες αντί για ακολουθίες. Με τον όρο *καμπύλη* του $\mathbb{R}^n$ θα θεωρούμε μια *συνεχή συνάρτηση* [3] $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Προταση 2.10. *(Όριο κατά μήκος καμπύλης) Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_0\} \to \mathbb{R}$ και $L \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

(2) Για κάθε καμπύλη $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{r}(t) \in X$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ με $t \neq 0$ και $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}_0$ ισχύει ότι $\lim_{t\to0} f(\mathbf{r}(t)) = L$.

Παρατηρηση 2.1. Η Πρόταση 2.10 ισχύει υπό κάποιες προυποθέσεις και για συναρτήσεις με γενικότερο πεδίο ορισμού.

Παραδειγμα 2.6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$.

(1) Βρείτε το όριο της f στο $(0, 0)$ κατά μήκος κάθε ευθείας $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Βρείτε το όριο της f στο $(0, 0)$ κατά μήκος κάθε παραβολής $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

[2] Μπορούμε να το δούμε αυτό εύκολα με τον ορισμό του ορίου ή χρησιμοποιώντας ακολουθίες: Παρατηρούμε ότι για κάθε ακολουθία $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ έχουμε $x_n \to 0$ και $y_n \to 0$ (Πρόταση 1.6) οπότε και $\lim_{n\to\infty} h(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty}(|x_n| + |y_n|) = 0$. Συνεπώς απο αρχή μεταφοράς $\lim \mathbf{x} \to \mathbf{x}_0 h(x, y) = 0$.

[3] για τον ορισμό της συνέχειας δείτε την επόμενη παράγραφο.

(3) Δείξτε ότι το όριο της f στο $(0,0)$ δεν υπάρχει.

Λύση: (1) Έχουμε

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,\lambda t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\lambda t}{t^4+\lambda^2 t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t^3}{t^4+\lambda^2 t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t}{t^2+\lambda^2} = 0$$

Παρατηρούμε ότι το όριο είναι ανεξάρτητο του συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας.

(2) Ομοίως

$$\lim_{t\to 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,\lambda t^2) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2\lambda t^2}{t^4+\lambda^2 t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda t^4}{t^4+\lambda^2 t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

και άρα το όριο εξάρτάται απο τον συντελεστή λ της παραβολής.

(3) Απο το (2) και την Πρόταση 2.9. το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

2.3.1. Όριο γενικής διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Η έννοια του ορίου μιας γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι μια απλή γενίκευση της αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Ορισμος 2.11. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X και $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ όριο το $\mathbf{L}$ και γράφουμε*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta$ ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$.

Το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στο όριο των πραγματικών συναρτήσεων που αποτελούν την ανάλυση της f. Συγκεκριμμένα έχουμε την εξής πρόταση που προκύπτει εύκολα απο την Πρόταση 1.6 και την Αρχή Μεταφοράς (Θεώρημα 2.7).

Προταση 2.12. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Το όριο $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ υπάρχει.

(2) Αν $f = (f_1, \dots, f_m)$ η ανάλυση της f τότε τα όρια $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x})$ υπάρχουν για όλα τα $i = 1, \dots, m$ και ισχύει ότι

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \dots, \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x})\right)$$

2.4. Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

2.4.1 Βασικοί ορισμοί.

Ορισμος 2.13. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$. Η f καλείται* συνεχής *αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X.*

Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής κάθε συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ είναι αυτομάτως συνεχής στα απομονωμένα σημεία του X. Άρα για να δούμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής αρκεί να ελέγξουμε τα σημεία του X που είναι σημεία συσσώρευσής του. Ισχύει και εδώ το ανάλογο θεώρημα με τα όρια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.14. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

(β) Ισχύει ότι $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στην συνέχεια των συνιστωσών συναρτήσεών της. Συγκεκριμένα απο την προτάσεις 2.12 και 2.14έχουμε το εξής πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.15. *Έστω $f : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X. Έστω επίσης $f = (f_1, \ldots, f_m)$ η ανάλυση της f. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.*

(α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

(β) Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ η $f_i : X \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Ένα απο τα πλέον κλασικά θεωρήματα για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ως εξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.16. *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό και φραγμένο. Τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K, δηλαδή υπαρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ με*

$$f(\mathbf{x}_1) = \min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\} \quad \textit{και} \quad f(\mathbf{x}_2) = \max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\} \tag{2.18}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.16 ακολουθεί τις ίδιες γραμμές με εκείνη του κλασικού θεωρήματος για συναρτήσεις μιας μεταβλητής που προαναφέραμε.

Κεφάλαιο 3

Παραγωγιση πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

3.1. Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

Ξεκινούμε με τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. *(Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι* **μερικώς παραγωγίσιμη ως προς** x **στο σημείο** (x_0, y_0) *αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Το όριο αυτό καλείται **μερική παράγωγος ως προς** x **της συνάρτησης** f **στο σημείο** (x_0, y_0) *και συμβολίζεται με*

$$f_x(x_0, y_0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Ομοίως θα λέμε ότι η f είναι **μερικώς παραγωγίσιμη ως προς** y **στο σημείο** (x_0, y_0) *αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

Το όριο αυτό καλείται **μερική παράγωγος ως προς** y **της συνάρτησης** f **στο σημείο** (x_0, y_0) *και συμβολίζεται με*

$$f_y(x_0, y_0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Έστω $A_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων (x, y) του A στα οποία η $f_x(x, y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Η συνάρτηση $(x, y) \to f_x(x, y)$, $(x, y) \in A_1$ καλείται ***μερική παράγωγος της*** f ***ως προς*** x και συμβολίζεται με f_x ή $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Ομοίως αν $A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A στα οποία η $f_y(x, y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη τότε η συνάρτηση $(x, y) \to f_y(x, y)$, $(x, y) \in A_2$ καλείται ***μερική παράγωγος της*** f ***ως προς*** y και συμβολίζεται με f_y ή $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2 y + xy^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$ και $f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$.

Παραδειγμα 3.2. (α) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = |x| + |y|$. Δείξτε ότι οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν.

(β) Ομοίως για την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Λύση: (α) Είναι

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

(β) Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x|^2}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|y|^2}}{y} = \lim_{x\to 0} \frac{|y|}{y}$$

Όπως και στο (α) και τα δύο αυτά όρια δεν υπάρχουν.

Παραδειγμα 3.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Δείξτε ότι $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

Λύση: Είναι

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot y|} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων σε ένα σημείο (x_0, y_0) δεν συνεπάγεται την συνέχεια της f στο (x_0, y_0).

Παραδειγμα 3.4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$. Δείξτε ότι οι $f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ υπάρχουν ενώ η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

Λύση: Απο το Παράδειγμα 2.2 έχουμε ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει και άρα η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $(0, 0)$. Όμως $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Πράγματι,

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

3.2. Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης και το Θεώρημα Schwarz

Προχωρούμε τώρα στον ορισμό των δεύτερης τάξης μερικών παραγώγων.

Ορισμος 3.2. *(Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A με την ιδιότητα οι f_x, f_y να υπάρχουν τουλάχιστον σε μια περιοχή του (x_0, y_0). Οι μερικές παράγωγοι των f_x, f_y ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται* **δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο σημείο** (x_0, y_0).

Χρησιμοποιούμε τους παρακάτω συμβολισμούς:

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x_0,y_0) = (f_x)_x(x_0,y_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f_x(x,y_0)-f_x(x_0,y_0)}{x-x_0}, \\
f_{xy}(x_0,y_0) = (f_x)_y(x_0,y_0) &= \lim_{y\to y_0} \frac{f_x(x_0,y)-f_x(x_0,y_0)}{y-y_0} \\
f_{yx}(x_0,y_0) = (f_y)_x(x_0,y_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f_y(x,y_0)-f_y(x_0,y_0)}{x-x_0} \\
f_{yy}(x_0,y_0) = (f_y)_y(x_0,y_0) &= \lim_{y\to y_0} \frac{f_y(x_0,y)-f_y(x_0,y_0)}{y-y_0},
\end{aligned}$$

Επίσης χρησιμοποιούνται και οι συμβολισμοί

$$f_{xx}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \quad f_{xy}(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

$$f_{yx}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \quad f_{yy}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$$

Οι μερικές παράγωγοι $f_{xx}(x_0,y_0)$, $f_{xy}(x_0,y_0)$, $f_{yy}(x_0,y_0)$ και $f_{yx}(x_0,y_0)$ καλούνται ***μερικές παράγωγοι της f στο σημείο*** (x_0,y_0) ***δεύτερης τάξης***. Ειδικότερα οι $f_{xy}(x_0,y_0)$ και $f_{yx}(x_0,y_0)$ καλούνται ***μεικτές*** μερικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0,y_0) δεύτερης τάξης.

Με τον παραπάνω τρόπο ορίζονται οι συναρτήσεις f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} στα κατάλληλα σύνολα των σημείων (x,y) του A όπου οι τιμές $f_{xx}(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες.

Παραδειγμα 3.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 y + xy^2$. Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε $f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $f_y(x,y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$ και

$$f_{xx}(x,y)(= (f_x)_x(x,y)) = 6x + 2y, \quad f_{xy}(x,y)(= (f_x)_y(x,y)) = 2x + 2y,$$
$$f_{yx}(x,y)(= (f_y)_x(x,y)) = 2x + 2y \quad f_{yy}(x,y)(= (f_y)_y(x,y)) = 6y + 2x.$$

Στο παραπάνω παράδειγμα οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για την συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος του Schwarz.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3. ***(Schwarz)*** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι f_x, f_y και f_{xy} υπάρχουν σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και η f_{xy} είναι συνεχής στο (x_0, y_0). Τότε υπάρχει και η $f_{yx}(x_0, y_0)$ και ισχύει ότι $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Απο τους ορισμούς των μικτών παραγώγων έχουμε

$$f_{yx}(x_0, y_0) = (f_y)_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} \tag{3.1}$$

Επειδή για κάθε $h \neq 0$,

$$f_y(x_0 + h, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} \tag{3.2}$$

και

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \tag{3.3}$$

αντικαθιστώντας τις (3.2) και (3.3) στην (3.1), παίρνουμε ότι η $f_{yx}(x_0, y_0)$ ισούται με το παρακάτω διπλό όριο

$$\lim_{h\to 0} \left(\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk} \right) \tag{3.4}$$

Για κάθε $h, k \neq 0$ ορίζουμε τώρα το κλειστό ορθογώνιο

$$R(h, k) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leq x \leq x_0 + h, y_0 \leq y \leq y_0 + k\right\}$$

με κορυφές τα σημεία $(x_0, y_0), (x_0, y_0 + k), (x_0 + h, y_0), (x_0 + h, y_0 + k)$ και έστω

$$\Delta(f, R(h, k)) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Αντικαθιστώντας στην (3.4) έχουμε ότι

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \left(\lim_{k\to 0} \frac{\Delta(f, R(h, k))}{hk} \right). \tag{3.5}$$

Ο επόμενος ισχυρισμός αποτελεί μια διδιάστατη εκδοχή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 3.4. *Έστω $h, k \neq 0$. Αν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_{xy} υπάρχουν σε κάθε σημείο (εσωτερικό και συνοριακό) του $R(h, k)$ τότε υπάρχουν $\eta = \eta(h, k)$ και $\xi = \xi(h, k)$ με $x_0 < \eta < x_0 + h$ και $y_0 < \xi < y_0 + k$ τέτοια ώστε*

$$\frac{\Delta(f, R(h, k))}{hk} = f_{xy}\left(\eta(h, k), \xi(h, k)\right). \tag{3.6}$$

Δεχόμενοι τον παραπάνω Ισχυρισμό 3.4 ας δούμε πως προκύπτει η ζητούμενη σχέση $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Απο την συνέχεια της f_{xy} στο (x_0, y_0) έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $(x, y) \in A$

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f_{xy}(x, y) - f_{xy}(x_0, y_0)| < \varepsilon/2$$

Συνεπώς απο την (3.6) παίρνουμε ότι για h, k με $|h|, |k| < \delta/2$ ισχύει ότι [1]

$$\left| \frac{\Delta(f, R(h,k))}{hk} - f_{xy}(x_0, y_0) \right| = |f_{xy}(\eta(h,k), \xi(h,k)) - f_{xy}(x_0, y_0)| < \varepsilon/2. \quad (3.7)$$

Από την ύπαρξη της $f_y(x,y)$ για σημεία (x,y) αρκετά κοντά στο (x_0, y_0) και απο τον ορισμό του $\Delta(f, R(h,k))$ έπεται ότι για κάθε $h \neq 0$, το $\lim_{k\to 0} \frac{\Delta(f, R(h,k))}{hk}$ ισούται με

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to 0} \left(\frac{1}{h} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(\lim_{k\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0)}{k} - \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k} \right) \\
&= \frac{f_y(x_0+h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h}.
\end{aligned} \quad (3.8)$$

Απο την (3.7) έχουμε τώρα ότι για κάθε $h \neq 0$ με $|h| < \delta/2$

$$\left| \lim_{k\to 0} \frac{\Delta(f, R(h,k))}{hk} - f_{xy}(x_0, y_0) \right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \quad (3.9)$$

που απο την (3.8) σημαίνει ότι,

$$\left| \frac{f_y(x_0+h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} - f_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon. \quad (3.10)$$

Απο τα παραπάνω έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta' = \delta/2 > 0$ ώστε να ισχύει η (3.10) για κάθε $h \neq 0$ με $|h| < \delta'$. Με άλλα λόγια

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_y(x_0+h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} = f_{xy}(x_0, y_0)$$

ή ισοδύναμα

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

Αποδειξη του Ισχυρισμου 3.4. Ορίζουμε την συνάρτηση $\Delta(x) : [x_0, x_0+h] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\Delta(x) = f(x, y_0+k) - f(x, y_0).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\Delta(f, R) = \Delta(x_0+h) - \Delta(x_0). \quad (3.11)$$

Επίσης η συνάρτηση Δ είναι παραγωγίσιμη με[2]

$$\Delta'(x) = f_x(x, y_0+k) - f_x(x, y_0) \quad \text{για κάθε } x \in [x_0, x_0+h]. \quad (3.12)$$

---

[1] αφού $x_0 < \eta < x_0 + h$ και $y_0 < \xi < y_0 + k$ και άρα αν $x = \eta(h,k)$ και $y = \xi(h,k)$ τότε $\|(x,y) - (x_0, y_0)\| = \|x - x_0, y - y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \sqrt{h^2+k^2} < \delta$.

[2] Πράγματι, θέτουμε $g_1(x) = f(x, y_0+k)$ και $g_2(x) = f(x, y_0)$, $x \in [x_0, x_0+h]$. Τότε $\Delta(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Είναι

$$g_1'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{g_1(x+t) - g_1(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t, y_0+k) - f(x, y_0+k)}{t} = f_x(x, y_0+k)$$

και ομοίως

$$g_2'(x) = \lim_{t\to 0} \frac{g_2(x+t) - g_2(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t, y_0) - f(x, y_0)}{t} = f_x(x, y_0).$$

Άρα $\Delta'(x) = g_1'(x) - g_2'(x) = f_x(x, y_0+k) - f_x(x, y_0)$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συνάρτηση $\Delta(x)$ έχουμε ότι

$$\Delta(f,R) = \Delta(x_0+h) - \Delta(x_0) = h\Delta'(\eta) \overset{(3.12)}{=} h\left(f_x(\eta, y_0+k) - f_x(\eta, y_0)\right) \tag{3.13}$$

για κάποιο $\eta \in (x_0, x_0+h)$.

Ορίζουμε τώρα $g : [y_0, y_0+k] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(y) = f_x(\eta, y)$$

. Παρατηρούμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη με[3]

$$g'(y) = f_{xy}(\eta, y) \quad \text{για κάθε } y \in [y_0, y_0+k] \tag{3.14}$$

Άρα απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συνάρτηση g, έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (y_0, y_0+k)$ τέτοιο ώστε

$$f_x(\eta, y_0+k) - f_x(\eta, y_0) = g(y_0+k) - g(y_0) = kg'(\xi) \overset{(3.14)}{=} kf_{xy}(\eta, \xi). \tag{3.15}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.13) προκύπτει το ζητούμενο. □

Η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. □

Συνήθως το Θεώρημα 3.3 εφαρμόζεται με την παρακάτω (ασθενέστερη) μορφή.

Πορισμα 3.5. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό[4] και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f εως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς[5]. Τότε οι μεικτές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} της f είναι ίσες.*

Όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα, υπάρχουν και περιπτώσεις όπου οι υποθέσεις του Θεωρήματος Schwarz δεν ικανοποιούνται.

Παραδειγμα 3.6. (*Παράδειγμα συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ για την οποία $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$*) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$$

αν $(x,y) \neq (0,0)$. Δείξτε ότι $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Λύση: Έχουμε

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} \tag{3.16}$$

και

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x}. \tag{3.17}$$

---

[3] Πράγματι

$$g'(y) = \lim_{t\to 0} \frac{g(y+t) - g(y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f_x(\eta, y+t) - f_x(\eta, y)}{t} = (f_x)_y(\eta, y) = f_{xy}(\eta, y).$$

[4] Θυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται *ανοικτό* αν κάθε $\mathbf{x} \in A$ είναι εσωτερικό του σημείο δηλαδή για κάθε $\mathbf{x} \in A$ υπάρχει ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}$ που περιέχεται στο A

[5] Θα δούμε αργότερα ότι αν οι δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς τότε οι πρώτης τάξης είναι διαφορίσιμες και άρα συνεχείς

Πρέπει συνεπώς να υπολογίσουμε τις $f_x(0,0), f_y(0,0), f_x(0,y)$ και $f_y(x,0)$. Για το σημείο $(0,0)$ έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

Για το σημείο $(0,y)$, με $y \neq 0$,

$$f_x(0,y) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{y(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = -y$$

και τέλος για το $(x,0)$ με $x \neq 0$,

$$f_y(x,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = x$$

Αντικαθιστώντας στις (3.16) και (3.17) παίρνουμε

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

ενώ

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

3.3. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f εως και δεύτερης τάξης υπάρχουν στα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0). Οι μερικές παράγωγοι $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***τρίτης τάξης μερικές παραγώγους της*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0). Ακολουθώντας αντίστοιχο συμβολισμό με αυτόν των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης, συμβολίζουμε τις τρίτης τάξης μερικές παραγώγους της

f στο σημείο (x_0, y_0) ως εξής:

$$f_{xxx}(x_0,y_0) = (f_{xx})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_0,y_0)$$
$$f_{xxy}(x_0,y_0) = (f_{xx})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}(x_0,y_0)$$
$$f_{xyx}(x_0,y_0) = (f_{xy})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}(x_0,y_0)$$
$$f_{xyy}(x_0,y_0) = (f_{xy})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(x_0,y_0)$$
$$f_{yxx}(x_0,y_0) = (f_{yx})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x_0,y_0)$$
$$f_{yxy}(x_0,y_0) = (f_{yx})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x_0,y_0)$$
$$f_{yyx}(x_0,y_0) = (f_{yy})_x(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x_0,y_0)$$
$$f_{yyy}(x_0,y_0) = (f_{yy})_y(x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)(x_0,y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_0,y_0)$$

Παρατηρηση 3.1. Παρατηρείστε ότι

$$\begin{array}{ll} f_{xxx}(x_0,y_0) = (f_x)_{xx}(x_0,y_0) & f_{xxy}(x_0,y_0) = (f_x)_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xyx}(x_0,y_0) = (f_x)_{yx}(x_0,y_0) & f_{xyy}(x_0,y_0) = (f_x)_{yy}(x_0,y_0) \\ f_{yxx}(x_0,y_0) = (f_y)_{xx}(x_0,y_0) & f_{yxy}(x_0,y_0) = (f_y)_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yyx}(x_0,y_0) = (f_y)_{yx}(x_0,y_0) & f_{yyy}(x_0,y_0) = (f_y)_{yy}(x_0,y_0) \end{array}$$

Πράγματι,

$$f_{xxx}(x_0,y_0) = (f_{xx})_x(x_0,y_0) = ((f_x)_x))_x(x_0,y_0) = (f_x)_{xx}(x_0,y_0)$$
$$f_{xxy}(x_0,y_0) = (f_{xx})_y(x_0,y_0) = ((f_x)_x))_y(x_0,y_0) = (f_x)_{xy}(x_0,y_0)$$
$$f_{xyx}(x_0,y_0) = (f_{xy})_x(x_0,y_0) = ((f_x)_y))_x(x_0,y_0) = (f_x)_{yx}(x_0,y_0)$$
$$f_{xyy}(x_0,y_0) = (f_{xy})_y(x_0,y_0) = ((f_x)_y))_y(x_0,y_0) = (f_x)_{yy}(x_0,y_0) \ldots \text{κ.ο.κ.}$$

Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f εως και τρίτης τάξης υπάρχουν στα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***τέταρτης τάξης μερικές παραγώγους της*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0). Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις n-***τάξης μερικές παράγωγοι της*** f ***στο σημείο*** (x_0, y_0) για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το Πόρισμα 3.5 γενικεύεται ως εξής.

Θεωρημα 3.6. *Έστω $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και n- τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς (συμβολικά $f \in C^n(A)$). Τότε όλες οι μεικτές παράγωγοι που περιέχουν τις ίδιες παραγωγίσεις με διαφορετική σειρά είναι ίσες.*

Απόδειξη. Για $n = 2$ το θεώρημα ταυτίζεται με το Πόρισμα 3.5. Για $n = 3$, έχουμε

$$f_{xyx} = (f_x)_{yx} = (f_x)_{xy} = f_{xxy}$$

$$f_{yxx} = (f_{yx})_x = (f_{xy})_x = f_{xyx}$$

$$f_{yxy} = (f_{yx})_y = (f_{xy})_y = f_{xyy}$$

$$f_{yyx} = (f_y)_{yx} = (f_y)_{xy} = f_{yxy} = (f_{yx})_y = (f_{xy})_y = f_{xyy}$$

Γενικά έστω ότι το θεώρημα ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Έστω $f_{x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}}$, όπου $x_i \in \{x, y\}$ μια μεικτή μερική παράγωγος της f τάξης $n+1$. Θέτουμε r να είναι το πλήθος των $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ με $x_i = x$ και s το πλήθος των $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ με $x_i = y$. Έχουμε $r, s \neq 0$ και $r + s = n + 1$. Θα δείξουμε ότι

$$f_{x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}} = f_{\underbrace{x \ldots x}_{r} \underbrace{y \ldots y}_{s}}.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το x_{n+1}.

Περίπτωση 1: $x_{n+1} = x$. Τότε

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}} = f_{x_1 x_2 \ldots x_n x} = (f_{x_1 x_2 \ldots x_n})_x &\overset{(*)}{=} (f_{\underbrace{x \ldots x}_{r-1} \underbrace{y \ldots y}_{s}})_x \\ &= (f_{\underbrace{x \ldots x}_{r-1} \underbrace{y \ldots y}_{s-1}})_{yx} \\ &= (f_{\underbrace{x \ldots x}_{r-1} \underbrace{y \ldots y}_{s-1}})_{xy} \\ &= (f_{\underbrace{x \ldots x}_{r-1} \underbrace{y \ldots y}_{s-1} x})_y \\ &\overset{(*)}{=} (f_{\underbrace{x \ldots x}_{r} \underbrace{y \ldots y}_{s-1}})_y = f_{\underbrace{x \ldots x}_{r} \underbrace{y \ldots y}_{s}} \end{aligned}$$

όπου η $(*)$ ισχύει απο την επαγωγική μας υπόθεση.

Περίπτωση 2: $x_{n+1} = y$. Τότε ομοίως

$$f_{x_1 x_2 \ldots x_n x_{n+1}} = f_{x_1 x_2 \ldots x_n y} = (f_{x_1 x_2 \ldots x_n})_y = (f_{\underbrace{x \ldots x}_{r} \underbrace{y \ldots y}_{s-1}})_y = (f_{\underbrace{x \ldots x}_{r} \underbrace{y \ldots y}_{s}})$$

Απο τα παραπάνω η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. □

3.4. Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ θα καλείται *κατεύθυνση* στο $\mathbb{R}^2$.

Ορισμός 3.7. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Το όριο (αν υπάρχει)*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

*καλείται **παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο** $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Το όριο αυτό συμβολίζεται με*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην τομή της ευθείας $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ με το A. Πιο συγκεκριμμένα έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$. Ορίζουμε $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η g είναι καλά ορισμένη[6] και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Επίσης αν $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

και ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0).$$

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των κατά οποιαδήποτε κατεύθυνση παραγώγων μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο δεν εξασφαλίζει την συνέχεια της f στο σημείο αυτό.

Παραδειγμα 3.7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Δείξτε ότι
(1) Η f δεν είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
(2) Όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ υπάρχουν.

Λύση: (1) Κατά μήκος της καμπύλης $y = x^2$ εκτός του σημείου $(0, 0)$ η συνάρτηση f είναι σταθερή αφού

$$f(x, x^2) = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

και άρα $\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = 1/2 \neq 0 = f(0, 0)$.

[6] διότι $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$, αφού $\|(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0\| = \|t\mathbf{u}\| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\| = |t| < \delta$

(2) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tu_1, 0+tu_2) - f(0,0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^5 u_1^4 + t^3 u_2^2}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^3(t^2 u_1^4 + u_2^2)} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2}
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1 = u_2 = 0$ αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(α) $u_2 = 0$. Τότε $u_1^2 = 1$ και $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$.

(β) $u_2 \neq 0$. Τότε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} = \frac{u_1^2 u_2}{u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2}$.

3.5. Παράγωγος και διαφορικό πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών.

Πρόταση 3.8. *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$, I (μη τετριμμένο) διάστημα του $\mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(2) Υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - ah|}{|h|} = 0. \tag{3.18}$$

(3) Υπάρχει γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)|}{|h|} = 0. \tag{3.19}$$

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και έστω $f'(x_0) = a \in \mathbb{R}$. Τότε απο τον ορισμό της παραγώγου συνάρτησης έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = a &\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - a = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - a \right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{h} = 0 \qquad (3.20) \\
&\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - ah}{h} \right| = 0 \\
&\Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - ah|}{|h|} = 0.
\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3): Θέτουμε $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $T(x) = ax$. Τότε η T είναι γραμμική ($T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$) και προφανώς θέτοντας $T(x) = ax$ στην (3.18) παίρνουμε την (3.19).

(3) $\Rightarrow$ (1): Απο την Γραμμική Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι μια συνάρτηση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική αν και μόνο αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $T(x) = ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (δες και Πρόταση 2.2 για $n = 1$). Άρα $T(x) = ax$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ και συνεπώς αντικαθιστώντας στην (3.19) έχουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - T(h)|}{|h|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - ah|}{|h|} = 0$$

Τώρα από τις ισοδυναμίες (3.20) προκύπτει ότι $f'(x_0) = a$ δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη. $\square$

Ορισμος 3.9. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Λέμε ότι η f είναι* ***παραγωγίσιμη*** *(ή* ***διαφορίσιμη****)* ***στο σημείο*** *$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν υπάρχει γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{\mathbf{h}\to \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{3.21}$$

όπου $\|\mathbf{h}\| = \sqrt{h^2+k^2}$ το μήκος του $\mathbf{h} = (h, k)$.

Παρατηρησεις 3.1. (1) Ο τύπος (3.21) γράφεται και ως εξής

$$\lim_{\mathbf{x}\to \mathbf{x}_0} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0. \tag{3.22}$$

(2) Λαμβάνοντας υπόψην (δείτε Προτάσεις 2.2 και 2.4), ότι μια συνάρτηση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική αν και μόνο αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$T(x,y) = (a,b)\cdot(x,y) = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax + by$$

παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (ah+bk)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{3.23}$$

ή ισοδύναμα απο την (3.22),

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y) - f(x_0,y_0) - (a(x-x_0)+b(y-y_0))|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0 \tag{3.24}$$

Προταση 3.10. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.*

Απόδειξη. Έστω T η γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί την (3.21). Θέτουμε

$$R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h}) \tag{3.25}$$

για κάθε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$. Άρα

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h}) \tag{3.26}$$

Απο την (3.21) έχουμε $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left(\dfrac{|R(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|}\right) = 0$ και άρα[7]

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = 0.$$

Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι αν $T(x,y) = ax+by$ τότε $\lim_{(x,y)\to(0,0)} T(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(ax+by) = 0$ και άρα

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} T(\mathbf{h}) = 0$$

Απο τα παραπάνω και την (3.26) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} (f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h})) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} T(\mathbf{h}) + \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0)\end{aligned}$$

και άρα η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$. □

Πρόταση 3.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ τότε υπάρχουν οι $f_x(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ και $f_y(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ και η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (3.21) είναι μοναδική και δίνεται απο τον τύπο*

$$T(x,y) = f_x(x_0,y_0)x + f_y(x_0,y_0)y \tag{3.27}$$

Απόδειξη. Έστω $T(x,y) = ax + by$. Απο την (3.21) έχουμε (για $\mathbf{h} = (h,0)$)

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - T(h,0)|}{\sqrt{h^2}} = 0$$

ισοδύναμα

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - ah|}{|h|} = 0$$

Άρα

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) - ah}{h} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} - a\right) = 0$$

που σημαίνει ότι

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = a$$

---

[7]Είναι $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \|\mathbf{h}\| = 0$. Εχουμε

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} |R(\mathbf{h})| = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \left(\frac{|R(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \|\mathbf{h}\|\right) = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|R(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \|\mathbf{h}\| = 0$$

Επειδή $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} |R(\mathbf{h})| = 0$ έπεται ότι και $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = 0$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $f_y(x_0, y_0) = b$. $\square$

Ορισμος 3.12. *Την μοναδική γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (3.21) θα την καλούμε* ***διαφορικό της f στο σημείο*** $\mathbf{x}_0$ *και θα την συμβολίζουμε με $D_{\mathbf{x}_0} f$ και τον πίνακα γραμμή $[f_x(x_0, y_0) \;\; f_y(x_0, y_0)]$ που αναπαριστά την $D_{\mathbf{x}_0} f$ θα το καλούμε* ***παράγωγο της f στο σημείο*** $\mathbf{x}_0$ *και θα το συμβολίζουμε με $f'(x_0, y_0)$.*

Απο την Πρόταση 3.11 έχουμε ότι το διαφορικό της f στο (x_0, y_0) είναι η γραμμική απεικόνιση απο το $\mathbb{R}^2$ στο R με τύπο

$$D_{\mathbf{x}_0} f(x, y) = f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y \tag{3.28}$$

και η παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι ο 1×2 πραγματικός πίνακας

$$f'(x_0, y_0) = [f_x(x_0, y_0) \;\; f_y(x_0, y_0)] = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right]. \tag{3.29}$$

Το διάνυσμα $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ καλείται ***κλίση*** ή ***ανάδελτα*** της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ και συμβολίζεται με

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \tag{3.30}$$

Παρατηρείστε ότι σύμφωνα με τα παραπάνω το διαφορικό $D_{\mathbf{x}_0} f$ της f στο (x_0, y_0) μπορεί να γραφεί με τις εξής μορφές:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{x}_0} f(x, y) &= f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y \\ &= f'(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{γινόμενο πινάκων}) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x, y) \quad (\text{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων}) \end{aligned} \tag{3.31}$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Απο τις (3.21), (3.27), (3.31) έχουμε το εξής συμπέρασμα.

Πορισμα 3.13. *(**Χαρακτηρισμός παραγωγισιμότητας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών σε ένα σημείο** (x_0, y_0)) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι παραγωγισιμη στο (x_0, y_0).

(2) Υπάρχουν οι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ και ισχύει ότι

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{3.32}$$

όπου $\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$.

Παρατηρηση 3.2. Την σχέση (4.10) μπορούμε να την γράψουμε ισοδύναμα με τους ακόλουθους τρόπους

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)h-f_y(x_0,y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{3.33}$$

ή

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-f'(x_0,y_0)\cdot \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{3.34}$$

ή

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)-\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0 \tag{3.35}$$

ή

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{|f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0 \tag{3.36}$$

ή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left| f(x,y)-f(x_0,y_0)-f'(x_0,y_0)\cdot \begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} \right|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0 \tag{3.37}$$

Παραδειγμα 3.8. Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=ax+by$ μια γραμμική συνάρτηση απο το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ έχουμε

$$D_{\mathbf{x}_0}f = f \quad \text{και} \quad f'(x_0,y_0) = [\ a \quad b\ ].$$

Λύση: Πράγματι, έστω τυχαίο σημείο $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Τότε για οποιοδήποτε $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^2$ έχουμε

$$f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}-\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{h})$$

λόγω γραμμικότητας της f. Άρα θέτοντας $T=f$ στον τύπο (3.21) παίρνουμε

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)-T(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{h})-f(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} 0 = 0. \tag{3.38}$$

Απο την (3.38) έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με διαφορικό τον εαυτό της σε κάθε σημείο $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Άρα

$$D_{\mathbf{x}_0}f(x,y) = f(x,y) = ax+by = [\ a \quad b\ ]\cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

και συνεπώς απο τον ορισμό της παραγώγου $f'(x_0,y_0)=[\ a \quad b\ ]$.

Παραδειγμα 3.9. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και $f(0,0)=0$. Δείξτε τα εξής.

(1) Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(2) Οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ είναι και οι δύο μηδέν.
(3) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

Λύση: (1) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x,y)| = \Big|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\Big| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot |y| \leq |y|$$

και άρα απο τον κανόνα παρεμβολής $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(2) Έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

(3) Αν η f ήταν διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ τότε θα έπρεπε

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\|(x,y)\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$
$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$

Όμως το όριο αυτό δεν υπάρχει. Πράγματι, για την ακολουθία $(x_n,y_n) = (1/n,1/n) \to (0,0)$ είναι $f(1/n,1/n) = 1/2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, και άρα και $\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = 1/2$ ενώ για την $(x_n,y_n) = (1/n,0) \to (0,0)$ είναι $f(1/n,0) = 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, και άρα και $\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = 0$.

3.6. Σχέση διαφορικού και κατά κατεύθυνση παραγώγου.

Πρόταση 3.14. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0,y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot \mathbf{u} = f_x(x_0,y_0)u_1 + f_y(x_0,y_0)u_2 \tag{3.39}$$

για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ και $\|\mathbf{u}\| = 1$). Αφού η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ απο το Πόρισμα 3.13 έχουμε ότι

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \tag{3.40}$$

Άρα για $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\lim_{t\to 0} \frac{|f(\mathbf{x}_0+t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} = 0 \tag{3.41}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} &= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})|}{|t|\cdot\|\mathbf{u}\|} \\
&= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(t\mathbf{u})|}{|t|} \\
&= \left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - t\,(\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u})}{t}\right| \\
&= \left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u})\right|
\end{aligned}$$

και άρα η (3.41) γράφεται

$$\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u})\right| = 0$$

Οπότε

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u})\right) = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}.$$

Επειδή εξ ορισμού $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0}\dfrac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$, έπεται το ζητούμενο. □

Η Πρόταση 3.14 θέλει προσοχή στην εφαρμογή της γιατί δεν ισχύει αν η f δεν είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0). Παραθέτουμε σχετικά το επόμενο παράδειγμα.

Παραδειγμα 3.10. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ με $f(0,0)=0$ και $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ αν $(x,y)\neq(0,0)$.

(i) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Δείξτε ότι για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ η παράγωγος της f στο $(0,0)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ υπάρχει.

(iii) Δείξτε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

Λύση: (i) Για κάθε $(x,y)\neq(0,0)$ έχουμε

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} + \frac{|y|^3}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y|$$

Άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ και η f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

(ii) Έστω $\mathbf{u} = (u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3u_1^3 + t^3u_2^3}{t^2u_1^2 + t^2u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3 + u_2^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3 + u_2^3.$$

αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

(iii) Απο το (ii) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$,

$$f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0,0) = 1,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$,

$$f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0,0) = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Απο το Πόρισμα 3.13 γνωρίζουμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

ισοδύναμα,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y + xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

Αλλά τότε αν $x = y = t$ θα πρέπει

$$\lim_{t\to 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}|t|^3} = 0 \text{ ή } \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|} = 0,$$

που βέβαια δεν ισχύει.

2ος τρόπος: Απο την Πρόταση 3.14 αν η f ήταν διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = f_x(x_0,y_0)u_1 + f_y(x_0,y_0)u_2 = u_1 + u_2. \tag{3.42}$$

για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Όμως απο το (ii) έχουμε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0) = u_1^3 + u_2^3$. Άρα θα έπρεπε $u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$, για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ που προφανώς δεν ισχύει.

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 3.15. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{3.43}$$

για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq (0, 0)$ και

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

(οπότε $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$) τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \max\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|u\| = 1\right\} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{3.44}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(\mathbf{x}_0) = \min\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \ \mu\epsilon \ \|u\| = 1\right\} = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{3.45}$$

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Αφού η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ απο την Πρόταση 3.14 έχουμε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| = |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{3.46}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_1 &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \\ &= \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|\end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (3.46) παίρνουμε

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0)$$

που δίνει την (3.44). Ομοίως για το $\mathbf{u}_2$. □

Θεωρημα 3.16. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.

(2) Υπάρχει $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ και το όριο

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

*είναι **ομοιόμορφο** ως προς $\mathbf{u}$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| < \varepsilon$$

*για όλα τα $t \in \mathbb{R}$ με $0 < |t| < \delta$ και **για όλα** τα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$.*

Αποδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2) : Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. Απο την Πρόταση 3.14 έχουμε ότι

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} \tag{3.47}$$

για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ και άρα μπορούμε να θέσουμε $\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}_0)$. Επίσης απο το Πόρισμα 3.13

$$\lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \tag{3.48}$$

που απο τον ορισμό του ορίου σημαίνει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$\frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|} < \varepsilon \tag{3.49}$$

για όλα τα $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ με $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι αυτό σημαίνει ότι το όριο στην (3.47) είναι ομοιόμορφο ως προς $\mathbf{u}$. Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $\delta > 0$ που ικανοποιεί την (3.49). Τότε για όλα τα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ και για όλα τα $0 < |t| < \delta$, έχουμε $\|t\mathbf{u}\| = |t| < \delta$ και άρα απο την (3.49) για $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{|t| \cdot \|\mathbf{u}\|} &= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})}{t} \right| \\
&= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right| \\
&= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Αποδείξαμε συνεπώς ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ (που εξαρτάται μόνο απο το ε) τέτοιο ώστε

$$\left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| < \varepsilon$$

για όλα τα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ με άλλα λόγια το όριο στην (3.47) είναι ομοιόμορφο ως προς $\mathbf{u}$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Έστω ότι για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \tag{3.50}$$

με το παραπάνω όριο να είναι ομοιόμορφο ως προς $\mathbf{u}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. Θέτουμε

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x},\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \tag{3.51}$$

Όπως γνωρίζουμε η T είναι γραμμική. Πράγματι έστω $\varepsilon > 0$. Απο τις (3.50), (3.51) και επειδή το όριο είναι ομοιόμορφο ως προς $\mathbf{u}$ έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ (ανεξάρτητο του $\mathbf{u}$) τέτοιο ώστε

$$\left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \right| = \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - T(\mathbf{u}) \right| < \varepsilon \tag{3.52}$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}$ με $0 < |t| < \delta$ και για όλα τα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Έστω τώρα $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ με $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$. Θέτουμε $t = \|\mathbf{h}\|$ και έστω $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{h}}{t}$. Τότε

$$0 < t < \delta, \|\mathbf{u}\| = 1, \quad \mathbf{h} = t\mathbf{u}$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} &= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - T(t\mathbf{u})|}{|t|} \\
&= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - T(\mathbf{u}) \right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} < \varepsilon$$

$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ με $0 < \|\mathbf{h}| < \delta$. Ισοδύναμα

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{3.53}$$

και άρα (απο τον ορισμό της παραγωγισιμότητας) η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. $\square$

3.7. Συνεχώς παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.17. ***(Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας)*** *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε οι f_x, f_y ορίζονται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0$ και είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Απο τον χαρακτηρισμό παραγωγισιμότητας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών (Πόρισμα 3.13) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \tag{3.54}$$

Έστω B μια ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ τέτοια ώστε $B \subseteq A$ και οι f_x, f_y να ορίζονται στο B. Έστω $\mathbf{x} = (x, y) \in B$ με $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Ας υποθέσουμε ότι $x \neq x_0$ και $y \neq y_0$. (Οι περιπτώσεις $x = x_0$ και $y \neq y_0$ ή $x \neq x_0$ και $y = y_0$ αντιμετωπίζονται ομοίως). Προσθαφερόντας τον όρο $f(x_0, y_0 + k)$ η διαφορά

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$$

γράφεται ως άθροισμα δύο διαφορών όπου στη μία απο αυτές μένει το y σταθερό και στην άλλη το x ως εξής

$$[f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0+k)] + [f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)]$$

Απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) υπάρχουν $\theta_1 = \theta_1(h,k), \theta_2 = \theta_2(h,k) \in (0,1)$ τέτοια ώστε

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k)h + f_y(x_0, y_0+\theta_2 k)k$$

Συνεπώς το πηλίκο

$$\frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} \tag{3.55}$$

γράφεται ως $R_1(h,k) + R_2(h,k)$ όπου

$$R_1(h,k) = (f_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)) \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \tag{3.56}$$

και

$$R_2(h,k) = (f_y(x_0, y_0+\theta_2 k) - f_y(x_0,y_0)) \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \tag{3.57}$$

Επειδή η f_x είναι συνεχής στο (x_0, y_0), έπεται

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} (f_x(x_0+\theta_1 h, y_0+k) - f_x(x_0,y_0)) = 0. \tag{3.58}$$

Επιπλέον
$$\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1.$$
Άρα
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} R_1(h,k) = 0 \tag{3.59}$$
Ομοίως επειδή η f_y είναι συνεχής στο (x_0, y_0),
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(f_y(x_0, y_0 + \theta_2 k) - f_y(x_0, y_0)\right) = 0$$
και αφού
$$\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right| \leq 1$$
έπεται ότι
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} R_2(h,k) = 0 \tag{3.60}$$

Απο τις (3.59) και (3.60) έπεται ότι το όριο του πηλίκου στην (3.55) καθώς το $(h,k) \to (0,0)$ είναι το 0. Συνεπώς η (3.54) ισχύει δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0). $\square$

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 3.17 είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας.

Πορισμα 3.18. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι f_x, f_y ορίζονται στο A και είναι συνεχείς. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.*

Ορισμος 3.19. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία οι f_x, f_y ορίζονται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς καλείται* ***συνεχώς παραγωγίσιμη*** *στο A. Το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων στο A θα συμβολίζεται με $C^1(A)$.*

Με την ορολογία του παραπάνω ορισμού το Πόρισμα 3.18 αναδιατυπώνεται ως εξής:

Πορισμα 3.20. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^1(A)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.*

Παρατηρηση 3.3. Παρατηρείστε ότι $f \in C^1(A)$ αν και μόνο αν η συνάρτηση $\nabla f : A \to \mathbb{R}^2$ με $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

Παραδειγμα 3.11. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = e^x y + x^2 e^y$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και βρείτε την παράγωγο της στο σημείο $(1,0)$.

Λύση: Έχουμε $f_x(x,y) = ye^x + 2xe^y$ και $f_y(x,y) = e^x + x^2 e^y$. Οι f_x, f_y είναι συνεχείς. Πράγματι, έστω $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $(x_n, y_n) \to (x,y)$. Τότε $f_x(x_n, y_n) = y_n e^{x_n} + 2x_n e^{y_n} \to ye^x + 2xe^y$, απο τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων πραγματικών ακολουθιών. Αφού λοιπόν οι f_x, f_y είναι συνεχείς η f είναι παραγωγίσιμη. Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο (x, y) εξ ορισμού είναι ο πίνακας γραμμή $f'(x, y) = [f_x(x, y) \;\; f_y(x, y)]$. Άρα $f'(1, 0) = [2 \;\; e + 1]$.

Παραδειγμα 3.12. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = e^{x+2y}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και δείξτε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = 0.$$

Λύση: Είναι $f_x(x, y) = e^{x+2y}$ και $f_y(x, y) = 2e^{x+2y}$. Άρα η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη.

Επίσης

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \right)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

λόγω παραγωγισιμότητας της f στο $(0, 0)$. Επειδή

$$\left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \right| \leq 1$$

έπεται ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = 0.$$

3.8. *Εφαπτόμενο επίπεδο γραφήματος πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών.* Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. Το γράφημα του περιορισμού της f σε μια περιοχή του σημείου $\mathbf{x}_0$ είναι μια ***επιφάνεια του*** $\mathbb{R}^3$. Το επίπεδο του $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{3.61}$$

καλείται ***εφαπτόμενο επίπεδο της*** f ***στο σημείο*** $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = (f_x(x_0, y_0),\ f_y(x_0, y_0),\ -1) \tag{3.62}$$

καλείται ***κάθετο διάνυσμα της*** f ***στο σημείο*** $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ περιέχεται στο εφαπτόμενο επιπέδο της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν και μόνο αν το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(x - x_0,\ y - y_0,\ z - f(x_0, y_0))$.

Παραδειγμα 3.13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο του εφαπτόμενου επιπέδου της fστο σμείο $(1, 2)$.

Λύση: Έχουμε $f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = 2y$ και άρα η f είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση αφού οι f_x, f_y ορίζονται σε όλο το $\mathbb{R}^2$ και είναι συνεχείς. Επίσης $f(1,2) = 5$ $f_x(1,2) = 2$ και $f_y(1,2) = 4$ και άρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο σημείο (1.2) είναι

$$z = 5 + 2(x-1) + 4(y-2) \Leftrightarrow 2x + 4y - z - 5 = 0$$

3.8. Ασκήσεις

1. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^2 + y^2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ για το οποίο η παράγωγος της f κατα την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $(1,2)$ γίνεται ελάχιστη.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x,y) = e^{x+y}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε την παράγωγό της στο σημείο $(0,0)$. Στην συνέχεια υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - x - y}{|x| + |y|}$$

4. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. Έστω $S = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{u}\| = 1\}$ ο μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi : S \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\varphi(\mathbf{u}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{u} \in S$$

είναι Lipschitz (δηλαδή υπάρχει σταθερά $C \geq 0$ τέτοια ώστε

$$|\varphi(\mathbf{u}_2) - \varphi(\mathbf{u}_1)| \leq C\|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|$$

για όλα τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in S$. Πότε συμβαίνει $C = 0$, ισοδύναμα η φ είναι σταθερή;

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και $f(x,y) = \dfrac{2x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x,y) \neq (0,0)$. (i) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. (ii) Δείξτε ότι για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ η $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$ υπάρχει. (iii) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}\sqrt{x^2 + y^2}$ αν $x \neq 0$ και $f(x,y) = 0$ αν $x = 0$. (i) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,0)$. (ii) Δείξτε ότι για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = 0$. (iii) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$.

7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και $f'(0,0) = (0,0)$ δείξτε ότι $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$.

8. (Αντίστροφο Άσκησης 7). Αν $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ με $f'(0,0) = 0$.

9. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$ και $f'(0,0) \neq (0,0)$ δείξτε ότι το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ δεν υπάρχει.

10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Αν το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ υπάρχει και είναι διάφορο του 0 δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0,0)$. *Εφαρμογή:* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Κεφάλαιο 4

Παραγώγιση συνάρτησης πολλών μεταβλητών

4.1. Παραγώγιση πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Η θεωρία παραγώγισης πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι άμεση επέκταση της αντίστοιχης θεωρίας παραγώγισης πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

4.1.1. Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης.

Ορισμος 4.1. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Το όριο (αν υπάρχει)*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, \ldots, x_i^0 + h, \ldots, x_n^0) - f(x_1^0, \ldots, x_i^0, \ldots, x_n^0)}{h}.$$

καλείται **μερική παράγωγος ως προς x_i της συνάρτησης f στο σημείο** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *και συμβολίζεται με*

$$f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \quad ή \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

Αν $A_i \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ του A στα οποία η $f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη τότε η συνάρτηση $(x_1, \ldots, x_n) \to f_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in A_1$ καλείται *μερική παράγωγος της f ως προς x_i* και συμβολίζεται με f_{x_i} ή $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$.

Παραδειγμα 4.1. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2yz + xy^2z^3$$

Για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε

$$f_x(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 3x^2 + 2xyz + y^2z^3,$$

$$f_y(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2 + x^2z + 2xyz^3$$

$$f_z(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 + x^2y + 3xy^2z^2.$$

4.1.2. Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης.

Ορισμος 4.2. *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *εσωτερικό σημείο του* A *και* $f : A \to \mathbb{R}$. *Έστω επίσης* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *και έστω ότι η* f_{x_i} *ορίζεται σε μια περιοχή του* $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. *Τότε αν υπάρχει η μερική παράγωγος της* f_{x_i} *ως προς* x_j *στο σημείο* $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, *δηλαδή αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_j^0 + h, \ldots, x_n^0) - f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_j^0, \ldots x_n^0)}{h}.$$

τότε αυτό καλείται **μερική παράγωγος της** f **στο σημείο** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ **ως προς** x_i **και** x_j *και συμβολίζεται με*

$$f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \quad (\text{αν } i = j \text{ γράφουμε } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1^0, \ldots, x_n^0))$$

Παρατηρείστε ότι

$$\begin{aligned} f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0) &= (f_{x_i})_{x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_1^0, \ldots, x_n^0) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \end{aligned}$$

Η μερική παράγωγος $f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ καλείται ***δεύτερης τάξης*** μερική παράγωγος στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Ειδικότερα αν $i \neq j$ η $f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ καλείται ***μεικτή***.

Παραδειγμα 4.2. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3.$$

Για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε

$$\begin{gathered} f_x(x, y, z) = 3x^2, \quad f_y(x, y, z) = 3y^2, \quad f_z(x, y, z) = 3z^2 \\ f_{xx}(x, y, z) = (f_x)_x(x, y, z) = 6x \\ f_{xy}(x, y, z) = (f_x)_y(x, y, z) = 0, \\ f_{xz}(x, y, z) = (f_x)_z(x, y, z) = 0 \\ f_{yx}(x, y, z) = (f_y)_x(x, y, z) = 0 \\ f_{yy}(x, y, z) = (f_y)_y(x, y, z) = 6y \\ f_{yz}(x, y, z) = (f_y)_z(x, y, z) = 0 \\ f_{zx}(x, y, z) = (f_z)_x(x, y, z) = 0 \\ f_{zy}(x, y, z) = (f_z)_y(x, y, z) = 0 \\ f_{zz}(x, y, z) = (f_z)_z(x, y, z) = 6z. \end{gathered}$$

Το Θεώρημα 3.3 του Schwarz αναδιατυπώνεται ως εξής.

Θεωρημα 4.3. *(Schwarz) Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0$ *εσωτερικό σημείο του* A *και* $f : A \to \mathbb{R}$. *Έστω επίσης* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *και έστω ότι οι μερικές παράγωγοι* f_{x_i}, f_{x_j} *και* $f_{x_i x_j}$ *υπάρχουν σε μια περιοχή του* $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *και η* $f_{x_i x_j}$ *είναι συνεχής στο* $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. *Τότε υπάρχει και η* $f_{x_j x_i}(\mathbf{x}_0)$ *και ισχύει ότι* $f_{x_j x_i}(\mathbf{x}_0) = f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)$.

Όπως και για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών συνήθως το Θεώρημα 4.3 εφαρμόζεται με την παρακάτω μορφή.

Πορισμα 4.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς. Τότε οι μεικτές μερικές παράγωγοι $f_{x_i x_j}$ και $f_{x_j x_i}$ είναι ίσες.*

4.1.3. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης.

Ορισμος 4.5. ***(Μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης)*** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $f : A \to \mathbb{R}$. Έστω επίσης $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ και έστω ότι η $f_{x_i x_j}$ ορίζεται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Τότε αν υπάρχει η μερική παράγωγος της $f_{x_i x_j}$ ως προς x_k στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$, δηλαδή αν υπάρχει το όριο*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_{x_i x_j}(x_1^0, \ldots, x_k^0 + h, \ldots, x_n^0) - f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_k^0, \ldots x_n^0)}{h}.$$

*τότε αυτό καλείται **μερική παράγωγος της** f **στο σημείο** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ **ως προς** x_i**,** x_j **και** x_k και συμβολίζεται με*

$$f_{x_i x_j x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \quad ή \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

Ειδικότερα αν $i = j \neq k$ τότε γράφουμε

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_i^2}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

και αν $i = j = k$,

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_k^3}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

Παρατηρηση 4.1. Παρατηρείστε ότι

$$\begin{aligned} f_{x_i x_j x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0) &= \left(f_{x_i x_j}\right)_{x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \\ &= \left((f_{x_i})_{x_j}\right)_{x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \\ &= (f_{x_i})_{x_j x_k}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \end{aligned}$$

Η μερική παράγωγος $f_{x_i x_j x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ καλείται ***τρίτης τάξης*** μερική παράγωγος στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Ειδικότερα αν τουλάχιστον δύο απο τα i, j, k είναι διαφορετικά τότε η $f_{x_i x_j x_j}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ καλείται ***μεικτή***. Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f εως και τρίτης τάξης υπάρχουν σε μιας περιοχή του $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ ως προς x_i (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***τέταρτης τάξης μερικές παραγώγους της*** f ***στο σημείο*** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις n***-τάξης μερικές παράγωγοι της*** f ***στο σημείο*** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το Πόρισμα 4.4 γενικεύεται ως εξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.6. *Έστω $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και n- τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς (συμβολικά $f \in C^n(A)$). Τότε όλες οι μεικτές παράγωγοι που περιέχουν τις ίδιες παραγωγίσεις με διαφορετική σειρά είναι ίσες.*

Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f εως και τρίτης τάξης υπάρχουν στα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται ***τέταρτης τάξης μερικές παραγώγους της f στο σημείο*** (x_0, y_0). Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις n***-τάξης μερικές παράγωγοι της f στο σημείο*** (x_0, y_0) για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Το Θεώρημα 3.6 διατυπώνεται ως εξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.7. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και m- τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς (συμβολικά $f \in C^m(A)$). Τότε όλες οι μεικτές παράγωγοι που περιέχουν τις ίδιες παραγωγίσεις με διαφορετική σειρά είναι ίσες.*

4.1.4. Παράγωγος κατά κατεύθυνση. Κάθε $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ με $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n u_i^2} = 1$ θα καλείται *κατεύθυνση* στο $\mathbb{R}^n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.8. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^n$. Το όριο (αν υπάρχει)*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1^0 + tu_1, \ldots . x_n^0 + tu_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{t}$$

*καλείται **παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο** $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Το όριο αυτό συμβολίζεται με*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$$

Όπως και στην περίπτωση συνάρτησης δύο μεταβλητών παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην τομή της ευθείας $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ με το A. Πιο συγκεκριμμένα έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$. Ορίζουμε $g : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η g είναι καλά ορισμένη[1] και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Επίσης αν $\mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = f_{x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$$

για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$.

[1]διότι $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$, αφού $\|(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0\| = \|t\mathbf{u}\| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\| = |t| < \delta$

4.1.5. *Παράγωγος και διαφορικό πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών.*

Ορισμος 4.9. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Λέμε ότι η f είναι* ***παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο σημείο*** *$\mathbf{x}_0$ αν υπάρχει γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{4.1}$$

Παρατηρησεις 4.1. (1) Ο τύπος (4.1) γράφεται και ως εξής

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0. \tag{4.2}$$

(2) Λαμβάνοντας υπόψην (δείτε Προτάσεις 2.2 και 2.4), ότι μια συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι γραμμική αν και μόνο αν υπάρχουν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$T(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a_1, \dots, a_n$ τέτοια ώστε

$$\lim_{(h_1,\dots,h_n)\to(0,\dots,0)} \frac{\left|f(x_1^0+h_1, \dots, x_n^0+h_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) - \left(\sum_{i=1}^n a_ih_i\right)\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n h_i^2}} = 0 \tag{4.3}$$

ή ισοδύναμα απο την (4.2),

$$\lim_{(x_1,\dots x_n)\to(x_1^0,\dots,x_n^0)} \frac{\left|f(x_1, \dots, x_n) - f(x_1^0, \dots, x_n^0) - \left(\sum_{i=1}^n a_i(x_i - x_i^0)\right)\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0)^2}} = 0 \tag{4.4}$$

Πχ. για $n = 3$ οι παραπάνω τύποι γράφονται πιο απλά

$$\lim_{(h_1,h_2,h_3)\to(0,0,0)} \frac{|f(x_0+h_1, y_0+h_2, z_0+h_3) - f(x_0,y_0,z_0) - ah_1 - bh_2 - ch_3)|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}} = 0 \tag{4.5}$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{|f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0) - c(z-z_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} = 0 \tag{4.6}$$

Προταση 4.10. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.*

Προταση 4.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε υπάρχουν οι $f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (4.1) είναι μοναδική και δίνεται απο τον τύπο*

$$T(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)x_n = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{x}. \tag{4.7}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Ορισμος 4.12. *Την μοναδική γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την* (4.1) *θα την καλούμε* ***διαφορικό της*** f ***στο σημείο*** $\mathbf{x}_0$ *και θα την συμβολίζουμε με* $D_{\mathbf{x}_0}f$. *Τον πίνακα γραμμή*

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\dots\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right]$$

θα τον καλούμε ***παράγωγο της*** f ***στο σημείο*** $\mathbf{x}_0$ *και θα το συμβολίζουμε με* $f'(\mathbf{x}_0)$.

Απο την Πρόταση 4.11 έχουμε ότι το διαφορικό της f στο $\mathbf{x}_0$ είναι η γραμμική απεικόνιση απο το $\mathbb{R}^n$ στο R με τύπο

$$D_{\mathbf{x}_0}f(x_1,\dots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_1+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)x_n \tag{4.8}$$

και η παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι ο $1\times n$ πραγματικός πίνακας

$$f'(\mathbf{x}_0)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)\ \dots\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right]. \tag{4.9}$$

Το διάνυσμα $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)\right)$ καλείται ***κλίση*** ή ***ανάδελτα*** της f στο $\mathbf{x}_0$ και συμβολίζεται με $\nabla f(\mathbf{x}_0)$.

Παρατηρείστε ότι σύμφωνα με τα παραπάνω το διαφορικό $D_{\mathbf{x}_0}f$ της f στο $\mathbf{x}_0$ μπορεί να γραφεί με τις εξής μορφές:

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{x}_0}f(x_1,\dots,x_n)&=f_{x_1}(\mathbf{x}_0)x_1+\dots+f_{x_n}(\mathbf{x}_0)x_n\\
&=\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)x_1+\dots\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)x_n\\
&=f'(\mathbf{x}_0)\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{bmatrix}\quad \text{(γινόμενο πινάκων)}\\
&=\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(x_1,\dots,x_n)\quad \text{(εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων)}
\end{aligned}$$

Πορισμα 4.13. *(**Χαρακτηρισμός παραγωγισιμότητας πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών**) Έστω $f : A\to\mathbb{R}$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι παραγωγισιμη στο $\mathbf{x}_0$.

(2) Υπάρχουν οι $f_{x_i}(\mathbf{x}_0)$ για κάθε $i=1,\dots,n$ και ισχύει ότι

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h})-f(\mathbf{x}_0)-\nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{h}|}{\|\mathbf{h}\|}=0. \tag{4.10}$$

Παραδειγμα 4.3. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $f(x_1,\dots,x_n)=a_1x_1+\dots+a_nx_n$ μια γραμμική συνάρτηση απο το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι για κάθε $\mathbf{x}_0\in\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$D_{\mathbf{x}_0}f=f\ \text{ και }\ f'(\mathbf{x}_0)=[a_1\ \dots\ a_n].$$

Λύση: Όπως και στο Παράδειγμα 3.8.

Παραδειγμα 4.4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$$

Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$. (Συγκρίνατε με την Άσκηση 1 στην Παράγραφο 3.8)

Λύση: Έχουμε

$$f_x(0, 0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0, 0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, h, 0) - f(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_z(0, 0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, 0, h) - f(0, 0, 0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0, 0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{f(x, y, z) - f(0, 0, 0) - f_x(0, 0, 0)x - f_y(0, 0, 0)y - f_z(0, 0, 0)z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} =$$

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \sqrt{\frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

ισοδύναμα

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} = 0$$

Πράγματι, για κάθε $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ έχουμε

$$0 \leq \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} = |x| \cdot \frac{|yz|}{x^2 + y^2 + z^2} \leq |x|$$

και άρα απο τον κανόνα παρεμβολής $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|xyz|}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$

4.1.6. *Σχέση διαφορικού και κατά κατεύθυνση παραγώγου.*

Προταση 4.14. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} = f_{x_1}(\mathbf{x}_0)u_1 + \cdots + f_{x_n}(\mathbf{x}_0)u_n \tag{4.11}$$

για κάθε μοναδιαίο $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$.

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.15. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \tag{4.12}$$

για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq (0,0)$ και

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

(οπότε $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$) τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \max\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|u\| = 1\right\} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{4.13}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(\mathbf{x}_0) = \min\left\{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : u \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|u\| = 1\right\} = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \tag{4.14}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.16. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.

(2) Υπάρχει $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ και το όριο

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

*είναι **ομοιόμορφο** ως προς $\mathbf{u}$ (δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\left|\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)\right| < \varepsilon$$

*για όλα τα $t \in \mathbb{R}$ με $0 < |t| < \delta$ και **για όλα** τα $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$.)*

3.7. *Συνεχώς παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.*

Το Θεώρημα 3.17 γενικεύεται ως εξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.17. (***Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας***) *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε για όλα τα $i = 1, \ldots, n$ οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της f ως προς x_i ορίζονται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0$ και είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.*

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 4.17 είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.18. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $i = 1, \ldots, n$ η f_{x_i} ορίζεται στο A και είναι συνεχής. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.*

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.19. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $i = 1, \ldots, n$ η f_{x_i} ορίζεται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχής καλείται **συνεχώς παραγωγίσιμη** στο A. Το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων στο A θα συμβολίζεται με $C^1(A)$.*

Με την ορολογία του παραπάνω ορισμού το Πόρισμα 4.18 αναδιατυπώνεται ως εξής:

Πορισμα 4.20. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f \in C^1(A)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A.*

Παρατηρηση 4.2. Παρατηρείστε ότι $f \in C^1(A)$ αν και μόνο αν η συνάρτηση $\nabla f : A \to \mathbb{R}^n$ με $\nabla f(\mathbf{x}) = (f_{x_1}(\mathbf{x}), \ldots, f_{x_n}(\mathbf{x}))$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

Παραδειγμα 4.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y, z) = xyz$. Βρείτε την παράγωγο της f στο $(1, 2, 3)$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0)$.

Λύση: Εύκολα βλέπουμε ότι $f_x(x, y, z) = yz$, $f_y(x, y, z) = xz$ και $f_z(x, y, z) = xy$. Αφού η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους είναι παραγωγίσιμη. Άρα απο την Πρόταση 4.14,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(1, 2, 3) &= \nabla f(1, 2, 3) \cdot \mathbf{u} \\ &= f_x(1, 2, 3)u_1 + f_y(1, 2, 3)u_2 + f_z(1, 2, 3)u_3 \\ &= 6 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot 0 = \frac{30}{5} = 6.\end{aligned}$$

Παραδειγμα 4.6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y, z) = e^{x+y^2+z^3}.$$

Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και βρείτε την παράγωγο της στο σημείο $(1, 0, 0)$. Υπολογίστε επίσης το όριο

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{e^{x+y^2+z^3} - ex}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}}$$

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x, y, z) = e^{x+y^2+z^3},\ f_y(x, y, z) = 2ye^{x+y^2+z^3},\ f_z(x, y, z) = 3z^2e^{x+y^2+z^3}$$

για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Οι f_x, f_y, f_z είναι συνεχείς. Πράγματι, έστω $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ και $(x_n, y_n, z_n) \to (x, y, z)$. Τότε $x_n \to x$, $y_n \to y$, $z_n \to z$. Άρα $f_x(x_n, y_n, z_n) = e^{x_n+y_n^2+z_n^3} \to e^{x+y^2+z^3}$, απο τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων πραγματικών ακολουθιών. Ομοίως δείχνουμε ότι οι f_y, f_z είναι συνεχείς. Αφού λοιπόν όλες οι μερικές παράγωγοι της f είναι συνεχείς, έχουμε ότι $f \in C^1(A)$ και άρα απο το Πόρισμα 4.20, η f είναι παραγωγίσιμη παντού στο A. Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ εξ ορισμού είναι ο πίνακας γραμμή $f'(x, y, z) = [f_x(x, y, z)\ f_y(x, y, z)\ f_z(x, y, z)]$. Άρα

$$f'(1, 0, 0) = [f_x(1, 0, 0)\ f_y(1, 0, 0)\ f_z(1, 0, 0)] = [e\ 0\ 0]$$

Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο $(1, 0, 0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{f(x, y, z) - f(1, 0, 0) - \nabla f(1, 0, 0) \cdot (x - 1, y, z)}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}} = 0$$

οπότε αντικαθιστώντας

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{e^{x+y^2+z^3} - e - e(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,0,0)} \frac{e^{x+y^2+z^3} - ex}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}} = 0$$

4.1.8. Εφαπτόμενο υπερεπίπεδο γραφήματος πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Το *υπερεπίπεδο* του $\mathbb{R}^{n+1}$ με εξίσωση

$$x_{n+1} = f(\mathbf{x}_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0)(x_1 - x_1^0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0)(x_n - x_n^0) \tag{4.15}$$

καλείται ***εφαπτόμενο υπερεπίπεδο της*** f ***στο σημείο*** $\mathbf{x}_0$. Το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0),\ -1\right) \in \mathbb{R}^{n+1} \tag{4.16}$$

καλείται ***κάθετο διάνυσμα της*** f ***στο σημείο*** $\mathbf{x}_0$. Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ περιέχεται στο εφαπτόμενο υπερεπιπέδο της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ αν και μόνο αν το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\big(x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0,\ x_{n+1} - f(\mathbf{x}_0)\big)$.

Παραδειγμα 4.7. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε τον τύπο του εφαπτόμενου υπερεπιπέδου της f στο $(1,2,3)$.

Λύση: Έχουμε $f_x(x,y,z) = 2x,\ f_y(x,y,z) = 2y$ και $f_z(x,y,z) = 2z$. Παρατηρούμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f ορίζονται σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}^3$ και είναι συνεχείς. Άρα η f είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Επίσης $f(1,2,3) = 14$ $f_x(1,2,3) = 2,\ f_y(1,2,3) = 4$ και $f_z(1,2,3) = 6$. Άρα (αναπαριστώντας τα σημεία του $\mathbb{R}^4$ με $\mathbf{x} = (x,y,z,w)$) η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο σμείο $(1,2,3)$ είναι

$$w = 14 + 2(x-1) + 4(y-2) + 6(z-3) \Leftrightarrow 2x + 4y - 6z - w - 4 = 0$$

4.2. Παραγώγιση διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Ο Ορισμός 4.9 γενικεύεται ως εξής:

Ορισμος 4.21. *Έστω* $f : A \to \mathbb{R}^m$*,* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *και* $\mathbf{x}_0$ *εσωτερικό σημείο του* A*. Λέμε ότι η* f *είναι* ***παραγωγίσιμη*** *(ή* ***διαφορίσιμη****)* ***στο σημείο*** $\mathbf{x}_0$ *αν υπάρχει γραμμική συνάρτηση* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *τέτοια ώστε*

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \tag{4.17}$$

Σημείωση: Η νόρμα στον αριθμητή του κλάσματος στην (4.17) είναι η νόρμα στον $\mathbb{R}^m$ ενώ η νόμα στον παρονομαστή είναι η νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Πρόταση 4.22. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.*

Πρόταση 4.23. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική συνάρτηση. Έστω επίσης $\mathbf{x}_0$ εσωτερικό σημείο του A. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η T ικανοποιεί την εξίσωση (4.17).

(2) Αν $f = (f_1, \dots, f_m)$ και $T = (T_1, \dots, T_m)$ οι αναλύσεις της f και T αντίστοιχα σε συνιστώσες συναρτήσεις τότε για κάθε $i = 1, \dots, m$ η $f_i : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και $T_i = D_{\mathbf{x}_0} f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε καταρχάς ότι

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}$$

όπου το $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ είναι το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^m$. Τώρα θεωρώντας την συνάρτηση

$$g(\mathbf{h}) = \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}$$

έχουμε ότι $g = (g_1, \dots, g_m)$ όπου για κάθε $i = 1, \dots, m$,

$$g_i(\mathbf{h}) = \frac{f_i(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) - T_i(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|}$$

Απο την Πρόταση 2.12 έχουμε ότι

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} g(\mathbf{h}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} g_i(\mathbf{h}) = 0 \text{ για όλα τα } i = 1, \dots, m.$$

Ισοδύναμα

$$\begin{aligned}
&\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow &\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{f_i(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) - T_i(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \quad \text{για όλα τα } i = 1, \dots, m \\
\Leftrightarrow &\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{|f_i(\mathbf{x}_0+\mathbf{h}) - f_i(\mathbf{x}_0) - T_i(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \quad \text{για όλα τα } i = 1, \dots, m
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{η } f_i \text{ είναι παραγωγίσιμη στο } \mathbf{x}_0 \text{ και } T_i = D_{\mathbf{x}_0} f_i \ \text{ για όλα τα } i = 1, \dots, m.$$

□

Απο την παραπάνω πρόταση έχουμε ειδικότερα ότι αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε η γραμμική απεικόνιση T που ικανοποιεί την (4.17) είναι μοναδική και είναι αψτή η γραμμική απεικόνιση απο τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ που οι συνιστώσες συναρτήσεις της είναι τα διαφορικά των συνιστωσών συναρτήσεων της f στο $\mathbf{x}_0$.

Ορισμός 4.24. *Την μοναδική γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ που ικανοποιεί την (4.17) θα την καλούμε **διαφορικό της** f **στο σημείο** $\mathbf{x}_0$ και θα την συμβολίζουμε με $D_{\mathbf{x}_0} f$. Τον $m \times n$-πίνακα που αναπαριστά το διαφορικό $Df_{\mathbf{x}_0}$ θα τον καλούμε **παράγωγο της** f **στο σημείο** $\mathbf{x}_0$ και θα τον συμβολίζουμε με $f'(\mathbf{x}_0)$.*

Απο την Πρόταση 4.23 έχουμε ότι αν $f = (f_1, \dots, f_m)$ τότε

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) &= (D_{\mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \dots, D_{\mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x})) \\ &= (\nabla f_1(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}, \dots, \nabla f_m(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) x_j \right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Συνεπώς (Πρόταση 2.5) για κάθε $i = 1, \dots, m$ η i-γραμμή του πίνακα που αναπαριστά την γραμμική συνάρτηση $D_{\mathbf{x}_0} f$ θα είναι ο πίνακας γραμμή $\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0), \dots, \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right]$ που αναπαριστά την $D_{\mathbf{x}_0} f_i$ και άρα η παράγωγος $f'(\mathbf{x}_0)$ είναι ο $m \times n$ πίνακας

$$f'(\mathbf{x}_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0) \right] \tag{4.19}$$

Ο πίνακας αυτός καλείται και ***πίνακας των μερικών παραγώγων της*** f ***στο*** $\mathbf{x}_0$ ή και ***Ιακωβιανός πίνακας της*** f ***στο*** $\mathbf{x}_0$.

Παρατηρηση 4.3. Αν $n = 1$ δηλαδή η $f = (f_1, \dots, f_m) : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ είναι διανυσματική συνάρτηση μιας μεταβλητής τότε κάθε f_i είναι πραγματική συνάρτηση μιας μεταβλητής και η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 του $A \subseteq \mathbb{R}$ αν και μόνο αν κάθε $f_i : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επίσης απο την (4.19) η παράγωγος $f'(x_0)$ είναι ο $m \times 1$-πίνακας στήλη

$$f'(x_0) = \begin{bmatrix} f_1'(x_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_m'(x_0) \end{bmatrix}. \tag{4.20}$$

Θεωρημα 4.25. ***(Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας)*** *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $f = (f_1, \dots, f_m) : A \to \mathbb{R}^m$ *τέτοια ώστε οι* $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *ορίζονται στο* A *και είναι συνεχείς για όλα τα* $i = 1, \dots, m$ *και* $j = 1, \dots, n$. *Τότε η* f *είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του* A.

Παραδειγμα 4.8. Έστω $f(x, y, z) = \big(x^2 + y^3 + z^4, \sin(xyz)\big)$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε την παράγωγό της στο σημείο $(0, 1, 2)$.

Λύση: Έχουμε $f = (f_1, f_2)$ με $f_1(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$ και $f_2(x, y, z) = \sin(xyz)$. Είναι

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2 \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}(x, y, z) = 4z^3$$

και

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y, z) = yz \cos(xyz), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y, z) = xz \cos(xyz) \quad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x, y, z) = xy \cos(xyz)$$

Άρα, αφού όλες οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των f_1, f_2 υπάρχουν και είναι συνεχείς, έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη. Απο τον ορισμό της παραγώγου, η παράγωγος της f σε ένα σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ δίνεται απο τον τύπο

$$f'(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2x & 3y^2 & 4z^3 \\ yz\cos(xyz) & xz\cos(xyz) & xy\cos(xyz) \end{bmatrix}$$

και άρα

$$f'(0,1,2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 32 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.3. Καμπύλες στον $\mathbb{R}^m$, εφαπτόμενο διάνυσμα.

Με τον όρο ***καμπύλη στον*** $\mathbb{R}^m$ θα εννοούμε μια συνάρτηση $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$$

όπου το I είναι ένα (μη τετριμμένο[2]) ***διάστημα του*** $\mathbb{R}$. Με άλλα λόγια *καμπύλες* είναι οι διανυσματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής με πεδίο ορισμού ένα (μη τετριμμένο) διάστημα του $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών $\{\mathbf{r}(t) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^m$ μιας τέτοιας συνάρτησης θα το καλούμε ***ίχνος της καμπύλης***.

Ο ορισμός της παραγωγισιμότητας (Ορισμός 4.21) για την περίπτωση όπου η συνάρτηση f είναι μια καμπύλη παίρνει την εξής μορφή:

Ορισμος 4.26. *Έστω $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, $t \in I$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^m$ και $t_0 \in I$. Θα λέμε ότι η $\mathbf{r}$ είναι **παραγωγίσιμη** (ή **διαφορίσιμη**) **στο σημείο** t_0 αν υπάρχει γραμμική συνάρτηση $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\mathbf{r}(t_0 + h) - \mathbf{r}(t_0) - T(h)\|}{|h|} = 0. \tag{4.21}$$

Σημειώστε ότι στον παραπάνω ορισμό επιτρέπουμε[3] το t_0 να είναι και ***άκρο του*** I (αρκεί βέβαια να περιέχεται στο I). Στην περίπτωση αυτή το όριο που εμφανίζεται στην (4.21) είναι στην ουσία πλευρικό. Όπως στην Πρόταση 4.23 και την Παρατήρηση 4.3 (η περίπτωση όπου το t_0 είναι άκρο του I δεν έχει καμμία διαφορά) αποδεικνύεται η εξής πρόταση.

Προταση 4.27. *Έστω $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^m$, $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t))$, $t \in I$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^m$ και $t_0 \in I$. Η καμπύλη $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο t_0 αν και μόνο αν οι συνιστώσες συναρτήσεις $x_1(t), \ldots, x_m(t)$ είναι παραγωγίσιμες στο t_0. Στην περίπτωση*

---

[2] δηλαδή το I δεν είναι το κενό ή ένα μονοσύνολο. Κατά τα άλλα μπορεί να είναι κλειστό, ανοικτό, φραμένο ή μη φραγμένο.

[3] Όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια η επέκταση του ορισμού της παραγώγου σε ακραία σημεία του I θα μας διευκολύνει στην παρουσίαση πολλών θεωρημάτων.

αυτή η παράγωγος της $\mathbf{r}$ *στο* t_0 *είναι ο πίνακας στήλη*

$$\mathbf{r}'(t_0) = \begin{bmatrix} x_1'(t_0) \\ . \\ . \\ . \\ x_m'(t_0) \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

Το διάνυσμα

$$(x_1'(t_0), \ldots, x_m'(t_0)) \tag{4.23}$$

καλείται ***εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης στο*** t_0 και συνηθίζεται να συμβολίζεται[4] και αυτό με $\mathbf{r}'(t_0)$.

Παραδείγματα: (1) Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^m$. Θεωρούμε την καμπύλη $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in [0,1] \tag{4.24}$$

Αν $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ και $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ τότε η $\mathbf{r}(t)$ παίρνει την μορφή

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_m(t)) \tag{4.25}$$

όπου

$$x_1(t) = a_1 + t(b_1 - a_1), \ldots, x_m(t) = a_m + t(b_m - a_m) \tag{4.26}$$

Το ίχνος της καμπύλης αυτής καλείται ***κλειστό ευθύγραμμο τμήμα του*** $\mathbb{R}^n$ ***με άκρα τα*** $\mathbf{a}$***,*** $\mathbf{b}$, και συμβολίζεται με $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, δηλαδή

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in [0,1]\}$$

Παρατηρούμε ότι

$$x_1'(t) = b_1 - a_1, \ldots, x_m'(t) = b_m - a_m$$

και άρα το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\mathbf{r}$ σε ένα $t \in (0,1)$ δίνεται απο τον τύπο

$$\mathbf{r}'(t) = (b_1 - a_1, \ldots, b_m - a_m) = \mathbf{b} - \mathbf{a}. \tag{4.27}$$

για κάθε $t \in [0,1]$.

(2) Η καμπύλη $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{r}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, $t \in [0,1]$ έχει ίχνος τον ***μοναδιαίο κύκλο του*** $\mathbb{R}^2$.

[4]στα επόμενα για να αποφύγουμε τον κίνδυνο σύγχισης λόγω του ίδιου συμβολισμού θα αναφέρουμε ρητά αν εννοούμε το εφαπτομενο διάνυσμα ή την παράγωγο της $\mathbf{r}(t)$

Κεφάλαιο 5

Ο Κανόνας Αλυσίδας και Εφαρμογές του

5.1. Πρώτη μορφή του Κανόνα Αλυσίδας

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί την πιο απλή μορφή του κανόνα αλυσίδας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (η γενική μορφή του θεωρήματος θα παρουσιασθεί σε επόμενη παράγραφο).

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1. (***Κανόνας Αλυσίδας I***) *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε το ίχνος της περιέχεται στο A. Ορίζουμε $F : I \to \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεσή τους δηλαδή*

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t)),$$

για κάθε $t \in I$. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= f'(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \quad (\textit{γινόμενο πινάκων}) \\ &= [f_x(x(t_0), y(t_0)) \;\; f_y(x(t_0), y(t_0))] \cdot \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix} \\ &= f_x(x(t_0), y(t_0))\, x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))\, y'(t_0). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Σημείωση: Ο τύπος (5.1) γράφεται και ως εξής

$$F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \quad (\text{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων}) \tag{5.2}$$

όπου εδώ με $\mathbf{r}'(t_0)$ εννοούμε το ***εφαπτόμενο διάνυσμα*** της καμπύλης $\mathbf{r}(t)$ στο t_0, δηλαδή το $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $x_0 = x(t_0)$ και $y_0 = y(t_0)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \to t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \to t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0 \tag{5.4}$$

Για κάθε $(x, y) \in A$ θέτουμε

$$R(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

οπότε

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)+R(x,y) \tag{5.5}$$

Επίσης η (5.4) γράφεται

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0 \tag{5.6}$$

Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} F(t)-F(t_0) &= f\left(x(t),y(t)\right)-f\left(x_0,y_0\right) \\ &\overset{(5.5)}{=} f_x(x_0,y_0)\left(x(t)-x_0\right)+f_y(x_0,y_0)\left(y(t)-y_0\right)+R\left(x(t),y(t)\right) \\ &= f_x(x_0,y_0)\left(x(t)-x(t_0)\right)+f_y(x_0,y_0)\left(y(t)-y(t_0)\right)+R\left(x(t),y(t)\right) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t\to t_0}\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0} \\ &= f_x(x_0,y_0)\lim_{t\to t_0}\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}+f_y(x_0,y_0)\lim_{t\to t_0}\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} \\ &+\lim_{t\to t_0}\frac{R\left(x(t),y(t)\right)}{t-t_0} \\ &= f_x(x_0,y_0)x'(t_0)+f_y(x_0,y_0)y'(t_0)+\lim_{t\to t_0}\frac{R\left(x(t),y(t)\right)}{t-t_0} \end{aligned}$$

Για να ολοκληρωθεί συνεπώς η απόδειξη αρκεί να δειχθεί ότι

$$\lim_{t\to t_0}\frac{R\left(x(t),y(t)\right)}{t-t_0}=0 \tag{5.7}$$

Ευτυχώς αυτό ισχύει! Πράγματι, παρατηρούμε πρώτα ότι το πηλίκο $\dfrac{R\left(x(t),y(t)\right)}{t-t_0}$ γράφεται ως γινόμενο

$$\frac{R\left(x(t),y(t)\right)}{\sqrt{\left(x(t)-x_0\right)^2+\left(y(t)-y_0\right)^2}}\cdot\frac{\sqrt{\left(x(t)-x_0\right)^2+\left(y(t)-y_0\right)^2}}{t-t_0}.$$

Το όριο στο t_0 του πρώτου παράγοντα είναι το μηδέν αφού

$$\lim_{t\to t_0}\frac{R\left(x(t),y(t)\right)}{\sqrt{\left(x(t)-x_0\right)^2+\left(y(t)-y_0\right)^2}}=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{R\left(x,y\right)}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}}\overset{(5.6)}{=}0.$$

Επίσης το όριο του δεύτερου παράγοντα στο t_0 υπάρχει και είναι πεπερασμένο:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to t_0}\frac{\sqrt{\left(x(t)-x_0\right)^2+\left(y(t)-y_0\right)^2}}{t-t_0} &= \lim_{t\to t_0}\sqrt{\left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}\right)^2+\left(\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)^2} \\ &= \lim_{t\to t_0}\sqrt{\left(x'(t_0)\right)^2+\left(y'(t_0)\right)^2} \end{aligned}$$

□

5.2. Καθετότητα του ∇f και των ισοσταθμικών καμπυλών

Ορισμος 5.2. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ που το ίχνος της περιέχεται στο A. Η καμπύλη $\mathbf{r}$ θα καλείται* ***ισοσταθμική καμπύλη της*** *f αν ο περιορισμός της f στο ίχνος της είναι σταθερή συνάρτηση (δηλαδή $f(\mathbf{r}(t)) = c$ για όλα τα $t \in I$).*

Προταση 5.3. *(**Καθετότητα του ∇f και των ισοσταθμικών καμπυλών**) Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια ισοσταθμική καμπύλη της f. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε το διάνυσμα $\nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ της κλίσης της f στο σημείο $\mathbf{r}(t_0)$ είναι κάθετο με το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{r}'(t_0)$ της καμπύλης στο t_0.*

Αποδειξη. Έστω $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$, $t \in I$. Η F είναι σταθερή συνάρτηση και άρα $F'(t) = 0$ για όλα τα $t \in I$. Απο την άλλη μεριά (εξίσωση (5.2)) έχουμε ότι $F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$ και άρα $\nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$. □

5.3. Θεώρημα Μέσης Τιμής για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών

Μία απο τις πρώτες εφαρμογές του Θεωρήματος 5.1 είναι το επόμενο.

Θεωρημα 5.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ δύο διαφορετικά σημεία του A τέτοια ώστε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ με άκρα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ να περιέχεται στο A. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει σημείο $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα[1] $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) &= \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (\textit{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων}) \\ &= f_x(\xi_1, \xi_2)(b_1 - a_1) + f_y(\xi_1, \xi_2)(b_2 - a_2) \end{aligned}$$

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ και έστω $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})),$$

για κάθε $t \in [0,1]$. Επειδή $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] \subseteq A$ η F είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο (σχέση (4.27))το **εφαπτόμενο διάνυσμα της** $\mathbf{r}(t)$ είναι σταθερό με $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, για οποιοδήποτε $t \in [0,1]$. Άρα, αφού η f είναι παραγωγίσιμη, απο τον κανόνα αλυσίδας (Θεώρημα 5.1) έπεται ότι και η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(t) = f'(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \overset{(5.2)}{=} \nabla f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \tag{5.8}$$

για κάθε $t \in (0,1)$. Απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) έχουμε

$$F(1) - F(0) = F'(\xi) \tag{5.9}$$

---

[1]Το ***ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}^2$ με άκρα τα a, b*** ορίζεται να είναι το σύνολο

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in (0,1)\}$$

για κάποιο $\xi \in (0,1)$. Επειδή $F'(\xi) = \nabla f\left(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{b})\right) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $F(0) = f(\mathbf{a})$ και $F(1) = f(\mathbf{b})$ αντικαθιστώντας στην (5.9) παίρνουμε

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f\left(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})\right) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Θέτοντας τώρα $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ έχουμε ότι $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ και

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f\left(\boldsymbol{\xi}\right) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

□

Πορισμα 5.5. *Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι σταθερή.

(2) Για κάθε $(x, y) \in A$, ισχύει ότι $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$.

Αποδειξη. (1) $\implies$ (2) Αν η f είναι σταθερή τότε

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

και ομοίως

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(2) $\implies$ (1) Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και έστω $c = f(\mathbf{a})$. Έστω $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^2$ διαφορετικό του $\mathbf{a}$. Αφού οι f_x, f_y ως σταθερές είναι και συνεχείς έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$. Τώρα απο το Θεώρημα 5.4 έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ με

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f_x(\boldsymbol{\xi})(b_1 - a_1) + f_y(\boldsymbol{\xi})(b_2 - a_2)$$

και άρα αφού $f_x = f_y = 0$ έπεται ότι $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = 0$ δηλαδή $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) = c$. □

Σημείωση: Προσοχή το Πόρισμα 5.5 δεν ισχύει όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Πχ. έστω $A = D_1 \cup D_2$, όπου D_1, D_2 δύο ξένοι ανοικτοί δίσκοι του $\mathbb{R}^2$ και $f(x, y) = 1$ αν $(x, y) \in D_1$ ενώ $f(x, y) = 2$ αν $(x, y) \in D_2$. Τότε $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ αλλά η f δεν είναι σταθερή. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι ένα ευθ. τμήμα που συνδέει ένα σημείο απο τον ένα δίσκο με ένα σημείο απο τον άλλον δεν περιέχεται όλο στο A και έτσι το Θεώρημα 5.4 δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

5.4. Τα Θεωρήματα Taylor για δύο μεταβλητές

Μια άλλη εφαρμογή του Θεωρήματος 5.1 είναι και η γενίκευση των Θεωρημάτων Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

5.4.1. ***Θεωρήματα Taylor για μια μεταβλητή.*** Ας θυμηθούμε εδώ τα δύο θεωρήματα Taylor πριν προχωρήσουμε στην γενίκευσή τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.6. ***(Τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής)*** *Έστω $m \geq 0$ ακέραιος και $f : I \to \mathbb{R}$ (I διάστημα του $\mathbb{R}$) $m+1$-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $a \in I$. Τότε για κάθε $h \neq 0$ με $a+h \in I$ υπάρχει σημείο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και $a+h$ τέτοιο ώστε*

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{m+1}. \tag{5.10}$$

Το πολυώνυμο

$$T_m(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \tag{5.11}$$

καλείται ***πολυώνυμο Taylor m-τάξης της f με κέντρο το a.*** Ο τύπος (5.10) γράφεται και ως εξής: Για κάθε $x \in I$,

$$f(x) = T_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-a)^{m+1} \tag{5.12}$$

για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x.

Προφανώς, $T(a) = f(a)$. Αν $x \in I$ ένα διαφορετικό απο το a σημείο του I, τότε η εξίσωση (5.12) μας λέει ότι η διαφορά $f(x) - T(x)$ δίνεται απο την σχέση

$$f(x) - T_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-a)^{m+1} \tag{5.13}$$

για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x.

Θα ήταν πολύ χρήσιμο να ξέραμε αν η διαφορά $f(x) - T_m(x)$ για τα $x \in I$ είναι σε απόλυτη τιμή μεγάλη ή μικρή. Όπως φαίνεται απο τον τύπο (5.13) η διαφορά αυτή μπορεί να είναι μεγάλη κατα απόλυτη τιμή όταν το x είναι μακριά απο το a. Τι γίνεται όμως όταν το x είναι κοντά στο a; Απο τον τύπο (5.13) δεν μπορούμε να βγάλουμε εύκολα συμπέρασμα για το μέγεθος του $|f(x) - T_m(x)|$ λόγω του ότι το ξ εξαρτάται με έναν άγνωστο τρόπο απο το x και εν γένει η $f^{(m+1)}$ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x μπορεί να παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Το δεύτερο Θεώρημα Taylor απαντά ακριβώς σε αυτό το ερώτημα και λέει ότι όντως το $f(x)$ θα είναι περίπου το $T_m(x)$ όταν το x είναι αρκετά κοντά στο κέντρο a του πολυωνύμου. Μάλιστα λέει κάτι πολύ ισχυρότερο και συγκεκριμμένο, ότι δηλαδή *για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε*

$$|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon |x-a|^m. \tag{5.14}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.7. ***(Δεύτερο Θεώρημα Taylor για συναρτήσεις μιας μεταβλητής)*** *Έστω $m \geq 1$ ακέραιος και $f : I \to \mathbb{R}$ m-φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $a \in I$ και έστω $T_m(x)$ το πολυώνυμο Taylor m-τάξης της f με κέντρο το a. Τότε*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_m(x)}{(x-a)^m} = 0. \tag{5.15}$$

Με άλλα λόγια αν θέσουμε

$$R_m(x) = f(x) - T_m(x) \tag{5.16}$$

με

$$\lim_{x \to a} \frac{R_m(x)}{(x-a)^m} = 0. \tag{5.17}$$

5.4.2. Παρατηρείστε ότι το Θεώρημα 5.4 αναδιατυπώνεται ως εξής:

Θεωρημα 5.8. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ μη μηδενικό τέτοια ώστε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}]$ να περιέχεται στο A. Έστω επίσης $f : A \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει σημείο $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα $(\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h})$ τέτοιο ώστε*

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + f_x(\xi_1, \xi_2)h_1 + f_y(\xi_1, \xi_2)h_2. \tag{5.18}$$

Επίσης αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a} \in A$ τότε (όπως έχουμε δεί στο προηγούμενο κεφάλαιο) υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ και επιπλέον

$$\lim_{(x,y) \to (a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - f(a_1,a_2) - f_x(a_1,a_2)(x-a_1) - f_y(a_1,a_2)(y-a_2)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} = 0 \tag{5.19}$$

Οι εξίσωση (5.18) είναι η γενίκευση της (5.10) για $m = 0$ και αντίστοιχα η (5.19) είναι η γενίκευση της (5.15) για $m = 1$.

5.4.3 ***Το διώνυμο του Νεύτωνα***. Πριν προχωρήσουμε καλό είναι να θυμηθούμε στο σημείο αυτό και τα εξής.

Ορισμος 5.9. *Έστω $k \geq 0$ ακέραιος και $j = 0, \ldots, k$. Θέτουμε*

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \tag{5.20}$$

Πχ.

$$\binom{k}{0} = 1, \binom{k}{k} = 1, \binom{k}{1} = k, \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

Παρατηρηση 5.1. Μπορεί να δειχθεί ότι ο αριθμός $\binom{k}{j}$ ισούται με το πλήθος όλων των "j-συνδυασμών απο k-στοιχεία" με άλλα λόγια είναι το ***πλήθος όλων των*** j***-υποσυνόλων του*** $\{1, \ldots, k\}$ (δηλαδή αυτών των υποσυνόλων του $\{1, \ldots, k\}$ που αποτελούνται απο j στοιχεία).

Προταση 5.10. *(**Διώνυμο του Νεύτωνα**) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $k \geq 0$ ακέραιος. Τότε*

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j b^{k-j} \tag{5.21}$$

Αποδειξη. Άσκηση![2] □

[2] Η ταυτότητα (5.21) μπορεί να προκύψει και απο τον τύπο του Taylor για την $f(x) = (1+x)^k$ με $a = 0$ (πώς;)

Πχ. οι ταυτότητες

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

είναι ειδικές μορφές του διωνύμου του Νεύτωνα γαι $k = 2$ και $k = 3$ αντίστοιχα.

Παρατηρείστε επίσης ότι για $a = b = 1$ η (5.21) δίνει ότι

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} = 2^k \tag{5.22}$$

που ως γνωστόν είναι το πλήθος όλων των υποσυνόλων του $\{1, \ldots, k\}$.

5.4.4. ***Βασικά εργαλεία.*** Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τα εργαλεία που χρειάζονται για την επέκταση των Θεωρημάτων Taylor για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Πρόταση 5.11. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ (όχι αναγκαστικά μοναδιαίο) τέτοιο ώστε το ευθύγραμμα τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+t\mathbf{h}]$ να περιέχεται στο A. Για κάθε $t \in [0, 1]$, ορίζουμε*

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2). \tag{5.23}$$

Αν η $f \in C^2(A)$ τότε η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$F'(t) = f_x(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2 \tag{5.24}$$

και

$$F''(t) = f_{xx}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2^2. \tag{5.25}$$

για όλα τα $t \in [0, 1]$. Ειδικότερα για $t = 0$ έχουμε

$$F'(0) = f_x(\mathbf{a})h_1 + f_y(\mathbf{a})h_2 \tag{5.26}$$

και

$$F''(0) = f_{xx}(\mathbf{a})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{a})h_2^2. \tag{5.27}$$

για όλα τα $m = 1, \ldots, k$.

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}+t\mathbf{h} = (a_1+th_1, a_2+th_2)$, $t \in [0, 1]$. Όπως έχουμε δεί η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in [0, 1]$ και το εφαπτόμενο διάνυσμα της σε κάθε $t \in [0, 1]$ είναι το $\mathbf{r}'(t) = (h_1, h_2) = \mathbf{h}$.

(i) Απο τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2 = f_x(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2$$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} F''(t) = (F')'(t) &= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2\Big)' \\ &= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))h_1\Big)' + \Big(f_y(\mathbf{r}(t))h_2\Big)' \\ &= \Big(f_x(\mathbf{r}(t))\Big)'h_1 + \Big(f_y(\mathbf{r}(t))\Big)'h_2 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για την συνάρτηση $f_x(x,y)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\Big(f_x(\mathbf{r}(t))\Big)' &= \nabla f_x(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\\ &= (f_x)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_x)_y(\mathbf{r}(t))h_2\\ &= f_{xx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_2\\ &= f_{xx}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_1 + f_{xy}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_2\end{aligned}$$

Ομοίως εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για την συνάρτηση $f_y(x,y)$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $f_{xy} = f_{yx}$ (λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης), έχουμε

$$\begin{aligned}\Big(f_y(\mathbf{r}(t))\Big)' &= \nabla f_y(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\\ &= (f_y)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_y)_y(\mathbf{r}(t))h_2\\ &= f_{yx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2\\ &= f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2\\ &= f_{xy}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_1 + f_{yy}(\mathbf{a}+t\mathbf{h})h_2.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (5.28) προκύπτει άμεσα η (5.25). □

Παρατηρηση 5.2. Όταν το διάνυσμα $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε απο τις (5.24) και (3.39) βλέπουμε ότι η $F'(0)$ ισούται με την $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a})$ της f στο $\mathbf{a}$ δηλαδή την παράγωγο της f στο $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{h}$. Υπο αυτή την σκοπιά η δεύτερη παράγωγος $F''(0)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ***δεύτερης τάξης παράγωγος της*** f ***στο*** $\mathbf{a}$ ***κατά την κατεύθυνση*** $\mathbf{h}$. Πχ. θυμηθείτε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$$

και απο την (5.27) για $\mathbf{h} = \mathbf{e}_1$ παίρνουμε ότι

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}).$$

Η Πρόταση 5.11 γενικεύεται και για ανώτερης τάξης παραγώγους. Για να διατυπώσουμε την γενική μορφή της είναι χρήσιμο να εισάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό.

Ορισμος 5.12. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Έστω επίσης $f \in C^k(A)$ για κάποιο $k \geq 1$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε*

$$\begin{aligned}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(x,y) &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}\,(x,y)\,h_1^j h_2^{k-j}\\ &= \sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\frac{\partial^k f}{\partial x^j\partial y^{k-j}}\,(x,y)\,h_1^j h_2^{k-j}\end{aligned}\tag{5.29}$$

για κάθε $(x,y) \in A$.

Παρατηρείστε ότι για $k = 1,2,3$ η (5.29) παίρνει αντίστοιχα τις μορφές

$$\left[h_1\frac{\partial}{\partial x} + h_2\frac{\partial}{\partial y}\right] f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y)\,h_1 + \frac{\partial f}{\partial x}\,(x,y)\,h_2$$

$$\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(2)} f(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\,h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)\,h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\,h_2^2$$

$$\begin{aligned}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(3)} f(x,y)&=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y)\,h_1^3\\ &+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x,y)\,h_1^2h_2+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x,y)\,h_1h_2^2\\ &+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x,y)\,h_2^3.\end{aligned}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε την γενική μορφή της Πρότασης 5.11.

Πρόταση 5.13. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ (όχι αναγκαστικά μοναδιαίο) τέτοιο ώστε το ευθύγραμμα τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+t\mathbf{h}]$ να περιέχεται στο A. Για κάθε $t \in [0, 1]$, ορίζουμε*

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2). \tag{5.30}$$

Αν $f \in C^m(A)$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ τότε η F είναι m-φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$F^{(k)}(t) = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) \tag{5.31}$$

για όλα τα $t \in [0, 1]$ και όλα τα $k = 1, \dots, m$. Ειδικότερα για $t = 0$ έχουμε

$$F^{(k)}(0) = \left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(\mathbf{a}) \tag{5.32}$$

για όλα τα $k = 1, \dots, m$.

Η απόδειξη της Πρότασης 5.13 γίνεται με επαγωγή και ανάλογα με απόδειξη της Πρότασης 5.11.

5.4.5. *Τα Θεωρήματα Taylor για δύο μεταβλητές.*

Θεώρημα 5.14. ***(Τύπος Taylor για δύο μεταβλητές)*** *Έστω $m \geq 0$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^{m+1}(A)$ (δηλαδή $f : A \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και $m+1$-τάξης). Έστω $\mathbf{a} \in A$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{h}] \subseteq A$. Τότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) &+ \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(k)} f(\mathbf{a})\\ &+\frac{1}{(m+1)!}\left[h_1\frac{\partial}{\partial x}+h_2\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m+1)} f(\mathbf{a}+\xi\mathbf{h}).\end{aligned} \tag{5.33}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(t) = f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}), \quad t \in [0, 1]$$

Αφού $f \in C^{m+1}(A)$ απο την Πρόταση 5.13 έχουμε ότι η F είναι $m+1$-φορές παραγωγίσιμη. Άπο τον Τύπο του Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής

(Θεώρημα 5.6 για $a = 0$) έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$F(1) = F(0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \tag{5.34}$$

Επειδή $F(0) = f(\mathbf{a})$, $F(1) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$,

$$F^{(k)}(0) \overset{(5.32)}{=} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(\mathbf{a})$$

και

$$F^{(m+1)}(\xi) \overset{(5.31)}{=} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(m+1)} f(\mathbf{a} + \xi \mathbf{h})$$

η εξίσωση (5.34) ταυτίζεται με την (5.33). □

Ορισμος 5.15. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^m(A)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $m \geq 1$ ακέραιος. Το πολυώνυμο*

$$T_m(x, y) = f(a_1, a_2) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left[(x - a_1) \frac{\partial}{\partial x} + (y - a_2) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(k)} f(a_1, a_2) \tag{5.35}$$

*καλείται **πολυώνυμο Taylor m-τάξης της f με κέντρο το** $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.*

Παρατηρηση 5.3. Παρατηρείστε ότι το συμπέρασμα του Πρώτου Θεωρήματος Taylor λέει ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$ με $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subseteq A$ υπάρχει $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ τέτοιο ώστε

$$f(x, y) = T_m(x, y) + \frac{1}{(m+1)!} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y} \right]^{(m+1)} f(\xi_1, \xi_2) \tag{5.36}$$

Παρατηρείστε επίσης ότι το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ δίνεται απο τον τύπο

$$T_1(x, y) = f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})(x - a_1) + f_y(\mathbf{a})(y - a_2).$$

Αντίστοιχα το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ δίνεται απο τον τύπο

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})(x - a_1) + f_y(\mathbf{a})(y - a_2) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[f_{xx}(\mathbf{a})(x - a_1)^2 + 2 f_{xy}(\mathbf{a})(x - a_1)(y - a_2) + f_{yy}(\mathbf{a})(y - a_2)^2 \right]. \end{aligned}$$

Παραδειγμα 5.1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{3x+2y}$. Για $m = 1, 2$ υπολογίστε τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 1)$.

Λύση: Ελέγχουμε εύκολα ότι

$$f_x(x, y) = 3e^{3x+2y}, \quad f_y(x, y) = 2e^{3x+2y}$$

και

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) = (f_x)_x(x, y) = 9e^{3x+2y}, \ & f_{xy}(x, y) = (f_x)_y(x, y) = 6e^{3x+2y} \\ f_{yx}(x, y) = (f_y)_x(x, y) = 6e^{3x+2y}, & f_{yy}(x, y) = (f_y)_y(x, y) = 4e^{3x+2y}. \end{aligned}$$

Απο τα παραπάνω έχουμε ότι $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Επίσης βλέπουμε ότι

$$f_x(0, 1) = 3e^2, \ f_y(0, 1) = 2e^2$$

και

$$f_{xx}(0,1) = 9e^2,\ f_{xy}(0,1) = f_{yx}(0,1) = 6e^2,\ f_{yy}(0,1) = 4e^2.$$

Άρα το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $(a_1, a_2) = (0,1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1) \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y-1) \\ &= -e^2 + 3e^2x + 2e^2y. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(0,1) + f_x(0,1)x + f_y(0,1)(y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,1)x^2 + 2f_{xy}(0,1)x(y-1) + f_{yy}(0,1)(y-1)^2\right] \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y-1) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[9e^2x^2 + 12e^2x(y-1) + 4e^2(y-1)^2\right] \end{aligned}$$

Θεωρημα 5.16. *(**Δεύτερο Θεώρημα Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών**) Έστω $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^m(A)$ (δηλαδή $f : A \to \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και m-τάξης). Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $T_m(x,y)$ το πολυώνυμο Taylor m-τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a}$. Τότε*

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{\|(x,y) - (a_1,a_2)\|^m} = 0 \tag{5.37}$$

Με άλλα λόγια για κάθε $(x,y) \in A$, αν θέσουμε

$$R_m(x,y) = f(x,y) - T_m(x,y) \tag{5.38}$$

τότε

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{R_m(x,y)}{\left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right)^{m/2}} = 0 \tag{5.39}$$

Παρατηρηση 5.4. Παρατηρείστε ότι για $m = 1$ παίρνουμε

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_1(x,y)}{\sqrt{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2}} = 0 \tag{5.40}$$

όπου

$$T_1(x,y) = f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})(x-a_1) + f_y(\mathbf{a})(y-a_2)$$

και για $m = 2$

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_2(x,y)}{(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2} = 0 \tag{5.41}$$

όπου

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})(x-a_1) + f_y(\mathbf{a})(y-a_2) \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(\mathbf{a})(x-a_1)^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a})(x-a_1)(y-a_2) + f_{yy}(\mathbf{a})(y-a_2)^2\right]. \end{aligned}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.16 θα χρειασθούμε το εξής λήμμα.

Λημμα 5.17. *Έστω $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ και $f \in C^m(A)$. Για κάθε $\mathbf{x} = (x, y), \mathbf{x}' = (x', y') \in A$, ορίζουμε*

$$\Delta_{\mathbf{h}}^{(m)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m)} f(x', y') - \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x} + h_2 \frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m)} f(x, y) \tag{5.42}$$

και

$$M(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \max\left\{\left|\frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x', y') - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x, y)\right| : 0 \leq j \leq m\right\} \tag{5.43}$$

Τότε για κάθε $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in A$ ισχύει ότι

$$\left|\Delta_{\mathbf{h}}^{(m)}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\right| \leq 2^{m/2} M(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \left\|(h_1, h_2)\right\|^m . \tag{5.44}$$

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in A$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left|\Delta_{\mathbf{h}}^{(m)}(\mathbf{x}', \mathbf{x})\right| &= \left|\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x', y')\, h_1^j h_2^{m-j} - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x, y)\, h_1^j h_2^{m-j}\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \left|\frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x', y') - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x, y)\right| |h_1|^j |h_2|^{m-j} \\
&\leq M(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} |h_1|^j |h_2|^{m-j} \\
&= M(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \left(|h_1| + |h_2|\right)^m \qquad (\textit{Διώνυμο του Νεύτωνα}) \\
&\leq 2^{m/2} M(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \left\|(h_1, h_2)\right\|^m
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει απο την *ανισότητα Cauchy–Schwarz*:

$$|h_1| + |h_2| = (1, 1) \cdot (|h_1|, |h_2|) \leq \|(1, 1)\| \cdot \|(|h_1|, |h_2|)\| = 2^{1/2} \|(h_1, h_2)\|$$

□

Αποδειξη του Θεωρηματος 5.16. Έστω $m = 1$. Τότε $f \in C^1(A)$ και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$. Από τον Χαρακτηρισμό της παραγωγισιμότητας της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ (Πόρισμα 3.13) έχουμε

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - f(a_1, a_2) - f_x(a_1, a_2)(x - a_1) - f_y(a_1, a_2)(y - a_2)}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}} = 0 \tag{5.45}$$

Επειδή $T_1(x, y) = f(a_1, a_2) + f_x(\xi_1, \xi_2)(x - a_1) + f_y(\xi_1, x_2)(y - a_2)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y) \to (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_1(x, y)}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}} = 0$$

Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $m \geq 2$. Έστω $(x, y) \in A$ αρκετά κοντά στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ώστε το ευθ. τμήμα με άκρα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{a}$ να περιέχεται στο A. Απο τον Τύπο Taylor (για "$m = m - 1$") (σχέση (5.36)) έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ και $\mathbf{x} = (x, y)$ τέτοιο ώστε

$$f(x, y) = T_{m-1}(x, y) + \frac{1}{m!}\left[(x - a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (x - a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m)} f(\xi_1, \xi_2).$$

Από τον Ορισμό του πολυωνύμου Taylor παρατηρούμε ότι

$$T_{m-1}(x,y) = T_m(x,y) - \frac{1}{m!}\left[(x-a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (x-a_2)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{(m)} f(x,y).$$

Θέτουμε $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ με $h_1 = x - a_1$ και $h_2 = y - a_2$. Απο τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Λήμματος 5.17 συμπεραίνουμε ότι

$$f(x,y) = T_m(x,y) + \frac{1}{m!}\Delta_{\mathbf{h}}^{(m)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$$

Άρα

$$\left|\frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{\left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right)^{m/2}}\right| = \frac{1}{m!}\frac{\left|\Delta_{\mathbf{h}}^{(m)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\right|}{\|(h_1,h_2)\|^m} \overset{(5.44)}{\leq} \frac{2^{m/2}}{m!}M(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \qquad (5.46)$$

όπου (εξίσωση (5.43)),

$$M(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \max\left\{\left|\frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x,y)\right| : 0 \leq j \leq m\right\}$$

Απο την συνέχεια των μερικών παραγώγων και επειδή το $\boldsymbol{\xi}$ ανήκει στο $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} M(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = 0$$

οπότε απο την (5.46) προκύπτει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \frac{f(x,y) - T_m(x,y)}{\left((x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right)^{m/2}} = 0.$$

□

Παραδειγμα 5.2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x,y) = e^{x+y}$. Βρίσκοντας πρώτα τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,0)$ υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

και

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2+y^2}.$$

Λύση: Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f οποισδήποτε τάξης ταυτίζονται με την f και συνεπώς όλες οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0,0)$ οποισδήποτε τάξης είναι ίσες με το $e^0 = 1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0,0)$ είναι αντίστοιχα τα

$$T_1(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 1 + x + y$$

και

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \\ &\quad + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2\right] \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2!}\left[x^2 + 2xy + y^2\right]. \end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Επίσης

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y-\frac{1}{2!}\left[x^2-2xy-y^2\right]}{x^2+y^2} = \\ &\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{e^{x+y}-1-x-y-xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{2}\right] = 0 \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x+y}-1-x-y-xy}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}.$$

5.5. Δεύτερη μορφή του Κανόνα Αλυσίδας

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί μια γενίκευση του Θεωρήματος 5.1 για την σύνθεση πραγματικής συνάρτησης n-μεταβλητών με καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$.

Θεωρημα 5.18. ***(Κανόνας Αλυσίδας II)*** *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε το ίχνος της περιέχεται στο A. Ορίζουμε $F : I \to \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεσή τους δηλαδή*

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

για κάθε $t \in I$. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= f_{x_1}(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))\, x_1'(t_0) + \cdots + f_{x_n}(x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0))\, x_n'(t_0) \\ &= \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \quad (\textit{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων}) \end{aligned}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.18 είναι εντελώς ανάλογη με του Θεωρήματος 5.1 για συναρτήσεις f δύο μεταβλητών.

5.5.1. *Καθετότητα του ∇f και των ισοσταθμικών καμπυλών.*

Ορισμος 5.19. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^n$ που το ίχνος της περιέχεται στο A. Η καμπύλη $\mathbf{r}$ θα καλείται* ***ισοσταθμική καμπύλη της*** *f αν ο περιορισμός της f στο ίχνος της είναι σταθερή συνάρτηση (δηλαδή $f(\mathbf{r}(t)) = c$ για όλα τα $t \in I$).*

Η επόμενη πρόταση είναι το ανάλογο της Πρότασης 5.3.

Προταση 5.20. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\mathbf{r} : I \to \mathbb{R}^n$, $\mathbf{r}(t)$ μια ισοσταθμική καμπύλη της f. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε το διάνυσμα $\nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ της κλίσης της f στο σημείο $\mathbf{r}(t_0)$ είναι κάθετο με το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{r}'(t_0)$ της καμπύλης στο t_0.*

5.5.2. Θεώρημα Μέσης Τιμής για πραγματικές συναρτήσεις n-μεταβλητών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.21. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ δύο διαφορετικά σημεία του A τέτοια ώστε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ να περιέχεται στο A. Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει σημείο $\boldsymbol{\xi}$ στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) &= \nabla f(\boldsymbol{\xi}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (\textit{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων}) \\ &= f_{x_1}(\boldsymbol{\xi})(b_1 - a_1) + \cdots + f_{x_n}(\boldsymbol{\xi})(b_n - a_n) \end{aligned}$$

5.6. Τα Θεωρήματα Taylor για πολλές μεταβλητές

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.22. *Έστω $k \geq 0$ ακέραιος και $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε*

$$J_n(k) = \{(j_1, \ldots, j_n) : j_1, \ldots, j_n \geq 0 \text{ και } j_1 + \cdots + j_n = k\}$$

και για κάθε $(j_1, \ldots, j_n) \in J_n(k)$ ορίζουμε

$$\binom{k}{j_1 \ \ldots \ j_n} = \frac{k!}{j_1! \ldots j_n!} \tag{5.47}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.23. ***(Διώνυμο του Νεύτωνα για n-προσθεταίους)** Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ και $k \geq 0$ ακέραιος. Τότε*

$$(a_1 + \cdots + a_n)^k = \sum_{(j_1, \ldots, j_n) \in J_n(k)} \binom{k}{j_1 \ \ldots \ j_n} a_1^{j_1} \ldots a_n^{j_n}. \tag{5.48}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.24. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Έστω επίσης $f \in C^k(A)$ για κάποιο $k \geq 1$ και $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n)$ ένα διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$. Με τον συμβολισμό*

$$\left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(k)} f(x_1, \ldots, x_n)$$

εννοούμε την παράσταση

$$\sum_{(j_1, \ldots, j_n) \in J_n(k)} \binom{k}{j_1 \ \ldots \ j_n} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_n^{j_n}} (x_1, \ldots, x_n) \, h_1^{j_1} \ldots h_n^{j_n}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.25. ***(Τύπος Taylor για n-μεταβλητές)** Έστω $m \geq 0$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f \in C^{m+1}(A)$. Έστω $\mathbf{a} \in A$ και $\mathbf{h} = (h_1, \ldots, h_n) \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] \subseteq A$. Τότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) &+ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(k)} f(\mathbf{a}) \\ &+ \frac{1}{(m+1)!} \left[h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(m+1)} f(\mathbf{a} + \xi \mathbf{h}). \end{aligned} \tag{5.49}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.26. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f \in C^m(A)$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ και $m \geq 1$ ακέραιος. Το πολυώνυμο n-μεταβλητών,*

$$T_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \left[(x_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n}\right]^{(k)} f(\mathbf{a}) \tag{5.50}$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, *καλείται* ***πολυώνυμο Taylor*** m***-τάξης της*** f ***με κέντρο το*** $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Πχ. για $m = 1$,

$$T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i)$$

και για $m = 2$,

$$T_2(x_1, \ldots, x_n) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.27. ***(Δεύτερο Θεώρημα Taylor για*** n***-μεταβλητές)*** *Έστω* $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $f \in C^m(A)$. *Έστω* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ *και* $T_m(x_1, \ldots, x_n)$ *το πολυώνυμο Taylor* m*-τάξης της* f *με κέντρο το* $\mathbf{a}$. *Τότε*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{f(\mathbf{x}) - T_m(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m} = 0 \tag{5.51}$$

Με άλλα λόγια αν θέσουμε

$$R_m(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - T_m(\mathbf{x}) \tag{5.52}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in A$, *τότε*

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} \frac{R_m(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^m} = 0 \tag{5.53}$$

5.7. Τρίτη μορφή του Κανόνα Αλυσίδας

Έστω $\mathbf{R}(\mathbf{t}) = \mathbf{R}(t_1, \ldots, t_k) : B \to \mathbb{R}^n$, όπου $B \subseteq \mathbb{R}^k$. Θυμίζουμε ότι η $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ αναλύεται σε n-συνιστώσες πραγματικές συναρτήσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{t}) &= (x_1(\mathbf{t}), \ldots, x_n(\mathbf{t})) \\ &= (x_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_k)) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in B$.

Επίσης θυμίζουμε ότι αν $\mathbf{t}_0$ ένα εσωτερικό σημείο του B τότε η $\mathbf{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{t}_0 \in B$ αν και μόνο αν για κάθε $i = 1, \ldots, n$ η $x_i(\mathbf{t}) : B \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{t}_0$. Επιπλέον η παράγωγος της $\mathbf{R}$ στο $\mathbf{t}_0$ είναι ο $n \times k$ ***πίνακας που η*** i***-γραμμή του είναι η παράγωγος της*** $x_i(\mathbf{t})$ ***στο*** $\mathbf{t}_0$ ***για κάθε*** $i = 1, \ldots, n$, δηλαδή

$$\mathbf{R}'(\mathbf{t}_0) = \begin{bmatrix} x_1'(\mathbf{t}_0) \\ x_2'(\mathbf{t}_0) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n'(\mathbf{t}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1}(\mathbf{t}_0) & \ldots & \frac{\partial x_1}{\partial t_k}(\mathbf{t}_0) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_1}(\mathbf{t}_0) & \ldots & \frac{\partial x_2}{\partial t_k}(\mathbf{t}_0) \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1}(\mathbf{t}_0) & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial t_k}(\mathbf{t}_0) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0)\right] \tag{5.54}$$

Αν τώρα $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\mathbf{R}(B) \subseteq A$ τότε ορίζεται η σύνθεση $f \circ \mathbf{R} : B \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned} f \circ \mathbf{R}(\mathbf{t}) &= f(\mathbf{R}(\mathbf{t})) \\ &= f(x_1(\mathbf{t}), \ldots, x_n(\mathbf{t})) \\ &= f(x_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_k)) \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_k) \in B$. Όπως έχουμε αναφέρει αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα εσωτερικό σημείο $\mathbf{x}_0$ του A τότε ***η παράγωγός της στο*** $\mathbf{x}_0$ ***είναι ο*** $1 \times n$***-πίνακας***

$$f'(\mathbf{x}_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \ \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right] \tag{5.55}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.28. ***(Κανόνας Αλυσίδας III)*** *Έστω $f(x_1, \ldots, x_n) : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και*

$$\mathbf{R}(t_1, \ldots, t_k) = (x_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_k)) : B \to A$$

όπου $B \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό. Έστω $\mathbf{t}_0 \in B$ τέτοιο ώστε η $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{t}_0$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)$. Τότε η $F = f \circ \mathbf{R} : B \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{t}_0$ και ισχύει ότι

$$F'(\mathbf{t}_0) = f'(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)) \cdot \mathbf{R}'(\mathbf{t}_0) \quad \textit{(γινόμενο πινάκων)} \tag{5.56}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.5. Έχουμε $F(\mathbf{t}) = F(t_1, \ldots, t_k) : B \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ και άρα η παράγωγος της F σε ένα εσωτερικό σημείο $\mathbf{t}_0 \in B$ είναι ο $1 \times k$-πίνακας

$$F'(\mathbf{t}_0) = \left[\frac{\partial F}{\partial t_1}(\mathbf{t}_0) \ \ldots \ \frac{\partial F}{\partial t_k}(\mathbf{t}_0) \right]$$

Απο τις (5.54) και (5.55) και τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων, η εξίσωση (5.56) γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)) \frac{\partial x_\ell}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) \tag{5.57}$$

ή πιο απλά (για να την θυμόμαστε πιο εύκολα)

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial t_j}. \tag{5.58}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, k$, όπου **εδώ γράφουμε** f **αντί για** F.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3. (***Αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες***) Έστω $f(x,y)$ κλάσης C^1. Θέτουμε

$$x = \rho\cos\theta \quad y = \rho\sin\theta$$

Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ ως συνάρτηση των πρώτης τάξης μερικών παραγώγων της f ως προς x και y.

Λύση: Απο τον τύπο (5.58) (για $x_1 = x$, $t_1 = \rho$ και $x_2 = y$, $t_2 = \theta$) έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{5.59}$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{5.60}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4. Σε συνέχεια της προηγούμενου παραδείγματος και με την υπόθεση ότι $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, υπολογίστε την $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$ ως συνάρτηση των πρώτης και δεύτερης τάξης μερικών παραγώγων της f ως προς x και y.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\\ &\overset{(5.60)}{=} \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= -\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - \rho\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} + \rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\end{aligned} \tag{5.61}$$

Πάλι τώρα απο την (5.60) (με την $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ στην θέση της f) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= -\rho\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\\ &= -\rho\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \rho\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\end{aligned} \tag{5.62}$$

και ομοίως (με την $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ στην θέση της f)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) &= -\rho\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \rho\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= -\rho\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \rho\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{aligned} \tag{5.63}$$

Αντικαθιστώντας την (5.62) και (5.63) στην (5.61) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= -\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}\\ &\quad -\rho\sin\theta\left(-\rho\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\rho\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)\\ &\quad -\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\ &\quad +\rho\cos\theta\left(-\rho\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\rho\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

και τελικά

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} &= -\rho\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-\rho\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}\\ &\quad +\rho^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\rho\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\rho^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

5.8. Γενική μορφή του Κανόνα Αλυσίδας

Το παρακάτω θεώρημα είναι η γενική μορφή του Κανόνα Αλυσίδας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Θεωρημα 5.29. ***(Κανόνας Αλυσίδας IV–Γενική μορφή)*** *Έστω*

$$\mathbf{f}(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n)) : A\to\mathbb{R}^m,$$

όπου $A\subseteq\mathbb{R}^n$ *ανοικτό και*

$$\mathbf{R}(t_1,\dots,t_k) = (x_1(t_1,\dots,t_k),\dots,x_n(t_1,\dots,t_k)) : B\to A$$

όπου $B\subseteq\mathbb{R}^k$ *ανοικτό. Έστω* $\mathbf{t}_0\in B$ *τέτοιο ώστε η* $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{t}_0$ *και η* $\mathbf{f}$ *παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)$. *Τότε η* $\mathbf{F}=\mathbf{f}\circ\mathbf{R} : B\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ *είναι παραγωγίσιμη στο* $\mathbf{t}_0$ *και ισχύει ότι*

$$\mathbf{F}'(\mathbf{t}_0) = \mathbf{f}'(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0))\cdot\mathbf{R}'(\mathbf{t}_0)\qquad \textit{(γινόμενο πινάκων)} \tag{5.64}$$

ή ισοδύναμα σε μορφή διαφορικών[3]

$$D_{\mathbf{t}_0}\mathbf{F} = D_{\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)}\mathbf{f}\circ D_{\mathbf{t}_0}\mathbf{R}\quad \textit{(σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων)} \tag{5.65}$$

Παρατηρησεις 5.1. (1) Παρατηρείστε ότι $\mathbf{F}=(F_1,\dots,F_m)$ όπου για κάθε $i=1,\dots,m$,

$$\begin{aligned}F_i(t_1,\dots,t_k) &= f_i(\mathbf{R}(t_1,\dots,t_k))\\ &= f_i(x_1(t_1,\dots,t_k),\dots,x_n(t_1,\dots,t_k)).\end{aligned} \tag{5.66}$$

(2) Επειδή (α) η παράγωγος της $\mathbf{F}=(F_1,\dots,F_m) : B\subseteq\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ στο $\mathbf{t}_0$ είναι ο $m\times k$-πίνακας

$$\mathbf{F}'(\mathbf{t}_0) = \left[\frac{\partial F_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0)\right],$$

[3] Θυμηθείτε απο την Γραμμική Άλγεβρα ότι αν $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ και $T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ είναι γραμμικές απεικονίσεις τότε η σύνθεσή τους $S\circ T:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ είναι πάλι γραμμική απεικόνιση και ο πίνακας $[S\circ T]$ που την αναπαριστά είναι το γινόμενο $[S]\cdot[T]$ των πινάκων που αναπαριστούν τις S και T αντίστοιχα.

(β) η παράγωγος της $\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ στο $\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)$ είναι ο $m \times n$-πίνακας

$$\mathbf{f}'(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0))\right],$$

όπου η i-γραμμή του είναι ο $1 \times n$-πίνακας της παραγώγου της $f_i(\mathbf{x})$ στο $\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)$,

$$f_i'(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)) \ \ldots \ \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0))\right]$$

και

(γ) η παράγωγος της $\mathbf{R}(t_1, \ldots, t_k) = (x_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n(t_1, \ldots, t_k))$ είναι ο $n \times k$-πίνακας

$$\mathbf{R}'(\mathbf{t}_0) = \left[\frac{\partial x_\ell}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0)\right]$$

όπου η j-στήλη του είναι ο $n \times 1$-πίνακας

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) \\ \ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) \end{bmatrix}$$

απο τον κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων, η (5.64) γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) &= \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)) \ \ldots \ \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0))\right] \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) \\ \frac{\partial x_2}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) \\ \ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell}(\mathbf{R}(\mathbf{t}_0)) \cdot \frac{\partial x_\ell}{\partial t_j}(\mathbf{t}_0) \end{aligned} \tag{5.67}$$

ή πιο απλά

$$\frac{\partial f_i}{\partial t_j} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_\ell} \cdot \frac{\partial x_\ell}{\partial t_j} \tag{5.68}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$ και κάθε $j = 1, \ldots, k$ (όπου και πάλι στο αριστερό μέλος της (5.68) γράφουμε f_i αντί για F_i).

Κεφάλαιο 6

Τοπικά ακρότατα πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών

6.1. Βασικές έννοιες

Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κριτήρια για τοπικά ακρότατα συναρτήσεων με συνεχείς μερικές παραγώγους εως και δεύτερης τάξης. Αρχίζουμε με τον εξής λίγο πολύ γνωστό ορισμό.

Ορισμος 6.1. *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in A$.*

(1) Λέμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο ***τοπικού μεγίστου*** *της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0)$. Αν ειδικότερα $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0)$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ τότε το $\mathbf{x}_0$ θα καλείται σημείο* ***αυστηρού τοπικού μεγίστου****. Το $\mathbf{x}_0$ θα καλείται σημείο* ***ολικού μεγίστου*** *της f αν $f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$. Ειδικότερα αν $f(\mathbf{x}_0) > f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ το $\mathbf{x}_0$ θα καλείται σημείο* ***αυστηρού ολικού μεγίστου****.*

(2) Λέμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο ***τοπικού ελαχίστου*** *της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0)$. Αν ειδικότερα $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{x}_0)$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ τότε το $\mathbf{x}_0$ θα καλείται σημείο* ***αυστηρού τοπικού ελαχίστου****. Το $\mathbf{x}_0$ θα καλείται σημείο* ***ολικού ελαχίστου*** *της f αν $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$. Ειδικότερα αν $f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ το $\mathbf{x}_0$ θα καλείται σημείο* ***αυστηρού ολικού ελαχίστου****.*

(3) Λέμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο ***τοπικού ακροτάτου*** *της f αν το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου για την f. Αντίστοιχα ορίζονται οι έννοιες του σημείου* ***αυστηρού τοπικού ακροτάτου*** *και* ***ολικού τοπικού ακροτάτου****.*

Παρατηρηση 6.1. Είναι εύκολο να δούμε ότι ένα σημείο $\mathbf{x}_0 \in A$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν σημεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ τέτοια ώστε

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| < \delta,\ \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| < \delta \text{ και } f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x}_2)$$

Ορισμος 6.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f : A \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\mathbf{x}_0 \in A$. Λέμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι* ***κρίσιμο*** *(ή* ***στάσιμο****) σημείο της f αν οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο $\mathbf{x}_0$ είναι όλες ίσες με μηδέν.*

Παρατηρηση 6.2. Αν $n = 1$ τότε ένα σημείο $x_0 \in A$ είναι κρίσιμο σημείο της f αν και μόνο αν η εφαπτόμενη της f στο x_0 είναι παράλληλη προς τον άξονα των x.

Ομοίως αν $n = 2$ απο τον τύπο

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι κρίσιμο σημείο της f αν και μόνο αν το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $\mathbf{x}_0$ είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο.

Πρόταση 6.3. ***(Σχέση τοπικών ακροτάτων και κρίσιμων σημείων)*** *Έστω $f : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό. Αν όλες οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της f ορίζονται σε κάθε σημείο του A τότε κάθε τοπικό ακρότατο της f είναι και κρίσιμο σημείο της f.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbf{x}_0$ τοπικό ακρότατο της f. Θυμίζουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, n$ η μερική παράγωγος της f στο $\mathbf{x}_0$ ως προς x_i δίνεται απο τον τύπο

$$f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) \tag{6.1}$$

όπου $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_i)$, με $|t| < \epsilon$ για κατάλληλα μικρό $\epsilon > 0$. Αφού $g(0) = f(\mathbf{x}_0)$ και το $\mathbf{x}_0$ είναι τοπικό ακρότατο της f έπεται ότι το $t_0 = 0$ είναι τοπικό ακρότατο της $g(t)$. Άρα απο την γνωστή πρόταση του Fermat για τοπικά ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής θα πρέπει $g'(0) = 0$ που λόγω της (6.1) σημαίνει ότι $f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = 0$. □

Παρατήρηση 6.3. Το αντίστροφο της Πρότασης 6.3 δεν ισχύει ακόμη και στην περίπτωση $n = 1$. Πχ. αν $f(x) = x^3$ τότε το $x_0 = 0$ είναι κρίσιμο σημείο της f αλλά δεν είναι τοπικό ακρότατο αφού η f είναι γνησίως μονότονη.

Ορισμός 6.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ένα κρίσιμο σημείο της f που δεν είναι τοπικό ακρότατο καλείται **σαγματικό** σημείο της f.*

Παρατήρηση 6.4. Απο τις Παρατηρήσεις 6.1 και 6.2, συμπεραίνουμε ότι ένα σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ είναι σαγματικό σημείο της f αν και μόνο αν το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ (το οποίο όπως είδαμε είναι παράλληλο προς το xy-επίπεδο, λόγω του ότι το (x_0, y_0) είναι κρίσιμο σημείο της f) *δεν αφήνει το γράφημα της f απο την μία μεριά του.* Γενικά το γράφημα της $f(x, y)$ γύρω απο ένα σαγματικό σημείο μοιάζει με την επιφάνεια μιας σέλας αλόγου εξ ου και το όνομα. Αν $n = 1$ τα σαγματικά σημεία αντιστοιχούν στα σημεία *καμπής της f*.

6.2. Τοπικά ακρότατα πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μια επέκταση ενός γνωστού κριτηρίου (***κριτήριο δεύτερης παραγώγου***) για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Θυμίζουμε ότι το κριτήριο αυτό έλεγε το εξής:

Θεώρημα 6.5. ***(Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής)*** *Έστω $f : I \to \mathbb{R}$, I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $x_0 \in I$ κρίσιμο σημείο της f (δηλ. $f'(x_0) = 0$) και τέτοιο ώστε η $f''(x_0)$ υπάρχει.*

(1) Αν $f''(x_0) > 0$ τότε η f έχει στο x_0 αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν $f''(x_0) < 0$ τότε η f έχει στο x_0 αυστηρό τοπικό μέγιστο.

Απόδειξη. (1) Έστω $f''(x_0) > 0$. Επειδή το x_0 είναι κρίσιμο σημείο έχουμε $f'(x_0) = 0$. Έχουμε

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Άρα μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε

$$x \in I, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$$

Άρα

$$x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ και } x \in I \cap (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(x_0 - \delta, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, x_0 + \delta)$, με άλλα λόγια το x_0 είναι σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου.

(2) Προκύπτει απο το (1) θέτοντας $g = -f$. □

Κλασσικά παραδείγματα που επιβεβαιώνουν το παραπάνω κριτήριο είναι οι συνάρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$. Πράγματι, η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 και $f''(0) = 2 > 0$, η g έχει ολικό μέγιστο στο 0 και $g''(0) = -2 < 0$. Αν $f''(x_0) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν αποφαίνεται. Πχ. η $h(x) = x^3$ δεν έχει τοπικά ακρότατα (ως γνησίως αύξουσα) και η $\sigma(x) = x^4$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και για τις δύο συναρτήσεις έχουμε $h''(0) = \sigma''(0) = 0$.

Το παραπάνω κριτήριο γενικεύεται και για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Πρίν διατυπώσουμε το αντίστοιχο κριτήριο δίνουμε τον εξής ορισμό που επεκτείνει την έννοια της δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

Ορισμος 6.6. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(A)$ και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n$. Ο* ***Εσσιανός πίνακας της f στο*** *(x_0, y_0) (ή* ***η δεύτερη παράγωγος της f στο*** *(x_0, y_0)) είναι ο πίνακας*

$$f''(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Θεωρημα 6.7. *(**Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών**) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^2(A)$. Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in A$* ***κρίσιμο σημείο*** *της f (δηλαδή $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$). Έστω $f''(x_0, y_0)$ ο* ***Εσσιανός πίνακας της f στο*** *(x_0, y_0) και έστω*

$$\Delta(x_0, y_0) = \det f''(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 \tag{6.3}$$

η ορίζουσά του. Υποθέτουμε ότι

$$\Delta(x_0, y_0) \neq 0.$$

Τότε τα επόμενα ισχύουν:

(1) *Αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ και $\Delta(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.*

(2) *Αν* $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *και* $\Delta(x_0, y_0) > 0$ *τότε η* f *έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.
(3) *Αν* $\Delta(x_0, y_0) < 0$ *τότε το* $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ *είναι σαγματικό σημείο της* f.

Παρατηρησεις 6.1. (α) Αν $\Delta(x_0, y_0) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν μπορεί να αποφανθεί αν το (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο ή όχι. Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνάρτησης που μελετούμε και να εξάγουμε πληροφορία για το εν λόγω σημείο (δείτε σχετικά τις Ασκήσεις 6.3, 6.4 παρακάτω). Απο την άλλη μεριά όταν $\Delta(x_0, y_0) \neq 0$ τότε οι τρείς περιπτώσεις (1)-(3) του θεωρήματος είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να συμβούν. Πράγματι, η εναπομείνουσα περίπτωση $\Delta(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ είναι αδύνατον να συμβαίνει αφού τότε απο τον ορισμό του $\Delta(x_0, y_0)$ (εξίσωση (6.3)) θα είχαμε $f_{xy}^2(x_0, y_0) < 0$ που φυσικά είναι αδύνατον.

(β) Επίσης υπάρχουν κάποιες λίγες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετούμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου το κριτήριο δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί. Πχ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο που έχει η $f(x, y) = x^2 + y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ και άρα η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο. Αν τώρα υπήρχε και άλλο τοπικό ακρότατο τότε θα έπρεπε αυτό να ήταν κρίσιμο σημείο ισοδύναμα θα ήταν λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 2x = 0 \\ f_y(x, y) &= 2y = 0 \end{aligned}$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0, 0)$, η f δεν έχει άλλο τοπικό ακρότατο εκτός του $(0, 0)$.

Η απόδειξη του κριτηρίου θα δωθεί στην επόμενη παράγραφο.

Παραδειγμα 6.1. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y \\ f_y(x, y) &= 3y^2 + 3x \\ f_{xx}(x, y) &= 6x \\ f_{yy}(x, y) &= 6y \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 3 \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y = 0 \\ f_y(x, y) &= 3y^2 + 3x = 0 \end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = -x^2$ και άρα αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

Άρα έχουμε δύο πιθανά τοπικά ακρότατα, τα $(0,0)$ και $(-1,-1)$. Τώρα για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = 36xy - 9$$

Έχουμε $\Delta(0,0) = -9 < 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(-1,-1) = 36-9 > 0$ και $f_{xx}(-1,-1) = -6 < 0$. Άρα το $(-1,-1)$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο.

Παραδειγμα 6.2. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x \\ f_y(x,y) &= 6xy - 6y \\ f_{xx}(x,y) &= 6x - 6 \\ f_{yy}(x,y) &= 6x - 6 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 6y \end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ f_y(x,y) &= 6xy - 6y = 0 \end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x-1) = 0$ και άρα

$$y = 0 \text{ ή } x = 1 \tag{6.4}$$

Για $y = 0$ απο την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Συνεπώς έχουμε τα σημεία

$$(0,0) \quad \text{και} \quad (2,0).$$

Αντίστοιχα για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3 + 3y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία

$$(1,1) \quad \text{και} \quad (1,-1).$$

Συνολικά δηλαδή έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα, τα $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$ και $(1,-1)$. Τώρα για κάθε (x,y) είναι

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - \left(f_{xy}(x,y)\right)^2 = (6x-6)\cdot(6x-6) - 36y^2$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0,0) = 36 > 0$, $f_{xx}(0,0) = -6 < 0$ και άρα το $(0,0)$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο.

(2) $\Delta(2,0) = 36 > 0$, $f_{xx}(2,0) = 6 > 0$ και άρα το $(0,2)$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(3) $\Delta(1,1) = -36 < 0$ και άρα το $(1,1)$ είναι σαγματικό.

(4) $\Delta(1,-1) = -36 < 0$ και άρα το $(1,-1)$ είναι σαγματικό.

Παραδειγμα 6.3. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^4$.

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)^3, \quad f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)^3,$$
$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 12(x-y)^2, \; f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 12(x-y)^2$$

και

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 12(x-y)^2$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y)^3 = 0$$
$$f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)^3 = 0$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων, παίρνουμε ότι $x^3 + y^3 = 0$ ή ισοδύναμα

$$y = -x \tag{6.5}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$4x^3 - 4(x-y)^3 = 4x^3 - 4(2x)^3 = 4x^3 - 32x^3 = -28x^3 = 0$$

και άρα $x = 0$. Οπότε απο την (6.5) παίρνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0,0)$. Έχουμε $f_{xx}(0,0) = f_{yy}(0,0) = f_{xy}(0,0) = 0$ και άρα $\Delta(0,0) = 0$. *Συνεπώς απο το κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο.* Όμως παρατηρούμε ότι

(1) $f(0,0) = 0$,

(2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$ και

(3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0,0)$, είναι $f(x,y) = f(x,-x) = 2x^4 - 16x^4 < 0$.

Άρα σε *κάθε περιοχή του* $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία τέτοια ώστε η τιμή της f στο ένα απο αυτά να είναι αυστηρά μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι αυστηρά μεγαλύτερη του $f(0,0)$. Αυτό σημαίνει ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι σαγματικό σημείο. Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Παραδειγμα 6.4. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y$$
$$f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y$$
$$f_{xx}(x,y) = 12x^2 - 4$$
$$f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 4$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4$$

όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4(x-y) = 0$$
$$f_y(x,y) = 4y^3 + 4(x-y) = 0$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2-2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα εξής σημεία

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \ \text{ και } \ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2 = (12x^2-4)\cdot(12y^2-4) - 16$$

(1) $\Delta(0,0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε απο το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0,0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

(α) $f(0,0) = 0$,

(β) για κάθε $0 < x \leq 1$, είναι $f(x,0) = x^4 - 2x^2 < 0$ και

(γ) για κάθε $x = y \neq 0$ είναι $f(x,y) = f(x,x) = 2x^4 > 0$.

Τα παραπάνω δείχνουν ότι *σε κάθε περιοχή του* $(0,0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της f στο ένα απο αυτά να είναι μικρότερη του $f(0,0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0,0)$, πράγμα που σημαίνει ότι η F δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0,0)$.

(2) Όπως εύκολα ελέγχουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

Άρα η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο αυστηρά τοπικά ελάχιστα.

6.3. Το γενικό κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου

Ο Ορισμός 6.6 γενικεύεται άμεσα για συναρήσεις n-μεταβλητών ως εξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.8. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Ο* ***Εσσιανός πίνακας της*** *f* ***στο*** *$\mathbf{x}_0$ (ή* ***η δεύτερη παράγωγος της*** *f* ***στο*** *(x_0, y_0)) είναι ο πίνακας*

$$f''(\mathbf{x}_0) = \left[f_{x_ix_j}(\mathbf{x}_0)\right] = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_{x_1x_n}(\mathbf{x}_0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_{x_2x_n}(\mathbf{x}_0) \\ & \ldots & \\ f_{x_nx_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_{x_nx_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.9. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f(x_1, \ldots, x_n) \in C^2(A)$. Έστω $\mathbf{x}_0 \in A$ κρίσιμο σημείο της f και έστω*

$$\det f''(\mathbf{x}_0) \neq 0$$

Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ με Δ_k συμβολίζουμε την ***ορίζουσα*** *του $k \times k$ υποπίνακα που προκύπτει απο τον $f''(\mathbf{x}_0)$ αν κρατήσουμε τις πρώτες k-γραμμές και τις πρώτες k-στήλες, δηλαδή την ορίζουσα του πίνακα*

$$\begin{bmatrix} f_{x_1x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_{x_1x_k}(\mathbf{x}_0) \\ f_{x_2x_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_{x_2x_k}(\mathbf{x}_0) \\ & \ldots & \\ f_{x_kx_1}(\mathbf{x}_0) & \ldots & f_{x_kx_k}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix}$$

(1) Αν $\Delta_k > 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ τότε η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν $(-1)^k \Delta_k > 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ τότε η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ αυστηρό τοπικό μέγιστο.

(3) Αν δεν συμβαίνει ούτε το (1) ούτε το (2) τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι σαγματικό σημείο της f.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 6.5. Παρατηρείστε ότι το παραπάνω Θεώρημα είναι όντως γενίκευση του αντίστοιχου για δύο μεταβλητές (Θεώρημα 6.7). Πράγματι για $n = 2$ οι περιπτώσεις (1) και (2) του Θεωρήματος 6.9 είναι ακριβώς οι περιπτώσεις (1) και (2) του Θεωρήματος 6.7. Τώρα (λαμβάνοντας υπόψην ότι $\Delta_2(\mathbf{x}_0) \neq 0$) η άρνηση της περίπτωσης (1) του Θεωρήματος 6.9 είναι ισοδύναμη με το να πούμε ότι

$$\text{είτε } f_{xx}(\mathbf{x}_0) \leq 0 \;\text{ ή }\; \Delta_2(\mathbf{x}_0) < 0 \tag{6.6}$$

και αντίστοιχα, η άρνηση της περίπτωσης (2) του Θεωρήματος 6.9 είναι ισοδύναμη με το ότι

$$\text{είτε } f_{xx}(\mathbf{x}_0) \geq 0 \;\text{ ή }\; \Delta_2(\mathbf{x}_0) < 0 \tag{6.7}$$

Άρα η περίπτωση (3) του Θεωρήματος 6.9 είναι ισοδύναμη με την

$$\text{είτε } f_{xx}(\mathbf{x}_0) = 0 \;\text{ ή }\; \Delta_2(\mathbf{x}_0) < 0 \tag{6.8}$$

Όμως αν $f_{xx}(\mathbf{x}_0) = 0 \Rightarrow \Delta_2(\mathbf{x}_0) = -(f_{xy}(\mathbf{x}_0))^2 < 0$ και άρα η περίπτωση (3) του Θεωρήματος 6.9 είναι τελικά ισοδύναμη με την περίπτωση $\Delta_2(\mathbf{x}_0) < 0$ που είναι η περίπτωση (3) του Θεωρήματος 6.7.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.5. Εξετάστε την συνάρτηση $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x^2y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Προσδιορίζουμε πρώτα τα κρίσιμα σημεία, δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned} f_x(x, y, z) &= 2x - 2xy^2 = 2x(1 - y^2) = 0 \\ f_y(x, y, z) &= 2y - 2x^2y = 2y(1 - x^2) = 0 \\ f_z(x, y, z) &= 2z = 0 \end{aligned}$$

Απο την τρίτη εξίσωση βλέπουμε ότι $z = 0$. Επίσης απο την πρώτη εξίσωση έχουμε ότι $x = 0$ ή $y = 1$ ή $y = -1$.

Αν $x = 0$ τότε η δεύτερη εξίσωση δίνει ότι $2y = 0$ δηλαδή $y = 0$. Άρα παίρνουμε το σημείο $(0, 0, 0)$.

Αν $y = 1$ τότε η δεύτερη εξίσωση δίνει ότι $1 - x^2 = 0$ δηλαδή $x = -1$ ή $x = 1$. Άρα παίρνουμε τα σημεία $(-1, 1, 0)$ και $(1, 1, 0)$.

Αν $y = -1$ τότε η δεύτερη εξίσωση δίνει πάλι $x = -1$ ή $x = 1$. Άρα παίρνουμε τα σημεία $(-1, -1, 0)$ και $(1, -1, 0)$.

Συνολικά λοιπόν έχουμε πέντε κρίσιμα σημεία που είναι τα εξής:

$$(0, 0, 0),\ (-1, 1, 0),\ (1, 1, 0),\ (-1, -1, 0) \text{ και } (1, -1, 0)$$

Βρίσκουμε τώρα τον Εσσιανό πίνακα της f:

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - 2y^2 & -4xy & 0 \\ -4xy & 2 - 2x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Εξετάζουμε στην συνέχεια κάθε κρίσιμο σημείο ξεχωριστά.

(1) Στο σημείο $(0, 0, 0)$ ο Εσσιανός πίνακας στο $(0, 0, 0)$ είναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

οπότε,

$$\Delta_1(0, 0, 0) = 2 > 0,\ \Delta_2(0, 0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0,$$

και

$$\Delta_3(0, 0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

Συνεπώς η f έχει στο $(0, 0, 0)$ αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Στο σημείο $(-1, 1, 0)$ ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Επειδή

$$\Delta_3(-1, 1, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -32 < 0$$

και $\Delta_1(-1, 1, 0) = 0$ είμαστε στην περίπτωση του σαγματικού σημείου (παρατηρείστε ότι δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε την $\Delta_2(-1, 1, 0)$) και άρα το $(-1, 1, 0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

(3) Στο σημείο $(1,1,0)$ ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$\Delta_3(1,1,0) = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -32 < 0$$

και $\Delta_1(1,1,0) = 0$ έχουμε ότι το $(1,1,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

(4) Στο σημείο $(-1,-1,0)$ ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ο ίδιος δηλαδή με του σημείου $(1,1,0)$ παραπάνω.

Άρα το $(-1,-1,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

(5) Στο σημείο $(1,-1,0)$ ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ο ίδιος δηλαδή με του σημείου $(-1,1,0)$ παραπάνω.

Άρα το $(1,-1,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f.

6.4. Απόδειξη του κριτηρίου δεύτερης μερικής παραγώγου

Η απόδειξη του κριτηρίου είναι ένας συνδυασμός Ανάλυσης και Γραμμικής Άλγεβρας. Πιο συγκεκριμμένα θα εφαρμόσουμε το ***Θεώρημα Taylor*** (Θεώρημα 5.27) για $m = 2$ και αφού αποδείξουμε μια αναλυτική μορφή του κριτηρίου (δείτε Θεώρημα 6.11 παρακάτω) θα εφαρμόσουμε το λεγόμενο ***Κριτήριο Sylvester για τετραγωνικές μορφές*** (Θεώρημα 6.15 παρακάτω).

6.4.1. ***Αναλυτική μορφή του κριτηρίου δεύτερης μερικής παραγώγου*** Θυμηθείτε ότι απο το Δεύτερο Θεώρημα Taylor (Θεώρημα 5.27) έχουμε ότι αν $f \in C^2(A)$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $\mathbf{x}_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ τότε

$$f(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \quad \text{με} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2} = 0, \tag{6.10}$$

όπου $T_2(\mathbf{x})$ είναι το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0$, δηλαδή το πολυώνυμο

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

Παρατηρείστε τώρα ότι αν το $\mathbf{x}_0$ είναι ***κρίσιμο*** σημείο της f τότε το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ γράφεται

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Άρα θέτοντας

$$Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = Q_{\mathbf{x}_0}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_i - a_i)(x_j - a_j) \tag{6.11}$$

η (6.10) γράφεται

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2}\, Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \quad \text{με} \quad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2} = 0. \tag{6.12}$$

Η συνάρτηση $Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ θέτοντας $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ και κάνοντας μια αλλαγή συντεταγμένων $x_i' = x_i - a_i$ παίρνει την μορφή $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i' x_j'$ και άρα γίνεται μια *τετραγωνική μορφή n-μεταβλητών* μια κλάση συναρτήσεων πολύ γνωστή ειδικά στην Γραμμική Άλγεβρα. Θα θυμίσουμε στην επόμενη υποπαράγραφο τους σχετικούς ορισμούς, αλλά πριν πάμε σε αυτό ας δούμε πως περίπου σκεπτόμαστε να προχωρίσουμε στην απόδειξη του Κριτηρίου Δεύτερης Μερικής Παραγώγου.

Απλοποιώντας την κατάσταση ας θεωρήσουμε ότι το σφάλμα $R_2(\mathbf{x})$ είναι μηδέν οπότε απο την (6.12) βλέπουμε ότι αν το $\mathbf{x}$ είναι αρκετά κοντά στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}).$$

Άρα αν για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ που είναι αρκετά κοντά στο $\mathbf{x}_0$ είχαμε $Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) > 0$ τότε θα είχαμε και ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > 0$ και άρα στην περίπτωση αυτή το $\mathbf{x}_0$ θα ήταν σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου. Αντίστοιχα, αν $Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ που είναι αρκετά κοντά στο $\mathbf{x}_0$ τότε το $\mathbf{x}_0$ θα ήταν σημείο αυστηρού τοπικού μεχίστου. Συνεπώς αν η $Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x})$ *διατηρούσε πρόσημο γύρω απο το* $\mathbf{x}_0$ τότε το $\mathbf{x}_0$ θα ήταν αυστηρό τοπικό γνήσιο ακρότατο. Απο την άλλη αυτό είναι και αναγκαίο για να είναι το $\mathbf{x}_0$ αυστηρό τοπικό ακρότατο γιατι αν *οσοδήποτε κοντά στο* $\mathbf{x}_0$ υπήρχαν και $\mathbf{x}$ με $Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) < 0$ και $\mathbf{x}$ με $Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) > 0$ τότε για τα πρώτα θα είχαμε $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) < 0$ και για τα δεύτερα $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > 0$ και συνεπώς το $\mathbf{x}_0$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

Θα δείξουμε τώρα ότι τα παραπάνω ισχύουν ακόμη και αν το $R_2(\mathbf{x})$ δεν είναι ίσο με μηδέν. Θα χρειασθούμε πρώτα την εξής γενική πρόταση.

Πρόταση 6.10. *Έστω $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της μορφής*

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(\lambda\mathbf{x}) = Q(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^2 Q(\mathbf{x}) \tag{6.13}$$

Ειδικότερα,

$$Q\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) = \frac{Q(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \tag{6.14}$$

για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Απόδειξη.

$$Q(\lambda\mathbf{x}) = Q(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\lambda x_i \lambda x_j = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \lambda^2 Q(\mathbf{x})$$

Άρα αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε για $\lambda = 1/\|\mathbf{x}\|$,

$$Q\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} Q(\mathbf{x}) = \frac{Q(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

□

Θεώρημα 6.11. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{x}_0 \in A$ κρίσιμο σημείο της f. Έστω η συνάρτηση $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με*

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) x_i x_j$$

(1) Αν $Q(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν $Q(\mathbf{x}) < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ αυστηρό τοπικό μέγιστο.

(3) Αν υπάρχουν $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^n$ με $Q(\mathbf{z}_1) < 0$ και $Q(\mathbf{z}_2) > 0$ τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι σαγματικό σημείο της f.

Απόδειξη. Όπως αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου, απο το Δεύτερο Θεώρημα Taylor έχουμε

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \text{ με } \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2} = 0$$

και

$$Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

Παρατηρείστε ότι για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Επίσης για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2} Q_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}) \\ &= \left[\frac{1}{2}\frac{Q(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2} + \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2}\right] \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2 \\ &\overset{(6.14)}{=} \left[\frac{1}{2} Q\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|}\right) + \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2}\right] \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2 \end{aligned} \tag{6.15}$$

(1) Έστω ότι $Q(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Τότε[1]

$$m = \min\{Q(\mathbf{y}) : \|\mathbf{y}\| = 1\} > 0 \tag{6.16}$$

[1] Το m στην (6.16) είναι καλά ορισμένο. Αυτό γιατί η Q είναι ***συνεχής*** και η $S_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y}\| = 1\}$ είναι ***συμπαγές*** υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ (δείτε Θεώρημα 2.16 παρακάτω)

Επειδή $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \dfrac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2} = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2} < \frac{m}{2} \tag{6.17}$$

Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta$, απο τις (6.15) και (6.16) προκύπτει ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > 0$ δηλαδή το $\mathbf{x}_0$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Έστω ότι $Q(\mathbf{x}) < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Τότε[2]

$$M = \max\{Q(\mathbf{y}) : \|\mathbf{y}\| = 1\} < 0 \tag{6.18}$$

Επειδή $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \dfrac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2} = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2} < \frac{M}{2} \tag{6.19}$$

Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta$, απο τις (6.15) και (6.18) προκύπτει ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) < 0$ δηλαδή το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο αυστηρού τοπικού μεγίστου.

(3) Έστω ότι υπάρχουν $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^n$ με $Q(\mathbf{z}_1) < 0$ και $Q(\mathbf{z}_2) > 0$. Θα δείξουμε ότι τότε το $\mathbf{x}_0$ δεν είναι τοπικό ακρότατο. Απο την Παρατήρηση 6.1 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$ τέτοια ώστε

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_0) < f(\mathbf{x}_2)$$

Πράγματι, απο τον ορισμό της συνάρτησης Q έχουμε $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0}$. Θέτουμε

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|} \ \text{ και } \mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|}$$

Έχουμε $\|\mathbf{y}_1\| = \|\mathbf{y}_2\| = 1$,

$$Q(\mathbf{y}_1) = Q\left(\frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|}\right) \overset{(6.14)}{=} \frac{Q(\mathbf{z}_1)}{\|\mathbf{z}_1\|^2} < 0$$

και ομοίως $Q(\mathbf{y}_2) > 0$. Πράγματι έστω ένα οποιοδήποτε $\delta > 0$. Επιλέγουμε και ένα $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\| < \delta_0 \Rightarrow -\frac{Q(\mathbf{y}_2)}{2} < \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2} < -\frac{Q(\mathbf{y}_1)}{2} \tag{6.20}$$

Θέτουμε $\delta' = \min\{\delta_0, \delta\}$,

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \frac{\delta'}{2}\mathbf{y}_1, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_0 + \frac{\delta'}{2}\mathbf{y}_2$$

Τότε $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0\| = \delta'/2 < \delta$ και

$$\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{y}_1, \quad \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|} = \mathbf{y}_2$$

Συνεπώς $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_\delta(\mathbf{x}_0)$,

$$f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0) \overset{(6.15)}{=} \left[\frac{1}{2}Q(\mathbf{y}_1) + \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2}\right] \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2 \overset{(6.20)}{<} 0$$

και ομοίως $f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{x}_0) > 0$. □

[2]Ομοίως το M ορίζεται καλώς για τους ίδιους λόγους

6.4.2. Τετραγωνικές Μορφές. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του κριτηρίου θα χρειασθούμε κάποια στοιχεία απο την θεωρία των τεραγωνικών μορφών που αναφέρουμε στην συνέχεια.

Ορισμος 6.12. *Μια συνάρτηση $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ της μορφής*

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$ σταθερές, καλείται ***τετραγωνική μορφή****.*

Παρατηρησεις 6.2. (1) Οι σταθερές a_{ij} $i, j = 1, \ldots, n$ σχηματίζουν έναν $n \times n$-πίνακα $A = [a_{ij}]$ που χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρούμε ότι είναι ***συμμετρικός*** (δηλαδή $a_{ij} = a_{ji}$ για όλα τα $i, j = 1, \ldots, n$). Πράγματι έστω $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ μια τετραγωνική μορφή. Θέτουμε $b_{ij} = b_{ji} = \dfrac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$ και $b_{ii} = a_{ii}$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$. Τότε ο πίνακας $B = [b_{ij}]$ είναι συμμετρικός και $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$, για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

(2) Είναι εύκολο να δούμε ότι μια συνάρτηση $Q(x, y) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια τετραγωνική μορφή αν και μόνο αν είναι ένα δευτέρου βαθμού ομογενές πολυώνυμο n-μεταβλητών. Πχ. οι συναρτήσεις $x^2 + y^2$, xy, $y^2 + xy$ είναι τετραγωνικές μορφές ενώ η $x^2 + y^2 + x$ δεν είναι.

(3) Επειδή $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + \cdots + a_{nn} x_n^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j$ μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι η Q γράφεται και ως γινόμενο πινάκων.

$$\begin{aligned} Q(x_1, \ldots, x_n) &= [x_1 \ \ldots x_n] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ . & \ldots & . \\ . & \ldots & . \\ . & \ldots & . \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{X}^T A \mathbf{X} \end{aligned} \tag{6.21}$$

όπου (όπως συνηθίζεται στην Γραμμική Άλγεβρα) τα διανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τα βλέπουμε ως πίνακες στήλη

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

(οπότε $\mathbf{X}^T = [\ x_1 \ \ldots \ x_n\ ]$).

Πχ. το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor μιας C^2 συνάρτησης f με κέντρο ένα $\mathbf{x}_0$ γράφεται και με μορφή πινάκων ως εξής

$$T_2(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_0) + \nabla f\,(\mathbf{X}_0)^T \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \frac{1}{2}\,(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \cdot H(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \tag{6.22}$$

όπου $\nabla f\,(\mathbf{X}_0)^T = \left[\ \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) \ \ldots \ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \right]$ και $H(\mathbf{x}_0) = \left[\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right]_{i,j=1}^{n}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.13. *Έστω* $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ *μια τετραγωνική μορφή.*

*(1) Η Q θα καλείται **θετικά ορισμένη** αν $Q(x_1, \ldots, x_n) > 0$ για κάθε μη μηδενικό σημείο $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

*(2) Η Q θα καλείται **αρνητικά ορισμένη** αν $Q(x_1, \ldots, x_n) < 0$ για κάθε μη μηδενικό σημείο $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Απο την (6.21) παρατηρούμε ότι αν $\lambda \in \mathbb{R}$ μια ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}$ τότε

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T A \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \cdot (A\mathbf{X}) = \mathbf{x} \cdot \lambda \mathbf{x} = \lambda \|\mathbf{x}\|^2 \tag{6.23}$$

Άρα αν η τετραγωνική μορφή $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ είναι θετικά (αντ. αρνητικά) ορισμένη τότε όλες οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $A = [a_{ij}]$ είναι θετικές (αντ. αρνητικές). Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή ισχύει ο επόμενος χαρακτηρισμός των θετικά (αντ. αρνητικά) ορισμένων τετραγωνικών μορφών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.14. *Μια τετραγωνική μορφή $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ είναι θετικά (αντ. αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $A = [a_{ij}]$ είναι όλες θετικές (αντ. αρνητικές).*

Εδώ όμως θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο πολύ πιο άμεσο κριτήριο, που οφείλεται στον Sylvester, και το οποίο είναι ένας αριθμητικός αλγόριθμος που μας επιτρέπει να διακρίνουμε αν μια τετραγωνική μορφή είναι ορισμένη ή όχι χωρίς να πρέπει να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.15. ***(Κριτήριο του Sylvester)*** *Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας και έστω $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Για κάθε $k = 1, \ldots, n$ θέτουμε $A_k = [a_{ij}]_{i,j \leq k}$, δηλαδή A_k είναι ο πίνακας που προκύπτει απο τον A αν κρατήσουμε τις πρώτες k γραμμές και τις πρώτες k στήλες του.*

(1) Η τετραγωνική μορφή Q είναι θετικά ορισμένη (δηλαδή $Q(x) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) αν και μόνο αν $\det A_k > 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

(2) Η τετραγωνική μορφή Q είναι αρνητικά ορισμένη (δηλαδή $Q(x) < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) αν και μόνο αν $(-1)^k \det A_k > 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

Απο τα Θεωρήματα 6.14 και 6.15 παίρνουμε το εξής.

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.16. *Αν δεν ισχύει ούτε ότι (1) $\Delta_k > 0$ για όλα τα $k = 1, \ldots, n$, ούτε ότι (2) $(-1)^k \Delta_k > 0$ για όλα τα $k = 1, \ldots, n$ και επιπλέον $\Delta_n \neq 0$ τότε υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ τέτιοα ώστε $Q(\mathbf{x}_1) < 0$ και $Q(\mathbf{x}_2) > 0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού δεν ισχύει η (1), απο το Θεώρημα 6.15 έχουμε ότι η Q δεν είναι θετικά ορισμένη και άρα από το Θεώρημα 6.14 ο A θα έχει μια ιδιοτιμή $\lambda_1 \leq 0$. Ομοίως με τους ίδιους συλογισμούς αφού δεν ισχύει η (2), ο A θα έχει μια ιδιοτιμή $\lambda_2 \geq 0$. Επειδή τώρα ως γνωστόν η ορίζουσα ενός συμμετρικού τετραγωνικού πίνακα είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών του, εφόσον $\Delta_n \neq 0$ όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη μηδενικές. Άρα $\lambda_1 < 0$ και $\lambda_2 > 0$. Αν τώρα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ είναι τα αντίστοιχα ιδιυοδιανύσματα, απο την (6.23) έχουμε $Q(\mathbf{x}_1) < 0$ και $Q(\mathbf{x}_2) > 0$. □

Η απόδειξη του Κριτηρίου Δεύτερης Παραγώγου (Θεώρημα 6.9) προκύπτει τώρα άμεσα απο το Θεώρημα 6.11, το Θεώρημα 6.15 και το Πόρισμα 6.16.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 6.6. Το κριτήριο Sylvester μπορεί να προκύψει κάνοντας χρήση του Κριτηρίου Δεύτερης Παραγώγου. Πράγματι, έστω A συμμετρικός πίνακας και $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Χρησιμοποιώντας την (6.13) έπεται εύκολα ότι η $Q(\mathbf{x})$ είναι θετικά (αντ. αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν η Q έχει στο $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ αυστηρό τοπικό ελάχιστο (αντ. μέγιστο). Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι $Q_{x_ix_j}(\mathbf{x}) = a_{ij}$ για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, και συνεπώς,

$$Q''(\mathbf{x}) = A \tag{6.24}$$

για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Τέλος παρατηρείστε ότι αν η Q είναι θετικά (ή αρνητικά) ορισμένη τότε $\det A \neq 0$ (διαφορετικά το σύστημα $A\mathbf{X} = 0$ θα είχε μη μηδενική λύση που απο την (6.21) θα μηδένιζε και την Q). Άρα αφού $A = Q''(\mathbf{0})$ το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου μπορεί να εφαρμοστεί για $f = Q$ και $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$.

6.5. Τοπικά Ακρότατα υπό συνθήκες

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάσαμε μία μέθοδο για τον εντοπισμό των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών που είναι ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$, τοπικά δηλαδή γύρω απο κάθε σημείο του A οι μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ ήταν ***ελέυθερες***, μεταβάλλονταν δηλαδή κατά οποιοδήποτε τρόπο χωρίς κανένα περιορισμό. Τί συμβαίνει τώρα αν θέσουμε κάποιες ***συνθήκες δέσμεύσης*** των μεταβλητών $x_1, \ldots, x_n$; Είναι εύκολο να δούμε ότι τότε τα πράγματα αλλάζουν ακόμη και για συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Πχ. αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3$ για τα x που είναι στο κλειστο διάστημα $[-1, 1]$ τότε λόγω μονοτονίας το $x_0 = -1$ είναι ολικό ελάχιστο και το $x_0 = 1$ ολικό μέγιστο αλλά τα σημεία αυτά δεν είναι κρίσιμα σημεία.

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε το εξής γενικό πρόβλημα: *Η συνάρτησή μας $f : A \to \mathbb{R}$ θα ορίζεται ευρύτερα σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ (συνήθως το A θα είναι όλος ο $\mathbb{R}^n$) αλλά θα εξετάζουμε τα τοπικά ακρότατά της υπό κάποιες* ***συνθήκες (δεσμεύσεις)*** *που θα ικανοποιούν οι μεταβλητές μας.* Οι συνθήκες αυτές θα δίνονται μέσω ***μιας εξίσωσης*** της μορφής

$$g(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{6.25}$$

ή γενικότερα μέσω ενός ***συστήματος εξισώσεων***[3] της μορφής

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{6.26}$$

Κάθε μια απο τις συνθήκες αυτές είναι και μια εξάρτηση (δέσμευση) των μεταβλητών $x_1, \ldots, x_n$. Με άλλα λόγια τα τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης f υπό τις συνθήκες

[3]ακόμη γενικότερα οι συνθήκες μπορεί να δίνονται και με την μορφή ενός συστήματος ***ανισώσεων***

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq 0, \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$$

αλλά δεν θα ασχοληθούμε εδώ με τέτοιου είδους προβλήματα εκτός ίσως απο κάποιες απλές περιπτώσεις που θα ανάγονται σε συστήματα εξισώσεων.

$g_1, \dots, g_m$ είναι τα τοπικά ακρότατα του περιορισμού της f στο σύνολο

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0\} \tag{6.27}$$

Κάτω από κάποιες προυποθέσεις ομαλότητας[4] για τις συναρτήσεις $g_1, \dots, g_m$ το σύνολο M αποκτά ενδιαφέρουσες γεωμετρικές ιδιότητες. Πχ. στην περίπτωση μιας συνθήκης g στον $\mathbb{R}^2$ το $M = \{(x, y) : g_1(x, y) = 0\}$ είναι μια καμπύλη του $\mathbb{R}^2$. Αντίστοιχα στην περίπτωση μιας συνθήκης $g(x, y, z) = 0$ στον $\mathbb{R}^3$ το M θα είναι μια επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ και στην περίπτωση δύο συνθηκών $g_1(x, y, z) = 0$ και $g_2(x, y, z) = 0$ το M θα είναι η καμπύλη που προκύπτει απο την τομή των δύο επιφανειών που ορίζουν η $g_1(x, y, z) = 0$ και η $g_2(x, y, z) = 0$ αντίστοιχα.

Παραδειγματα 6.1. (1) Η συνθήκη $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ αναπαριστά τα σημεία του μοναδιαίου κύκλου του $\mathbb{R}^2$.

(2) Η συνθήκη $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ είναι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας του $\mathbb{R}^3$.

(3) Έστω $m < n$ και $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^m$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ να είναι οι συναρτήσεις $g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}$. Τότε το σύνολο $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0\}$ ειναι ο γραμμικός υπόχωρος διάστασης $n - m$ του $\mathbb{R}^n$ που είναι ο κάθετος στον $V =< \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m >$. Ισοδύναμα

$$M = \cap_{i=1}^m M_i$$

όπου $M_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x} = 0\}$ ο κάθετος στο $\mathbf{a}_i$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n - 1$.

Μπορούμε επίσης να δούμε το σύνολο M ως το σύνολο των σημείων μηδενισμού της συνάρτησης $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ με $G(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))$. Αν η G είναι συνεχής (ισοδύναμα οι συναρτήσεις $g_1, \dots, g_m$ είναι συνεχείς) τότε το $M = G^{-1}(\mathbf{0})$ είναι ένα *κλειστό* υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Σε πολλές περιπτώσεις τυχαίνει να είναι και *φραγμένο*[5]. Συνεπώς απ το Θεώρημα 2.16 έχουμε την εξής πρόταση.

Προταση 6.17. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f, g_1, \dots, g_m : A \to \mathbb{R}$ συνεχείς. Αν το σύνολο $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0\}$ είναι φραγμένο τότε η f έχει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο υπο τις συνθήκες $g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0$.*

Υπάρχουν δύο τρόποι επίλυσης προβλημάτων τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκες. Ο πρώτος είναι η επίλυση των εξισώσεων των συνθηκών (ως προς μία συντεταγμένη) ή η παραμετρικοποίηση τους εφόσον βέβαια αυτή η επίλυση είναι άμεσα δυνατή.

[4]Απο το *Θεώρημα των πεπλεγμένων συναρτήσεων* (που θα μελετήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο) έπεται ότι οι προυποθέσεις που θα πρέπει να ικανοποιούν οι g_i $i = 1, \dots, m$ είναι οι εξής δύο: 1) κάθε g_i είναι κλάσης C^1, και 2) για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ τα διανύσματα $\nabla g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, \dots, m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αποδεικνύεται ότι αν οι g_i, $i = 1, \dots, m$ ικανοποιούν τις παραπάνω δύο προυποθέσεις τότε το σύνολο M τοπικά (δηλαδή γύρω απο κάθε σημείο του) είναι το γράφημα μιας συνάρτησης $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^m$, όπου U ανοικτό. Αυτό σημαίνει ότι τοπικά το M μοιάζει με τον $\mathbb{R}^k$, όπου $k = n - m$ (στην Διαφορική Γεωμετρία ένα τέτοιο σύνολο καλείται *υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k*).

[5]Θυμηθείτε εδώ ένα *κλειστό και φραγμένο* υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ καλείται *συμπαγές* (δείτε Κεφάλαιο 1 για περισσότερες πληροφορίες)

Με τον τρόπο αυτόν όπως θα δούμε στα παραδείγματα που ακολουθούν, ανάγουμε γρήγορα το πρόβλημα σε πρόβλημα ελευθέρων ακροτάτων που αντιμετωπίζεται με τις μεθόδους που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Ο δεύτερος τρόπος είναι πολύ πιο γενικός και είναι η επονομαζόμενη ***Μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange***. Η μέθοδος αυτή ολοκληρώνεται με το λεγόμενο ***Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου υπό συνθήκες*** που είναι γενίκευση του αντίστοιχου κριτηρίου για ελεύθερα τοπικά ακρότατα.

6.6. Η μέθοδος της επίλυσης ή παραμετρικοποίηση των συνθηκών

Παραδειγμα 6.6. Βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y,z) = xyz$ υπό την συνθήκη $g(x,y,z) = x+y+z-1 = 0$.

Λύση: Έχουμε $z = 1-x-y$ οπότε αντικαθιστώντας στη f παίρνουμε την συνάρτηση $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$F(x,y) = f(x,y,1-x-y) = xy(1-x-y) = xy - x^2y - xy^2$$

Παρατηρούμε ότι ένα σημείο $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $f(x,y,z)$ υπο την συνθήκη $x+y+z=1$ αν και μόνο αν (x_0,y_0) είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $F(x,y)$. Άρα το πρόβλημά μας απο πρόβλημα ακροτάτων τριών δεσμευμένων μεταβλητών μετατρέπεται σε πρόβλημα ελεύθερων τοπικών ακροτάτων δύο μεταβλητών. Επειδή $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$ μπορούμε να μελετήσουμε τα ακρότατα της F με τον τρόπο που αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο δηλαδή βρίσκοντας πρώτα τα κρίσιμα σημεία της και εφαρμόζοντας μετά το κριτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου.

Ως γνωστόν τα κρίσιμα σημεία της F είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$F_x(x,y) = y - 2xy - y^2 = y(1-2x-y) = 0$$
$$F_y(x,y) = x - x^2 - 2xy = x(1-x-2y) = 0$$

Άν $y=0$ τότε $x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$, οπότε τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ είναι κρίσιμα. Αν $x=0$ τότε $y(1-y)=0 \Leftrightarrow y=0$ ή $y=1$, οπότε και το $(0,1)$ είναι κρίσιμο. Αν $x,y \neq 0$ τότε έχουμε το σύστημα

$$2x+y=1$$
$$x+2y=1$$

που δίνει το κρίσημο σημείο $(1/3,1/3)$.

Πάμε τώρα να εφαρμόσουμε το κριτήριο με τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους για να διακρίνουμε ποιά απο τα παραπάνω σημεία είναι τοπικά ακρότατα. Έχουμε

$$F_{xx}(x,y) = -2y,\ F_{xy}(x,y) = 1-2x-2y,\ F_{yy}(x,y) = -2x$$

και

$$\Delta = F_{xx}F_{yy} - F_{xy}^2$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\Delta(0,0) = -1 < 0$, $\Delta(1,0) = -1 < 0$, $\Delta(0,1) = -1 < 0$ και άρα όλα αυτά τα σημεία είναι σαγματικά. Επίσης $\Delta(1/3,1/3) = 1/3 > 0$ και $F_{xx}(1/3,1/3) = -2/3 < 0$ το σημείο $(1/3,1/3)$ είναι το μοναδικό τοπικό μέγιστο της

F. Άρα το σημείο $(1/3, 1/3, 1/3)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο της $f(x, y, z) = xyz$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 1$.

Παρατηρησεις 6.3. Αν περιορισθούμε στην περίπτωση όπου τα x, y, z είναι όλα μη αρνητικά [6] τότε το $(1/3, 1/3, 1/3)$ είναι σημείο *ολικού μεγίστου* της $f(x, y, z) = xyz$. Πράγματι μπορεί να δειχθεί (πχ. με ακολουθίες -δείτε Κεφάλαιο 1) ότι το σύνολο

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x + y + z = 1\}$$

είναι κλειστό και φραγμένο. Επειδή τώρα η $f(x, y, z) = xyz$ είναι συνεχής συνάρτηση, θα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο M, δηλαδή θα υπάρχουν στο M σημεία ολικού ελαχίστου και ολικού μεγίστου της f. Επειδή αυτά είναι και σημεία τοπικων ακροτάτων θα πρέπει το σημείο ολικού μεγίστου της f στο M να είναι αναγκαστικά το $(1/3, 1/3, 1/3)$. (Το σημείο ολικού ελαχίστου είναι όπως εύκολα βλέπουμε το $(0, 0, 0)$).

Έχουμε δηλαδή ότι για όλα τα $x, y, z \geq 0$ με $x + y + z = 1$ ισχύει ότι $xyz \leq f(1/3, 1/3, 1/3) = 1/27$. Παρατηρείστε ότι έχουμε ουσιαστικά καταλήξει στην γνωστή *ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου*. Πράγματι, έστω $x, y, z \geq 0$. Αν όλοι είναι μηδέν η ανισότητα ισχύει τετριμμένα. Διαφορετικά θέτουμε

$$x' = \frac{x}{x + y + z},\ y' = \frac{y}{x + y + z} \ \text{ και } z' = \frac{z}{x + y + z}$$

Έχουμε $x', y', z' \geq 0$ και $x' + y' + z' = 1$. Άρα

$$f(x', y', z') \leq f(1/3, 1/3, 1/3) \Leftrightarrow x'y'z' \leq 1/27 \Leftrightarrow \frac{xyz}{(x + y + z)^3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

δηλαδή

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3} \tag{6.28}$$

Μάλιστα επειδή το ακρότατο $(1/3, 1/3)$ ήταν στην ουσία σημείο *αυστηρού τοπικού μεγίστου* έχουμε και την πληροφορία ότι στην (6.28) η ισότητα ισχύει μόνο στην περίπτωση $x = y = z$. Γεωμετρικά, η (6.28) λέει ότι ***από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα με δεδομένο άθροισμα ακμών ο κύβος έχει τον μεγαλύτερο όγκο***.

Παραδειγμα 6.7. Έστω $\tau > 0$ και

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0 \text{ και } x + y < \tau\}$$

δηλαδή το A είναι το εσωτερικό του ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(\tau, 0)$ και $(0, \tau)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$f(x, y) = xy(\tau - x - y)$$

για κάθε $(x, y) \in A$.

(α) Δείξτε η f έχει ολικό μέγιστο στο σημείο $(\tau/3, \tau/3)$.

[6] τυπικά δηλαδή έχουμε τέσσερεις συνθήκες τις $g_1(x, y, z) = x \geq 0$, $g_2(x, y, z) = y \geq 0$, $g_3(x, y, z) = z \geq 0$ και την αρχική μας $g(x, y, z) = x + y + z - 1 = 0$

(β) Δείξτε ότι ***απο όλα τα τρίγωνα με την ίδια περίμετρο το ισόπλευρο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.*** (Θυμηθείτε ότι το εμβαδό ενός τριγώνου με πλευρές α, β, γ δίνεται απο τον ***τύπο του Ήρωνα***

$$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

όπου $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ η *ημιπερίμετρος* του τριγώνου.

Λύση: (α) Έχουμε $f(x,y) = xy(\tau - x - y) = \tau xy - x^2y - xy^2$ και άρα

$f_x(x,y) = \tau y - 2xy - y^2 = y(\tau - 2x - y)$ και $f_y(x,y) = \tau x - x^2 - 2xy = x(\tau - x - 2y)$.

Τα κρίσιμα σημεία της f (στο A) είναι οι λύσεις του συστήματος $f_x = f_y = 0$ που επειδή $x, y \neq 0$ γράφεται

$$\tau - 2x - y = 0$$

$$\tau - x - 2y = 0$$

Συνεπώς $x = y = \tau/3$. Άρα η f αν έχει τοπικό ακρότατο αυτό θα είναι μοναδικό και θα είναι στο σημείο $(\tau/3, \tau/3)$. Θα δείξουμε τώρα ότι όντως η f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο $(\tau/3, \tau/3)$. Έχουμε $f_{xx}(x,y) = -2y$, $f_{yy}(x,y) = -2x$, $f_{xy}(x,y) = \tau - 2x - 2y$ και άρα $f_{xx}(\tau/3, \tau/3) = -2\tau/3$, $f_{yy}(\tau/3, \tau/3) = -2\tau/3$ και $f_{xy}(\tau/3, \tau/3) = -\tau/3$. Συνεπώς

$$f_{xx}(\tau/3, \tau/3) < 0 \text{ και}$$

$$\Delta(0,0) = f_{xx}(0,0)f_{yy}(0,0) - f_{xy}^2(0,0) = 4\tau^2/9 - \tau^2/9 = \tau^2/3 > 0$$

και άρα το $(\tau/3, \tau/3)$ είναι τοπικό μέγιστο.

Στην πραγματικότητα το $(\tau/3, \tau/3)$ είναι ολικό μέγιστο. Αυτό μπορούμε να το δούμε με δύο τρόπους:

α΄τρόπος: Έστω $\tilde{f}$ η επέκταση της f σε όλο το κλειστό τρίγωνο (εσωτερικό και σύνορο μαζί). Επειδή η $\tilde{f}$ είναι συνεχής και ορίζεται σε ένα κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ θα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Επειδή $\tilde{f}(x,y) = 0$ αν το (x,y) είναι στο σύνορο του τριγώνου και $\tilde{f}(x,y) > 0$ αν (x,y) είναι στο εσωτερικό του, θα έχουμε ότι η μέγιστη τιμή της $\tilde{f}$ θα λαμβάνεται στο εσωτερικό του τριγώνου, οπότε θα είναι και μέγιστη τιμή της f. Επειδή όμως όπως αποδείξαμε η f έχει μόνο ένα τοπικό μέγιστο στο $(\tau/3, \tau/3)$ θα πρέπει το $(\tau/3, \tau/3)$ να είναι και το σημείο όπου η f λαμβάνει μέγιστη τιμή.

β΄τρόπος: Από την ανισότητα γεωμετρικού και αριθμητικού μέσου ((6.28)) παίρνουμε ότι

$$f(x,y) = xy(\tau - x - y) \leq \left(\frac{x + y + (\tau - x - y)}{3}\right)^3 = \left(\frac{\tau}{3}\right)^3 = f(\tau/3, \tau/3)$$

και άρα το σημείο $(\tau/3, \tau/3)$ είναι ολικό μέγιστο της f.

(β) Στον τύπο $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου $\tau = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ ημιπερίμετρος του τριγώνου, θέτουμε $x = \tau - \alpha$ και $y = \tau - \beta$. Είναι $x + y = 2\tau - \alpha - \beta = \gamma$ οπότε και $\tau - \gamma = \tau - x - y$.

Επίσης έχουμε $x = \tau - \alpha = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} > 0$ (απο τριγωνική ανισότητα). Ομοίως $y = \tau - \beta > 0$ και $\tau - x - y = \tau - \gamma > 0 \Leftrightarrow x + y < \tau$. Συνεπώς $(x, y) \in A$ και

$$E = \sqrt{\tau xy(\tau - x - y)} = \sqrt{\tau}\sqrt{f(x, y)}.$$

Συνεπώς η μεγιστοποίηση του E είναι ισοδύναμη με την μεγιστοποίηση της f. Απο το (α) ερώτημα έχουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο μοναδικό σημείο $(\tau/3, \tau/3)$. Άρα $\alpha = \tau - x = 2\tau/3$, $\beta = \tau - y = 2\tau/3$ και $\gamma = x + y = 2\tau/3$, ισοδύναμα το εμβαδό γίνεται μέγιστο όταν και μόνον όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

Παραδειγμα 6.8. Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου $x + y + z = 3$ που έχει την ελάχιστη απόσταση απο την αρχή των αξόνων.

Λύση: Θα ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ υπό την συνθήκη $g(x, y, z) = x + y + z - 3 = 0$. Ισοδύναμα (και για ευκολία στους υπολογισμούς) θα ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Έχουμε $z = 3 - x - y$ και αντικαθιστώντας στην f παίρνουμε την συνάρτηση

$$F(x, y) = f(x, y, 3 - x - y) = x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2$$

Υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία της F:

$$F_x(x, y, z) = 2x - 2(3 - x - y) = 2x - 6 + 2x + 2y = 4x + 2y - 6 = 0$$

$$F_y(x, y) = 2y - 2(3 - x - y) = 2y - 6 + 2x + 2y = 2x + 4y - 6 = 0$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(1, 1)$.

Έχουμε $F_{xx}(x, y) = F_{yy}(x, y) = 4$ και $F_{xy}(x, y) = 2$. Άρα $\Delta(0, 0) = 4 \cdot 4 - 2^2 = 12 > 0$ και αφού $F_{xx}(1, 1) = 4 > 0$ το σημείο $(1, 1)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου. Συνεπώς το $(1, 1, 1)$ ε·ιναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f υπο την συνθήκη $x+y+z = 3$. Επειδή όπως γνωρίζουμε το $\mathbf{0}$ λαμβάνει την απόστασή του απο οποιοδήποτε επίπεδο του $\mathbb{R}^3$, το $(1, 1, 1)$ είναι το ζητούμενο σημείο.

Παραδειγμα 6.9. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y, z) = x+y+z$ υπο τις συνθήκες $g_1(x, y, z) = x^2+y^2-1 = 0$ και $g_2(x, y, z) = x+z-1 = 0$.

Λύση: Η συνθήκη $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ παριστάνει μια κυλινδρική επιφάνεια με άξονα τον άξονα $z'z$ και με βάση τον μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{R}^2$ και η $g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0$ το κάθετο στο διάνυσμα $(1, 0, 1)$ επίπεδο που διέρχεται απο το σημείο $(0, 0, 1)$. Συνεπώς η τομή τους είναι μια "λοξή" έλλειψη E στον $\mathbb{R}^3$. Παραμετρικοποιούμε την πρώτη εξίσωση θέτοντας

$$x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ t \in [0, 2\pi)$$

και λύνοντας την δεύτερη ως προς z παίρνουμε

$$z(t) = 1 - x = 1 - \cos t$$

Ορίζουμε $F : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$,

$$F(t) = f\left(x(t), y(t), z(t)\right) = f(\cos t, \sin t, 1 - \cos t) = 1 + \sin t$$

Μελετάμε τώρα τα ακρότατα της F. Για τα εσωτερικά σημεία του $[0, 2\pi)$ θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο δεύτερης παραγώγου (για συναρτήσεις μιας μεταβλητής). Έχουμε $F'(t) = \cos t$ και άρα κρίσιμα σημεία είναι τα $t_1 = \pi/2$ και $t_2 = -\pi/2$. Επίσης $F''(t) = -\sin t$ και άρα $F''(\pi/2) = -1$ οπότε το $t_1 = \pi/2$ είναι τοπικό μέγιστο και $F''(-\pi/2) = 1 > 0$ οπότε το $t_2 = -\pi/2$ είναι τοπικό ελάχιστο όταν περιορίσουμε την F στο ανοικτό διάστημα $(0, 2\pi)$. Επειδή $0 \leq F(t) \leq 2$ για κάθε $t \in [0, 2\pi)$ έπεται ότι στο σημείο $t_1 = \pi/2$ η F παρουσιάζει ολικό μέγιστο και στο $-\pi/2$ ολικό ελάχιστο. Επιστρέφοντας τώρα στο αρχικό μας πρόβλημα έπεται ότι η $f(x, y, z) = x + y + z$ υπο τις συνθήκες $g_1(x, y, z) = 0$ και $g_2(x, y, z) = 0$ (δηλαδή η συνάρτηση $f : E \to \mathbb{R}$) μεγιστοποιείται στο σημείο $(0, 1, 1)$ και ελαχιστοποιείται στο $(0, -1, 1)$.

6.7. Η μέθοδος των Πολλαπλασιαστών Lagrange

Απο την Πρόταση 6.3 έχουμε ότι κάθε τοπικό ακρότατο μιας παργωγίσιμης συνάρτησης είναι και κρίσιμο σημείο της δηλαδή το διάνυσμα της κλίσης της στο σημείο αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα. *Τι γίνεται τώρα στην περίπτωση των τοπικών ακροτάτων υπο συνθήκη*; Απο τα παραδείγματα που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το διάνυσμα της κλίσης της συνάρτησης στα τοπικά ακρότατα υπό συνθήκες δεν μηδενίζεται κατανάγκην (αν και αυτό μπορεί να συμβεί κάποιες φορές[7]). Το επονομαζόμενο ***Θεώρημα των Πολλαπλασιαστών Lagrange*** που παρουσιάζουμε στην συνέχεια απαντά στο ερώτημα αυτό.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.18. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(A)$ όπου $m < n$. Έστω επίσης $\mathbf{x}_0 \in A$ τέτοιο ώστε τα διανύσματα*

$$\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla g_m(\mathbf{x}_0)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα.[8]

Αν το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f υπό τις συνθήκες

$$g_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, g_m(\mathbf{x}) = 0. \tag{6.29}$$

τότε υπάρχουν (μοναδικοί) $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^* \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}_0) = 0 \tag{6.30}$$

Οι μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (6.30) *καλούνται* ***πολλαπλασιαστές Lagrange****.*

Η απόδειξη του Θεωρηματος 6.18 γίνεται με χρήση του *Κανόνα Αλυσίδας* (Θεώρημα 5.18) και του λεγόμενου *Θεωρήματος των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων* το οποίο θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

---

[7] Παρατηρείστε ότι αν ένα σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι *ολικό* ακρότατο μιας συνάρτησης f τότε είναι και ολικό ακρότατό της *υπό οποιαδήποτε συνθήκη* g *με* $g(\mathbf{x}_0) = 0$. Πχ. αφού το $(0, 0)$ είναι ολικό ελάχιστο της $f(x, y) = x^2 + y^2$ είναι και ολικό ελάχισ'το της υπό οποιαδήποτε συνθήκη g με $g(0, 0) = 0$.

[8] Ισοδύναμα, αν $G = (g_1, \ldots, g_m)$ ο $m \times n$-πίνακας $G'(\mathbf{x}_0) = \left[\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right]$ έχει τον μεγαλύτερο βαθμό που μπορεί να πάρει δηλαδή είναι βαθμού m. Στην περίπτωση όπου $m = 1$ αυτό σημαίνει απλά ότι $\nabla g_1(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$.

Παρατηρηση 6.7. Παρατηρείστε ότι η (6.30) λέει ότι το διάνυσμα της κλίσης της f στο τοπικό ακρότατο $\mathbf{x}_0$ είναι *ένας γραμμικός συνδυασμός* των διανυσμάτων των κλίσεων των συνθηκών στο σημείο αυτό. Στην ειδική περίπτωση όπου έχουμε μια συνθήκη $g(\mathbf{x}) = 0$ αυτό σημαίνει ότι τα διανύσματα $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ και $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ είναι *παράλληλα*. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δώσουμε περισσότερες εξηγήσεις για το φαινόμενο αυτό.

Απο τις (6.29) και (6.30) του Θεωρήματος 6.18 έχουμε ότι αν τα $\nabla g_i(\mathbf{x}_0)$, $i = 1, \ldots, m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα τότε ο εντοπισμός του τοπικού ακροτάτου της f υπό τις συνθήκες (6.29) ανάγεται στην λύση του συστήματος των εξής $m+n$-εξισώσεων:

$$\begin{aligned} &g_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \\ &\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{6.31}$$

Το σύστημα αυτό έχει ουσιαστικά τους $m+n$ αγνώστους $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ορίζοντας τώρα $L : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ να είναι η συνάρτηση

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{6.32}$$

παρατηρούμε ότι το σύστημα (6.31) είναι ισοδύναμο με την εξίσωση

$$\nabla L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mathbf{0}. \tag{6.33}$$

αφού όπως εύκολα βλέπουμε απο την (6.32),

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$, καθώς και

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)$$

για κάθε $j = 1, \ldots, n$.

Η συνάρτηση L που ορίζεται στην (6.32) ονομάζεται η ***συνάρτηση Lagrange*** (**που αντιστοιχεί στις** $f, g_1, \ldots, g_m$). Παρατηρείστε ότι η εξίσωση (6.33) έχει λύσεις όλα τα $(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) \in A \times \mathbb{R}^m$ που είναι κρίσιμα σημεία της L. Συνοψίζοντας τα παραπάνω, το Θεώρημα 6.18 αναδιατυπώνεται ως εξής:

Θεωρημα 6.19. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f, g_1, \ldots, g_m \in C^1(A)$ όπου $m < n$ και $\mathbf{x}_0 \in A$ τέτοιο ώστε τα διανύσματα*

$$\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \ldots, \nabla g_m(\mathbf{x}_0)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα[9].

Αν το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της $f(x_1, \ldots, x_n)$ υπό τις συνθήκες

$$g_1(\mathbf{x}) = 0, \ldots, g_m(\mathbf{x}) = 0$$

[9] όπως έχουμε ήδη αναφέρει αν $m = 1$ απλά υποθέτουμε ότι $\nabla g_1(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$

τότε υπάρχει ένα μοναδικό $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*) \in \mathbb{R}^m$ *τέτοιο ώστε το* $(\mathbf{x}_0, \lambda^*)$ *είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης Lagrange που αντιστοιχεί στις* $f, g_1, \ldots, g_m$.

Το παραπάνω θεώρημα ανάγει τον εντοπισμό των τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f υπό τις συνθήκες $g_1(\mathbf{x}) = 0, ..., g_m(\mathbf{x}) = 0$ στην εύρεση των κρίσιμων σημείων (όχι της f αλλά) της συνάρτησης Lagrange L που αντιστοιχεί στις $f, g_1, \ldots, g_m$ δηλαδή τελικά στην λύση του συστήματος (6.31). **Προσοχή όμως!** Αν τα διανύσματα $\nabla g_i(\mathbf{x}_0)$, $i = 1, \ldots, m$ δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητα, μπορεί να συμβεί ένα $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ να είναι τοπικό ακρότατο της f υπό τις συνθήκες $g_1(\mathbf{x}) = 0$, ..., $g_m(\mathbf{x}) = 0$, αλλά να μην υπάρχει $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε το $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda})$ να είναι κρίσιμο σημείο της L. (Δείτε σχετικά με αυτό το θέμα το Παράδειγμα 6.12).

Παραδειγμα 6.10. Βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = 4x^2 - y^2$ υπο την συνθήκη $x^2 + 2y^2 = 4$.

Λύση: Η συνθήκη γράφεται $g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4 = 0$. Έστω $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση Lagrange

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 4x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + 2y^2 - 4).$$

Αφού $\nabla g(x, y) = (g_x(x, y), g_y(x, y)) = (2x, 2y) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $g(x, y) = 0$, τα τοπικά ακρότατα της f υπό την συνθήκη $x^2 + 2y^2 = 4$ θα βρίσκονται στις λύσεις του συστήματος:

$$L_x(x, y, \lambda) = 8x + 2\lambda x = 0 \tag{6.34}$$

$$L_y(x, y, \lambda) = -2y + 4\lambda y = 0 \tag{6.35}$$

$$L_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \tag{6.36}$$

Από την (6.34) έχουμε

$$8x + 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 2x(4 + \lambda) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } \lambda = -4$$

και ομοίως απο την (6.37)

$$-2y + 4\lambda y = 0 \Leftrightarrow 2y(1 - 2\lambda) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } \lambda = 1/2 \tag{6.37}$$

(1) Έστω $x = 0$. Τότε η (6.36) δίνει

$$2y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 2 \Leftrightarrow y = -\sqrt{2} \text{ ή } y = \sqrt{2}$$

οπότε απο την (6.37) έχουμε ότι τα σημεία $(0, -\sqrt{2}, 1/2)$ και $(0, \sqrt{2}, 1/2)$ είναι λύσεις του συστήματος.

(2) Έστω $x \neq 0$. Τότε απο την (6.34) έχουμε $\lambda = -4$ και άρα η (6.37) δίνει αναγκαστικά $y = 0$. Αντικαθιστώντας στην (6.36) παίρνουμε

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 2$$

Άρα τα σημεία $(-2, 0, -4)$ και $(2, 0, -4)$ είναι λύσεις του συστήματος.

Οι παραπάνω τέσσερεις λύσεις είναι και όλες οι λύσεις αφού είτε $x = 0$ είτε $x \neq 0$. Άρα τα πιθανά τοπικά ακρότατα της f υπο την συνθήκη g είναι τα σημεία

$$(0, -\sqrt{2}),\ (0, \sqrt{2}),\ (-2, 0) \text{ και } (2, 0)$$

Έχουμε

$$f(0, -\sqrt{2}) = f(0, \sqrt{2}) = -2$$

και

$$f(-2,0) = f(2,0) = 16$$

Δεδομένου ότι τα σημεία $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $g_1(x,y) = 0$ αποτελούν μία έλλειψη E του $\mathbb{R}^2$ δηλαδή ένα συμπαγές υποσύνολο έχουμε ότι η f θα παρουσιάζει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο E. Άρα

$$\min\{f(x,y) : g(x,y) = 0\} = -2 \text{ και } \max\{f(x,y) : g(x,y) = 0\} = 16$$

Παραδειγμα 6.11. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 3$ έχει ενα ακριβώς τοπικό ακρότατο που ειδικότερα είναι ολικό ελάχιστο. Τι εκφράζει γεωμετρικά το σημείο αυτό;

Λύση: Η συνθήκη γράφεται $g(x,y,z) = x + y + z - 3 = 0$. Έστω $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση Lagrange

$$L(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(x + y + z - 3) = 0$$

Επειδή

$$\nabla g(x,y,z) = (1,1,1) \neq (0,0,0) \tag{6.38}$$

για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ τα τοπικά ακρότατα της $f(x,y,z)$ υπό την συνθήκη $g(x,y,z) = 0$ θα υπολογισθούν μέσω των κρίσιμων σημείων της $L(x,y,z,\lambda)$, δηλαδή μέσω των λύσεων του συστήματος

$$\begin{aligned}
L_x(x,y,z,\lambda) &= 2x + \lambda = 0 \\
L_y(x,y,z,\lambda) &= 2y + \lambda = 0 \\
L_z(x,y,z,\lambda) &= 2z + \lambda = 0 \\
L_\lambda(x,y,z) &= x + y + z - 3 = 0
\end{aligned}$$

Απο τις πρώτες τρείς εξισώσεις βλέπουμε ότι

$$x = y = z = \lambda/2$$

οπότε αντικαθιστώντας στην τρίτη εξίσωση παίρνουμε

$$\lambda = 2$$

Άρα το μοναδικό κρίσιμο σημείο της $L(x,y,z,\lambda)$ είναι το $(1,1,1,2)$ και άρα το μοναδικό πιθανό τοπικό ακρότατο της $f(x,y,z)$ υπό την συνθήκη $x + y + z = 3$ είναι το $\mathbf{x}_0 = (1,1,1)$. Ισχυριζόμαστε ότι το $\mathbf{x}_0$ είναι ολικό ελάχιστο της f υπό την συνθήκη $x + y + z = 3$, δηλαδή

$$x + y + z = 3 \Rightarrow f(x,y,z) \geq f(1,1,1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 3 \tag{6.39}$$

Πράγματι έστω $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ με $x + y + z = 3$. Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz έχουμε,

$$\begin{aligned}
3 = x + y + z = x \cdot 1 + y \cdot 1 + z \cdot 1 = (1,1,1) \cdot (x,y,z) &\leq \|(1,1,1)\| \cdot \|(x,y,z)\| \\
&= \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
&= \sqrt{3f(x,y,z)}
\end{aligned}$$

Οπότε $\sqrt{3} \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ και άρα η ανισότητα (6.39)ισχύει. Συνεπώς το $\mathbf{x}_0 = (1,1,1)$ είναι σημείο ολικού ελαχίστου της $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ υπο την συνθήκη

$x+y+z=3$. Γεωμετρικά, το σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι το πλησιέστερο στο $(0,0,0)$ σημείο του επιπέδου $x+y+z=3$.

Σημείωση: Το παράδειγμα 6.11 είχε λυθεί και με την μέθοδο της επίλυσης ως προς z της συνθήκης $x+y+z=3$ (Παράδειγμα 6.8 στην προηγούμενη παράγραφο).

Παραδειγμα 6.12. Δίνεται η καμπύλη $g(x,y)=(x-2)^2-(y-1)^3=0$ του $\mathbb{R}^2$.

(1) Δείξτε ότι το σημείο $(2,1)$ είναι το σημείο της καμπύλης που είναι το πλησιέστερο στο $(2,0)$.

(2) Διαπιστώστε ότι $\nabla g(2,1)=(0,0)$ και ότι το $(2,1)$ δεν μπορεί να εντοπισθεί με την μέθοδο των Πολλαπλασιαστών Lagrange.

Λύση: Η απόσταση ενός οποιουδήποτε σημείου $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ απο το $(2,0)$ δίνεται απο τον τύπο $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$ και ελαχιστοποιείται ή μεγιστοποιείται υπό οποιαδήποτε συνθήκη στα ίδια σημεία με την συνάρτηση $(x-2)^2+y^2$. Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να δείξουμε ότι το $(2,1)$ είναι το ολικό ελάχιστο της

$$f(x,y)=(x-2)^2+y^2$$

υπό την συνθήκη $g(x,y)=(x-2)^2-(y-1)^3=0$.

(1) Πράγματι, για κάθε σημείο (x,y) της καμπύλης $(x-2)^2-(y-1)^3=0$ ισχύει ότι

$$(y-1)^3=(x-2)^2\geq 0\Rightarrow (y-1)^3\geq 0\Rightarrow y-1\geq 0\Rightarrow y\geq 1$$

οπότε $f(x,y)=(x-2)^2+y^2\geq y^2\geq 1=f(2,1)$.

(2) Είναι άμεσο ότι

$$\nabla g(2,1)=(g_x(2,1),g_y(2,1))=(0,0)$$

Θεωρούμε την συνάρτηση Lagrange

$$L(x,y,\lambda)=(x-2)^2+y^2+\lambda\left((x-2)^2-(y-1)^3\right)$$

και επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{aligned}
L_x(x,y,\lambda)&=2(x-2)+2\lambda(x-2)=2(1+\lambda)(x-2)=0\\
L_y(x,y,\lambda)&=2y-3\lambda(y-1)^2=0\\
L_\lambda(x,y,\lambda)&=(x-2)^2-(y-1)^3=0
\end{aligned}$$

Απο την πρώτη εξίσωση έχουμε

$$x=2 \text{ ή } \lambda=-1$$

Αν $x=2$ τότε η τρίτη εξίσωση δίνει $y=1$ που όμως δεν ικανοποιεί την δεύτερη εξίσωση. Αν τώρα $\lambda=-1$, η δεύτερη εξίσωση γράφεται

$$2y+3(y-1)^2=0\Leftrightarrow 2y+3y^2-6y+3=0\Leftrightarrow 3y^2-4y+3=0$$

που είναι αδύνατη. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση, οπότε *η L δεν έχει κρίσιμα σημεία*. Το γεγονός ότι δεν μπορέσαμε να εντοπίσουμε το $\mathbf{x}_0=(2,1)$ με την μέθοδο Lagrange οφείλεται στο ότι η προυπόθεση $\nabla g(\mathbf{x}_0)\neq 0$ του Θεωρήματος 6.19 δεν ισχύει.

6.8. Το κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου υπό συνθήκες

Όπως και στην περίπτωση των ελευθέρων ακροτάτων υπάρχει αντίστοιχο κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για τοπικά ακρότατα υπό συνθήκες που είναι και αυτό ένας αριθμητικός αλγόριθμος για την ταξινόμηση των τοπικών ακροτάτων υπό συνθήκες. Στην προηγούμενη παράγραφο (Θεώρημα 6.19) είδαμε ότι αν το $\mathbf{x}_0$ είναι **τοπικό ακρότατο της** $f(\mathbf{x})$ **υπό τις συνθήκες** $g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0$ τότε το $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}^*)$ (όπου $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)$ το διάνυσμα με συντεταγμένες τους πολ/στές Lagrange) είναι **κρίσιμο** σημείο της συνάρτησης Lagrange

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n) \tag{6.40}$$

αρκεί τα $\nabla g_1(\mathbf{x}_0), \dots, \nabla g_m(\mathbf{x}_0)$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα ή ισοδύναμα ο $m \times n$ πίνακας $\left[\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right]$ να είναι βαθμού m.

Θυμίζουμε ότι στο Θεώρημα 6.9 προσδιορίσαμε τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία μέσω αριθμητικών σχέσεων που αφορούσαν υποορίζουσες του Εσσιανού πίνακα $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right]$ της f στο $\mathbf{x}_0$. Όπως θα δούμε με έναν αντίστοιχο τρόπο κατατάσονται και τα τοπικά ακρότατα και τα σαγματικά σημεία της f υπό τις συνθήκες $g_1(\mathbf{x}) = 0, \dots, g_m(\mathbf{x}) = 0$ χρησιμοποιώντας όμως τώρα ***τον Εσσιανό πίνακα όχι της*** $f(\mathbf{x})$ ***στο*** $\mathbf{x}_0$ ***αλλά της*** $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ ***στο*** $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}^*)$.

Για να διατυπώσουμε το εν λόγω κριτήριο χρειάζεται κάποια προετοιμασία. Πρώτα ας δούμε ποιός είναι ο Εσσιανός πίνακας της $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ σε ένα τυχόν $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}) \in A \times \mathbb{R}^m$.

Πρόταση 6.20. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f, g_1, \dots, g_m \in C^2(A)$ και $L : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση Lagrange που αντιστοιχεί στις $f, g_1, \dots, g_m$. Έστω $\mathbf{x}_0 \in A$ και $\boldsymbol{\lambda}_0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$. Έστω*

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^0 g_i(\mathbf{x})$$

και

$$G(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))$$

Τότε

$$L''(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = \begin{bmatrix} F''(\mathbf{x}_0) & G'(\mathbf{x}_0)^T \\ G'(\mathbf{x}_0) & \mathbf{0}_{mm} \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

όπου $F''(\mathbf{x}_0) = \left[F_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0)\right]$ είναι ο Εσσιανός πίνακας της F στο $\mathbf{x}_0$, $G'(\mathbf{x}_0) = \left[\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right]$ είναι η παράγωγος της G στο $\mathbf{x}_0$, $G'(\mathbf{x}_0)^T$ ο ανάστροφος του $G'(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{0}_{mm}$ ο $m \times m$ μηδενικός πίνακας.

Απόδειξη. Έχουμε τα εξής

(1) Για κάθε $i, j = 1, \dots, n$,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \sum_{r=1}^{m} \lambda_i^0 \frac{\partial g_r}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) \frac{\partial F}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$

(2) Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ και κάθε $j = 1, \ldots, n$,

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}^0) = \frac{\partial L}{\partial x_j \partial \lambda_i}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}^0) = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)$$

(3) Για κάθε $i, j = 1, \ldots, m$,

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}^0) = 0.$$

Η ισότητα (6.41) τώρα προκύπτει άμεσα απο τα παραπάνω (θεωρώντας τις μεταβλητές $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ στην L αντίστοιχα ως $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$). □

Συμβολισμος 6.1. Αν A είναι ένας πίνακας με $A|_{mk}$ θα συμβολίζουμε τον πίνακα που προκύπτει απο τον A αν κρατήσουμε τις m πρώτες γραμμές του και τις k πρώτες στήλες του.

Θεωρημα 6.21. ***(Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου υπό συνθήκες)*** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $f, g_1, \ldots, g_m \in C^2(A)$ και $L : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση Lagrange που αντιστοιχεί στις $f, g_1, \ldots, g_m$. Έστω $(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}^*)$ κρίσιμο σημείο της $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ τέτοιο ώστε $\operatorname{rank}\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)\right] = m$. Ορίζουμε $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* g_i(\mathbf{x})$, $G(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x}))$ και για κάθε $k = 1, \ldots, n+m$, θέτουμε*

$$\Delta_k = \det \begin{bmatrix} F''(\mathbf{x}_0)|_{kk} & (G'(\mathbf{x}_0)|_{mk})^T \\ G'(\mathbf{x}_0)|_{mk} & \mathbf{0}_{mk} \end{bmatrix}$$

Αν $\Delta_{n+m} \neq 0$ τότε,

(1) Αν $(-1)^m \Delta_k > 0$, για κάθε $k = m+1, \ldots, n$ τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου της f υπό τις συνθήκες $g_1(\mathbf{x}) = 0$, ..., $g_m(\mathbf{x}) = 0$.

(2) Αν $(-1)^k \Delta_k > 0$ για κάθε $k = m+1, \ldots, n$ τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο αυστηρού τοπικού μεγίστου της f υπό τις συνθήκες $g_1(\mathbf{x}) = 0$, ..., $g_m(\mathbf{x}) = 0$.

(3) Αν δεν συμβαίνει ούτε η (1) ούτε η (2) τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι σαγματικό σημείο της f υπό τις συνθήκες $g_1(\mathbf{x}) = 0$, ..., $g_m(\mathbf{x}) = 0$.

Παρατηρησεις 6.4. (1) Όπως και το αντίστοιχο κριτ΄ριο για τοπικά ακρότατα χωρίς συνθήκες όπου είχαμε την απροσδιόριστη περίπτωση της μηδενικής ορίζουσας του Εσσιανού πίνακα της f στο $\mathbf{x}_0$ έτσι και εδώ το Θεώρημα 6.21 δεν μπορεί να αποφανθεί όταν $\det H(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0$.

(2) Αν $m = 0$ (δεν υπάρχουν συνθήκες) τότε το Θεώρημα 6.21 καταλήγει στο αντίστοιχο κριτήριο για τα τοπικά ακρότατα χωρίς περιορισμούς (Θεώρημα 6.9).

(3) Μόνο οι $n - m$ ορίζουσες Δ_k, $k = m+1, \ldots, n$ παίζουν ρόλο στο Θεώρημα 6.21. Ειδικότερα, στην περίπτωση του τοπικού ελαχίστου (όπως και στην αντίστοιχη περίπτωση του κριτηρίου χωρίς συνθήκες) όλες οι ορίζουσες Δ_k είναι ομόσημες, απλά το πρόσημο εξαρτάται απο το αν το πλήθος των συνθηκών είναι άρτιο ή περριτό. Αντίστοιχα στην περίπτωση του τοπικού μεγίστου τα πρόσημα εναλλάσσονται.

Αν $m = n - 1$ (μέγιστο πλήθος συνθηκών) τότε έχουμε να ελέγξουμε μόνο το πρόσημο του Εσσιανού πίνακα $L''(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\lambda}^*)$ της L. Πχ. για $n = 2$ και $m = 1$ το Θεώρημα 6.21 δίνει το εξής.

Πορισμα 6.22. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f, g \in C^2(A)$ και $L : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση Lagrange*

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Έστω (x_0, y_0, λ^*) κρίσιμο σημείο της $L(x, y, \lambda)$ τέτοιο ώστε $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$. Θέτουμε

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda^* g(x, y)$$

και έστω

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} F_{xx}(x_0, y_0) & F_{xy}(x_0, y_0) & g_x(x_0, y_0) \\ F_{xy}(x_0, y_0) & F_{yy}(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) & 0 \end{bmatrix}$$

(1) Αν $\Delta < 0$ τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου της f υπό τις συνθήκες $g_1(\mathbf{x}) = 0$, ..., $g_{n-1}(\mathbf{x}) = 0$.

(2) Αν $\Delta > 0$ τότε το $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο αυστηρού τοπικού μεγίστου της f υπό τις συνθήκες $g_1(\mathbf{x}) = 0$, ..., $g_{n-1}(\mathbf{x}) = 0$.

Στην περίπτωση όπου $\Delta = 0$ το Πόρισμα 6.22 δεν μπορεί να αποφανθεί.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.21 ακολουθεί τις γραμμές της απόδειξης του αντίστοιχου κρτιτηρίου χωρίς συνθήκες (Θεώρημα 6.9) δηλαδή αποδεικνύεται πρώτα μια αναλυτική μορφή του (αντίστοιχη με αυτή του Θεωρήματος 6.11) και ύστερα εφαρμόζεται ένα ανάλογο του κριτηρίου Sylvester που διατυπώνουμε στην συνέχεια. Πρώτα δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμος 6.23. *Έσρω $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ μια τετραγωνική μορφή και $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ μη μηδενικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$.*

(1) Η τετραγωνική μορφή Q θα καλείται **θετικά ορισμένη υπό τις συνθήκες ορθογωνιότητας** $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ *αν*

$$Q(\mathbf{x}) > 0 \text{ για όλα τα } \mathbf{x} \neq 0 \text{ με } \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{x} = 0 \ i = 1, \ldots, m \tag{6.42}$$

(2) Η τετραγωνική μορφή Q θα καλείται **αρνητικά ορισμένη υπό τις συνθήκες ορθογωνιότητας** $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ *αν*

$$Q(\mathbf{x}) < 0 \text{ για όλα τα } \mathbf{x} \neq 0 \text{ με } \mathbf{b}^i \cdot \mathbf{x} = 0 \ i = 1, \ldots, m \tag{6.43}$$

Θεωρημα 6.24. ***(Κριτήριο του Mann)*** *Έστω $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ μια τετραγωνική μορφή΄ όπου $A = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$ συμμετρικός και έστω $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^n$ γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω B ο $m \times n$ πίνακας με γραμμές τα διανύσματα $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε $k = m+1, \ldots, n$ έστω*

$$\Delta_k = \det \begin{bmatrix} A|_{kk} & (B|_{mk})^T \\ B|_{mk} & \mathbf{0}|_{mk} \end{bmatrix} \tag{6.44}$$

(δείτε τον Συμβολισμό 6.1) Τότε,

(1) Η $Q(\mathbf{x})$ είναι θετικά ορισμένη υπό τις συνθήκες ορθογωνιότητας $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ αν και μόνο αν οι ορίζουσες $(-1)^m \Delta_k > 0$, για όλα τα $k = m+1, \ldots, n$.

(2) Η Q είναι αρνητικά ορισμένη υπό τις συνθήκες ορθογωνιότητας $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ αν και μόνο αν $(-1)^k \Delta_k > 0$ για κάθε $k = m+1, \ldots, n$.

Παρατηρηση 6.8. Μπορεί κανείς εύκολα να δεί τις αναλογίες μεταξύ του Θεωρήματος 6.21 και του Κριτηρίου του Mann. Όπως το Κριτήριο Sylvester προκύπτει απο το Κριτήριο Δεύτερης παραγώγου (Παρατήρηση 6.6) με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το Κριτήριο Mann είναι συνέπεια του Κριτηρίου Δεύτερης παραγώγου υπό συνθήκες.

Κεφάλαιο 7

Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Στο Κεφάλαιο αυτό θα εξετασθεί το πρόβλημα της επίλυσης μιας εξίσωσης

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{7.1}$$

ως προς μία απο τις μεταβλητές συναρτήσει των υπόλοιπων $n-1$ μεταβλητών.

7.1. Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Ας ξεκινήσουμε με κάποια συγκεκριμμένα παραδείγματα.

(1) Η πιο απλή εξίσωση της μορφής (7.1) είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών της μορφής

$$F(x, y) = ax + by - c = 0 \tag{7.2}$$

Τα σημεία $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την (7.2) αποτελούν μια ευθεία του $\mathbb{R}^2$. Εύκολα βλέπουμε ότι αν $b \neq 0$ τότε η (7.2) λύνεται ως προς την μεταβλητή y (και ομοίως αν $a \neq 0$ τότε λύνεται ως προς x).

(2) Η εξίσωση

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{7.3}$$

ικανοποιείτα ακριβώς στα σημεία του μοναδιαίου κύκλου του $\mathbb{R}^2$. Όπως εύκολα βλέπουμε για κάθε $x_0 \in (-1, 1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά y_1, y_2 με $F(x_0, y_1) = F(x_0, y_2) = 0$ και αντίστοιχα για κάθε $y_0 \in (-1, 1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά x_1, x_2 με $F(x_1, y_0) = F(x_2, y_0) = 0$. Συνεπώς η εξίσωση $x^2 + y^2 - 1 = 0$ δεν μπορεί να επιλυθεί πλήρως ως προς καμία απο τις μεταβλητές x, y. Όμως αν περιορίσουμε τα (x, y) με $F(x, y) = 0$ που θεωρούμε τότε μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$ ως προς μια μεταβλητή συναρτήσει της άλλης. Πχ. παρατηρούμε ότι ισχύει η εξής ισοδυναμία

$$F(x, y) = 0 \text{ και } y \geq 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$$

Ομοίως

$$F(x, y) = 0 \text{ και } x \leq 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{1 - y^2}, y \in [-1, 1]$$

Γενικά μπορούμε να δούμε ότι για κάθε (x_0, y_0) με $F(x_0, y_0) = 0$ υπάρχει πάντα ένα διάστημα I_0 που έχει το x_0 στο εσωτερικό του και ένα διάστημα J_0 που έχει το y_0 στο εσωτερικό του όπου μέσα στο ορθογώνιο $I_0 \times J_0 = \{(x, y) : x \in I_0,\ y \in J_0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$ είτε ως προς y είτε ως προς x. Πχ. Στο σημείο $(0, 1)$ η $F(x, y) = 0$ επιλύεται ως προς y ($y = \sqrt{1 - x^2}$) όταν περιοριστούμε στα (x, y) με $x \in [-1, 1]$ και $y \geq 0$.

Για ευκολία στα παρακάτω θεωρούμε την συνάρτηση F ως συνάρτηση $n+1$ μεταβλητών αντί για n. Κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^{n+1}$ θα το συμβολίζουμε με $(x_1, \ldots, x_n, y)$ ή

$(\mathbf{x}, y)$ όπου $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $y \in \mathbb{R}$. Η μεταβλητή y θα είναι η μεταβλητή ως προς την οποία σκοπεύουμε να λύσουμε την εξίσωση $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ συναρτήσει των $x_1, \ldots, x_n$.

Στα επόμενα με τον όρο ***περιοχή*** ενός σημείου $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ θα εννοούμε ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το $\mathbf{x}_0$ στο εσωτερικό του. Οι ανοικτές μπάλες κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας $r > 0$ αποτελούν τις ***βασικές περιοχές*** του $\mathbf{x}_0$. Είναι σχετικά εύκολο να δούμε ότι αν $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}$ και $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}$ περιοχές των $\mathbf{x}_0$ και y_0 αντίστοιχα, τότε το σύνολο

$$U \times V = \{(\mathbf{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in U \text{ και } y \in V\}$$

είναι μια περιοχή του $(\mathbf{x}_0, y)$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$, δηλαδή περιέχει το $\mathbf{x}_0$ στο εσωτερικό του[1].

Θεωρημα 7.1. ***(Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης)*** *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, ανοικτό, $F \in C^1(A)$ και $(\mathbf{x}_0, y_0) \in A$ με $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$. Αν $F_y(\mathbf{x}_0, y_0) \neq 0$ τότε υπάρχει μια περιοχή U του $\mathbf{x}_0$ και μια περιοχή V του y_0 τέτοιες ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in U$ υπάρχει μοναδικό $y \in V$ με την ιδιότητα $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Η συνάρτηση $f : U \to V$ που στέλνει κάθε $\mathbf{x} \in U$ στο μοναδικό $y \in V$ με $F(x, y) = 0$ είναι κλάσης C^1 και ισχύει ότι*

$$f_{x_i}(\mathbf{x}) = -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))}{F_y(\mathbf{x}, f(\mathbf{x}))} \tag{7.4}$$

για κάθε $\mathbf{x} \in U$ και $i = 1, \ldots, n$. Ειδικότερα,

$$f_{x_i}(\mathbf{x}_0) = -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x}_0, y_0)}{F_y(\mathbf{x}_0, y_0)} \tag{7.5}$$

Παρατηρησεις 7.1. (1) Ένα απλό παράδειγμα που επιβεβαιώνει την συνθήκη $F_y(\mathbf{x}, y) \neq 0$ για να λύνεται η F ως προς y είναι το εξής: Η εξίσωση

$$F(x_1, \ldots, x_n, y) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + by + c = 0$$

λύνεται ως προς y αν $b = F_y(\mathbf{x}, y) \neq 0$.

(2) Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση $y = f(\mathbf{x})$ που ορίζεται στο Θεώρημα 7.1 είναι μοναδική και επιλύει την εξίσωση $F(\mathbf{x}, y) = 0$ ως προς την μεταβλητή $\mathbf{x}$. Η επίλυση αυτή είναι ***τοπική*** στο $(\mathbf{x}_0, y)$ δηλαδή για κάθε $\mathbf{x} \in V$ εκφράζει το μονδικό y ***που ανήκει στην*** U και που μαζί με το $\mathbf{x}$ αποτελεί λύση της $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Εν γένει όμως μπορεί για κάποια ή και για όλα τα $\mathbf{x} \in U$ να υπάρχουν και άλλα y ***που δεν ανήκουν*** στην V τέτοια ώστε $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Πχ. αν $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ τότε για $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $U = (-1, 1)$ και $V = (0, 2)$ τότε $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Όμως για κάθε $x \in U$ το $(x, -\sqrt{1 - x^2})$ είναι επίσης μια λύση της $F(x, y) = 0$.

(3) Η συνάρτηση $f : U \to V$ συνήθως δεν δίνεται απο κάποιον κλειστό τύπο με στοιχειώδεις συναρτήσεις. Αυτό που γνωρίζουμε για την f είναι ότι είναι[2] κλά'σης C^1 και επιπλέον απο τον τύπο (7.5) τις μερικές της παραγώγους στο $\mathbf{x}_0$.

---

[1]Παρατηρείστε ότι δεν είναι όλες οι περιοχές του $(\mathbf{x}_0, y_0)$ αυτής της μορφής. Για παράδειγμα μια ανοικτή μπάλα κέντρου $(\mathbf{x}_0, y)$ δεν γράφεται υπο την μορφή $U \times V$ όπου U περιοχή του $\mathbf{x}_0$ και V περιοχή του y_0.

[2]Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι αν $F \in C^k(A)$ τότε και η f είναι $C^k(U)$.

(4) Ο τύπος (7.4) προκύπτει με τον κανόνα αλυσίδας:

$$F(\mathbf{x}, y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$$

(5) Επειδή η $f : U \to V$ είναι συνεχής (ως C^1) αποδεικνύεται ότι μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι η περιοχή U είναι μια ανοικτή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και κάποιας ακτίνας $r_1 > 0$ και η περιοχή V ένα ανοικτό διάστημα της μορφής $(y_0 - r_2, y_0 + r_2)$ για κάποιο $r_2 > 0$.

Παραδειγμα 7.1. Αποδείξτε ότι η εξίσωση

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$$

ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x, y)$ σε μια περιοχή του σημείου $(1, 1, 2)$. Επίσης υπολογίστε τις $z_x(1, 1)$ και $z_y(1, 1)$.

Λύση: Έχουμε

$$F_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz, \quad F_y(x, y, z) = 3y^2 - 3xy, \quad F_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

Άρα η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 1ης τάξης. Επιπλέον $F(1, 1, 2) = 0$ και $F_z(1, 1, 2) = 12 - 3 = 9 \neq 0$. Άρα απο το θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης, υπάρχει περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^2$ του $(1, 1)$ και περιοχή $V \subseteq \mathbb{R}$ του $z = 2$, ώστε για κάθε $(x, y) \in U$ υπάρχει μοναδικό $z = z(x, y) \in V$ τέτοιες ώστε $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Επίσης έχουμε

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}|_{z=z(x,y)}, \; z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y, z)}{F_z(x, y, z)}|_{z=z(x,y)}$$

και άρα (αφού $z(1, 1) = 2$),

$$z_x(1, 1) = -\frac{-3}{9} = 1/3, \; z_y(1, 1) = -\frac{-3}{9} = 1/3.$$

Παραδειγμα 7.2. Δίνεται η συνάρτηση $F(x, y, z) = z^5 + z - x^2 - y^2$.

(α) Δείξτε ότι η εξίσωση $F(x, y, z) = 0$ ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x, y) : U \to \mathbb{R}$ σε μια περιοχή U του σημείου $(0, 0)$ με $z(0, 0) = 0$. Υπολογίστε τις πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της $z = z(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$.

(β) Βρείτε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της $z = z(x, y)$ με κέντρο το $(0, 0)$. και κατόπιν υπολογίστε το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{z(x, y)}{x^2 + y^2}$.

Λύση: (α) Έχουμε $F_x(x, y, z) = -2x$, $F_y(x, y, z) = -2y$, $F_z(x, y, z) = 5z^4 + 1$ $F_{xx}(x, y, z) = -2$, $F_{yy}(x, y, z) = -2$, $F_{zz}(x, y, z) = 20z^3$, $F_{xy} = F_{yx} = 0$, $F_{yz} = F_{yz} = 0$ και $F_{zx} = F_{xz} = 0$. Άρα η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης, δηλαδή είναι C^2. Επειδή $F_z(x, y, z) = 5z^4 + 1 \neq 0$ για κάθε $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ έχουμε ότι σε κάθε (x_0, y_0, z_0) με $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ υπάρχει κατάλληλη περιοχή του $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ όπου η εξίσωση $f(x, y, z)$ λύνεται ως προς $z = z(x, y)$. Έχουμε

$$z_x(x, y) = -\frac{F_x(x, y)}{F_z(x, y)} = \frac{2x}{5z^4(x, y) + 1}, \quad z_y(x, y) = -\frac{F_y(x, y)}{F_z(x, y)} = \frac{2y}{5z^4(x, y) + 1}$$

$$z_{xx}(x,y) = \frac{2(5z^4(x,y)+1) - 40xz^3 z_x(x,y)}{(5z^4(x,y)+1)^2}$$

$$z_{yy}(x,y) = \frac{2(5z^4(x,y)+1) - 40yz^3 z_y(x,y)}{(5z^4(x,y)+1)^2}$$

$$z_{xy}(x,y) = \frac{-40xz^3 z_y(x,y)}{(5z^4(x,y)+1)^2}$$

Άρα $z_x(0,0) = z_y(0,0) = 0$, $z_{xx}(0,0) = z_{yy}(0,0) = 2$ και $z_{xy}(0,0) = 0$.

(β) Όπως γνωρίζουμε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της $z = z(x,y)$ με κέντρο το σημείο $(0,0)$ δίνεται απο τον τύπο

$$T_2(x,y) = z(0,0)+z_x(0,0)x+z_y(0,0)y+\frac{1}{2}\left[z_{xx}(0,0)x^2 + 2z_{xy}(0,0)xy + z_{yy}(0,0)y^2\right]$$

και άρα αντικαθιστώντας τις τιμές των μερικών παραγώγων παίρνουμε ότι

$$T_2(x,y) = x^2 + y^2$$

Απο το (δεύτερο) Θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$\lim_{x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

Οπότε,

$$\frac{z(x,y) - T_2(x,y)}{x^2+y^2} = \frac{z(x,y) - (x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{z(x,y)}{x^2+y^2} - 1$$

και συνεπώς

$$\lim_{x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y)}{x^2+y^2} = 1.$$

Παραδειγμα 7.3. Δίνεται η συνάρτηση $F(x,y,z) = z^3 + z - x^2 - y^2 - 2$.

(α) Βρείτε $z_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $F(0,0,z_0) = 0$ και δείξτε ότι η εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ ορίζει μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x,y) : U \to \mathbb{R}$ κλάσης C^2 σε μια περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^2$ του σημείου $(0,0)$ με $z(0,0) = z_0$. Υπολογίστε τις πρώτης και δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους της $z = z(x,y)$ στο σημείο $(0,0)$ και δείξτε ότι η $z(x,y)$ παρουσιάζει τοπικό ελαχιστο στο $(0,0)$.

(β) Γράψτε το πολυώνυμο Taylor $T_2(x,y)$ δεύτερης τάξης της $z = z(x,y)$ με κέντρο το $(0,0)$ και υπολογίστε το $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - z(0,0)}{x^2+y^2}$.

Λύση: Έχουμε

$$F(0,0,z) = z^3 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow z^3 - 1 + z - 1 = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+2) = 0$$

και άρα $z_0 = 1$. Επίσης η F είναι C^2 (ως πολυωνυμική), και $F_z(x,y,z) = 3z^2 + 1 \neq 0$ για κάθε $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ οπότε και $f(0,0,1) \neq 0$. Από οι προυποθέσεις του Θεωρήματος της Πεπλεγμένης Συνάρτησης πληρούνται, οπότε η εξίσωση $F(x,y,z) = 0$ ορίζει πεπλεγμένα μια μοναδική συνάρτηση $z = z(x,y) : U \to \mathbb{R}$ κλάσης C^2 σε μια περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}^2$ του σημείου $(0,0)$ με $z(0,0) = 1$.

Έχουμε $F_x(x,y,z) = -2x$, $F_y(x,y,z) = -2y$ και όπως είδαμε $F_z(x,y,z) = 3z^2+1$. Είναι

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y)}{F_z(x,y)} = \frac{2x}{3z^2+1}, \quad z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y)}{F_z(x,y)} = \frac{2y}{3z^2+1}$$

και άρα

$$z_{xx}(x,y) = \frac{2(3z^2+1) - 2x\cdot 6z\cdot z_x}{(3z^2+1)^2}$$

$$z_{yy}(x,y) = \frac{2(3z^2+1) - 2y\cdot 6z\cdot z_y}{(3z^2+1)^2}$$

$$z_{xy}(x,y) = \frac{-2x\cdot 6z\cdot z_y}{(3z^2+1)^2}$$

Άρα , επειδή $z(0,0)=1$, $z_x(0,0) = z_y(0,0) = 0$. Συνεπώς το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο για την $z = z(x,y)$. Επιπλέον, $z_{xx}(0,0) = z_{yy}(0,0) = 8/16 = 1/2$ και $z_{xy}(0,0) = 0$. Άρα $z_{xx}(0,0) > 0$ και $\Delta = z_{xx}(0,0)\cdot z_{yy}(0,0) - z_{xy}(0,0)^2 = 1/4 > 0$ και άρα, απο το Κτιτήριο δεύτερης μερικής παραγώγου, η $z(x,y)$ παρουσιάζει τοπικό ελαχιστο στο $(0,0)$.

(β) Όπως γνωρίζουμε το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της $z = z(x,y)$ με κέντρο σημείο $(0,0)$ δίνεται απο τον τύπο

$$T_2(x,y) = z(0,0) + z_x(0,0)x + z_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left(z_{xx}(0,0)x^2 + 2z_{xy}(0,0)xy + z_{yy}(0,0)y^2\right)$$

και άρα αντικαθιστώντας τις τιμές των μερικών παραγώγων παίρνουμε ότι

$$T_2(x,y) = 1 + \frac{1}{4}(x^2+y^2).$$

Απο το Θεώρημα Taylor έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - T_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - 1 - \frac{1}{4}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{z(x,y)-1}{x^2+y^2} - \frac{1}{4}\right] = 0$$

και συνεπώς αφού $z(0,0) = 1$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{z(x,y) - z(0,0)}{x^2+y^2} = \frac{1}{4}.$$

7.2. Γεωμετρικές Εφαρμογές

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε κάποιες γεωμετρικές εφαρμογές του Θεωρήματος 7.1. Αυτές αφορούν τη γεωμετρική δομή των συνόλων στάθμης μιας πραγματικής C^1- συνάρτησης n-μεταβλητών. Με τον όρο *σύνολο στάθμης μιας συνάρτησης* $g : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ εννοούμε τα σύνολα της μορφής

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = c\}$$

Παρατηρείστε ότι θέτοντας $F(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - c$ έχουμε

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = 0\}$$

άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c = 0$.

Θεωρημα 7.2. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ανοικτό, $F \in C^1(A)$ και*

$$S = \{\mathbf{x} \in A : F(\mathbf{x}) = 0\} \tag{7.6}$$

Τότε για κάθε $\mathbf{a} \in S$ με $\nabla F(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ υπάρχει περιοχή N του $\mathbf{a}$ τέτοια ώστε το σύνολο $S \cap N$ ταυτίζεται με το γράφημα μιας C^1 πραγματικής συνάρτησης n-μεταβλητών.

Αποδειξη. Αφού $\nabla F(\mathbf{a}) = \big(F_{x_1}(\mathbf{a}), \ldots, F_{x_{n+1}}(\mathbf{a})\big) \neq 0$ έπεται ότι $F_{x_i}(\mathbf{a}) \neq 0$ για ένα τουλάχιστον $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (με μία αναδιάταξη των μεταβλητών αν χρειάζεται) υποθέτουμε ότι $i = n+1$. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$. Απο το Θεώρημα 7.1 υπάρχει μια C^1 συνάρτηση $f : U \to V$, όπου U περιοχή του $(a_1, \ldots, a_n)$ και V περιοχή του a_{n+1} τέτοια ώστε

$$S \cap (U \times V) = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) : (x_1, \ldots, x_n) \in U \text{ και } x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

Θέτοντας $N = U \times V$ έχουμε το συμπέρασμα. □

Θεωρώντας το γράφημα μιας πραγματικής συνάρτησης n-μεταβλητών ως το βασικό μοντέλο αυτού που αποκαλούμε "*επιφάνεια του $\mathbb{R}^{n+1}$ διάστασης n*", το Πόρισμα 7.2 λέει ουσιαστικά ότι: *για κάθε $\mathbf{x} \in S$ με $\nabla F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ το S γύρω απο το $\mathbf{x}$ είναι μια επιφάνεια διάστασης n του $\mathbb{R}^{n+1}$*. Τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^{n+1}$ που έχουν αυτήν την ιδιότητα σε κάθε σημείο τους καλούνται *υποπολλαπλότητες του $\mathbb{R}^{n+1}$ διάστασης n*. Το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι και αυτό μια υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n+1}$ διάστασης n αφού γράφεται υπό την μορφή $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : F(\mathbf{x}) = 0\}$, όπου $F(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_{n+1} - f(x_1, \ldots, x_n)$.

Όπως έχουμε αναφέρει το γράφημα μιας C^1 συνάρτησης n-μεταβλητών επιδέχεται εφαπτόμενο επίπεδο σε κάθε σημείο του. Πιο συγκεκριμένα αν $\mathbf{x}_0 \in A$ τότε το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος της f στο $\mathbf{x}_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ είναι αυτό που έχει εξίσωση

$$x_{n+1} = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)(x_i - a_i)$$

Το εφαπτόμενο επίπεδο της $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : F(\mathbf{x}) = 0\}$ σε ένα $\mathbf{a} \in S$ ορίζεται να είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας με την οποία ταυτίζεται το S κοντά στο $\mathbf{a}$. Σχετικά έχουμε την εξής πρόταση.

Προταση 7.3. *Έστω $\mathbf{a} \in S$ με $\nabla F(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Τότε το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\mathbf{a}$ είναι το σύνολο*

$$E_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \nabla F(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0\} \tag{7.7}$$

Με άλλα λόγια το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\mathbf{a}$ είναι το κάθετο στο $\nabla F(\mathbf{a})$ επίπεδο (διάστασης n) του $\mathbb{R}^{n+1}$ που διέρχεται απο το $\mathbf{a}$.

Αποδειξη. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n+1})$. Αφού $\nabla F(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, από το Θεώρημα 7.2 υπάρχει μια μοναδική C^1 συνάρτηση $f : U \to V$, όπου U περιοχή του $(a_1, \ldots, a_n)$ και V περιοχή του a_{n+1} τέτοια ώστε το γράφημα της f είναι η τομή $S \cap (U \times V)$. Αφού

$f(a_1, \dots, a_n) = a_{n+1}$ και $f_{x_i}(a_1, \dots, a_n) = \dfrac{F_{x_i}(\mathbf{a})}{F_{x_{n+1}}(\mathbf{a})}$ (τύπος (7.5)) η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου του γραφήματος της f στο σημείο $(a_1, \dots, a_n)$ γράφεται

$$x_{n+1} = a_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{x_i}(\mathbf{a})}{F_{x_{n+1}}(\mathbf{a})}(x_i - a_i) \tag{7.8}$$

Με λίγες πράξεις είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η εξίσωση (7.8) δίνει την (7.7). □

Παραδειγμα 7.4. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της επιφάνειας

$$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$$

στο σημείο $(1, 1, 2)$.

Λύση: Έχουμε

$$F_x(x, y, z) = 3x^2 - 3yz, \quad F_y(x, y, z) = 3y^2 - 3xy, \quad F_z(x, y, z) = 3z^2 - 3xy.$$

Άρα η F έχει συνεχείς μερικές παραγώγους 1ης τάξης. Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της επιφάνειας $F(x, y, z) = 0$ στο σημείο $(1, 1, 2)$ δίδεται απο τον τύπο

$$\nabla F(1, 1, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 2) = 0$$

Επειδή

$$F_x(1, 1, 2) = -3, \ F_y(1, 1, 2) = -3, \ F_z(1, 1, 2) = 9$$

η εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned}
&\nabla F(1, 1, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 2) = 0 \Leftrightarrow \\
&F_x(1, 1, 2)(x - 1) + F_y(1, 1, 2)(y - 1) + F_z(1, 1, 2)(z - 2) = 0 \\
&\Leftrightarrow -3(x - 1) - 3(y - 1) + 9(z - 2) = 0 \Leftrightarrow \\
&x + y - 3z + 4 = 0.
\end{aligned}$$

Ορισμος 7.4. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ανοικτό, $F \in C^1(A)$ και $S = \{\mathbf{x} \in A : F(\mathbf{x}) = 0\}$. Έστω $\mathbf{a} \in S$ με $\nabla F(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$.*

(1) Ο γραμμικός υπόχωρος διάστασης n του $\mathbb{R}^{n+1}$ που είναι κάθετος στο $\nabla F(\mathbf{a})$, δηλαδή το σύνολο

$$T_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \nabla F(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

*καλείται **ο εφαπτόμενος χώρος της S στο $\mathbf{a}$**.*

(2) Ο γραμμικός υπόχωρος διάστασης 1 του $\mathbb{R}^{n+1}$ που παράγεται απο το $\nabla F(\mathbf{a})$, δηλαδή το σύνολο

$$N_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} = \lambda \nabla F(\mathbf{a}), \lambda \in \mathbb{R}\}$$

*καλείται **ο κάθετος χώρος της S στο $\mathbf{a}$**.*

Παρατηρείστε ότι $E_{\mathbf{a}} = T_{\mathbf{a}} + \mathbf{a}$ (δηλαδή το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο $\mathbf{a}$ είναι η μεταφορά κατά $\mathbf{a}$ του αντίστοιχου εφαπτόμενου χώρου. Επίσης $E_{\mathbf{a}}^{\perp} = N_{\mathbf{a}}$, δηλαδή το οπυογώνιο συμπλήρωμα (στον $\mathbb{R}^{n+1}$) του εφαπτόμενου χώρου είναι ο κάθετος χώρος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.5. *Έστω* $\mathbf{a} \in S$ *με* $\nabla F(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. *Τότε για κάθε παραγωγίσιμη καμπύλη* $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to S$ *με* $r(0) = \mathbf{a}$ *έχουμε*

$$\nabla F(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0 \tag{7.9}$$

δηλαδή το $\nabla F(\mathbf{a})$ *είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η συνάρτηση $f(t) = F(r(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι σταθερή μηδέν (αφού $F(\mathbf{x}) = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in S$) και άρα $f'(t) = 0$ γιακάθε $t \in \mathbb{R}$. Απο την άλλη μεριά απο τον Κανόνα Αλυσίδας έχουμε

$$f'(0) = \nabla F(r(0)) \cdot \mathbf{r}'(0) = \nabla F(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}'(0) \tag{7.10}$$

Άρα $\nabla F(\mathbf{a}) \cdot r'(0) = 0$. □

Παρατηρείστε ότι απο την Πρόταση 7.5 έχουμε ότι *αν* $\nabla F(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ *τότε το εφαπτόμενο διάνυσμα* $\mathbf{r}'(0)$ *μιας οποιασδήποτε παραγωγίσιμης καμπύλης* $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to S$ *με* $\mathbf{r}(0) = \mathbf{a}$ *περιέχεται στον εφαπτόμενο χώρο* $T_{\mathbf{a}}$ *της* S *στο* $\mathbf{a}$. Αποδεικνύεται με χρήση του Θεωρήματος 7.2 ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ισχύει το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 7.6. ***(Χαρακτηρισμός του Εφαπτόμενου Χώρου)*** *Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ *ανοικτό,* $F \in C^1(A)$ *και* $S = \{\mathbf{x} \in A : F(\mathbf{x}) = 0\}$. *Έστω* $\mathbf{a} \in S$ *με* $\nabla F(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. *Τότε,*

$$T_{\mathbf{a}} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} : \exists \mathbf{r} : \mathbb{R} \to S \text{ παραγωγίσιμη με } \mathbf{r}(0) = \mathbf{a} \text{ και } \mathbf{v} = \mathbf{r}'(0)\}$$

Είμαστε σε θέση τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα του Lagrange για μία συνθήκη.

ΠΟΡΙΣΜΑ 7.7. *(Θεώρημα 6.18 για* $m = 1$*) Έστω* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *ανοικτό και* $f, g \in C^1(A)$. *Έστω επίσης* $\mathbf{x}_0 \in A$ *τέτοιο ώστε* $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$. *Αν το* $\mathbf{x}_0$ *είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της* f *υπό την συνθήκη* $g(\mathbf{x}) = 0$ *τότε υπάρχει* $\lambda \in \mathbb{R}$ *τέτοιο ώστε*

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0) \tag{7.11}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathbf{x}_0$ είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της f υπό την συνθήκη $g(\mathbf{x}) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $f|_S$ όπου $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}$ έχει τοπικό ακρότατο στο $\mathbf{x}_0$. Το διάνυσμα $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ είναι εξ ορισμού το κάθετο διάνυσμα στον $T_{\mathbf{x}_0}$. Συνεπώς τα $\nabla g(\mathbf{x}_0)$ και $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν το $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ είναι και αυτό κάθετο στο $T_{\mathbf{x}_0}$ που απο το Θεώρημα 7.6 σημαίνει ότι αν $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to S$ παραγωγίσιμη καμπύλη στο S με $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}_0$ τότε $\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{r}'(0) = 0$. Πράγματι, η f στο S έχει τοπικό μέγιστο στο $\mathbf{x}_0$ και άρα η συνάρτηση $h(t) = f(\mathbf{r}(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει τοπικό μέγιστο στο $t = 0$. Συνεπώς $h'(0) = 0$. Απο την άλλη μεριά απο τον κανόνα αλυσίδας έχουμε $h'(0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{r}'(0)$ και το ζητούμενο έπεται. □