Κεφάλαιο 8

Διαδικασίες Poisson

8.1 Εισαγωγή

Σ΄ αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε τις διαδικασίες Poisson και θα μελετήσουμε τις βασικές τους ιδιότητες. Οι διαδικασίες αυτές είναι ίσως οι απλούστερες μη τετριμμένες διαδικασίες συνεχούς χρόνου. Οι τροχιές τους αυξάνουν στους ακεραίους και οι χρόνοι που μεσολαβούν ανάμεσα σε διαδοχικές αυξήσεις είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές. Οι διαδικασίες αυτές είναι ένα καλό μοντέλο για διακριτές αφίξεις τυχαίων συμβάντων σε συνεχή χρόνο, όπως π.χ. οι κλήσεις που δέχεται το τηλεφωνικό κέντρο του ΕΚΑΒ, οι διασπάσεις των πυρήνων ενός ραδιενεργού υλικού, οι αφίξεις φωτονίων σε μια φωτοδίοδο, τα αιτήματα που δέχεται ένας εξυπηρετητής και πολλά άλλα. Υπάρχουν πολλά καλά βιβλία στα οποία μπορεί να βρει κανείς μια εισαγωγή στις διαδικασίες Poisson, μερικά απ΄ αυτά είναι το [1] και το [7]

8.2 Ορισμός και ιδιότητες

Συνήθως σ΄ αυτό το βιβλίο περιγράφουμε εξαρχής μια στοχαστική διαδικασία μέσω των κατανομών πεπερασμένης διάστασης. Σ΄ αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μια εξαίρεση. Θα δώσουμε πρώτα έναν κατασκευαστικό, διαισθητικό ορισμό για τις διαδικασίες Poisson και στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τις κατανομές πεπερασμένης διάστασης.

Φανταστείτε ότι επαναλαμβάνετε ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p και σημειώνετε τις επιτυχείς δοκιμές. Ανάμεσά τους μεσολαβεί ένας τυχαίος αριθμός προσπαθειών, που ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p. Αν σε μια μονάδα φυσικού χρόνου προλαβαίνετε να κάνετε ν δοκιμές, τότε ο ρυθμός με τον οποίο έρχονται επιτυχίες είναι νp. Ας κάνουμε ξανά το πείραμα, αυτή τη φορά όμως ας κάνουμε τις δοκιμές με διπλάσια ταχύτητα αλλά με τη μισή πιθανότητα επιτυχίας. Αυτή τη φορά οι προσπάθειες που μεσολαβούν ανάμεσα σε διαδοχικές επιτυχίες είναι στατιστικά περισσότερες, αφού ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $p/2$. Επειδή όμως στη μονάδα του χρόνου κάνουμε διπλάσιες προσπάθειες, ο ρυθμός με τον οποίο σημειώνονται επιτυχίες στον πραγματικό χρόνο θα παραμείνει νp. Μπορούμε να συνεχίσουμε να πολλαπλασιάζουμε την ταχύτητα με την οποία εκτελούμε τις δοκιμές και να μειώνουμε αντίστοιχα την πιθανότητα επιτυχίας μας. Αν κάνουμε $N\nu$ δοκιμές ανά μονάδα χρόνου με πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε δοκιμή p/N, τότε καθώς το N μεγαλώνει, θα μεσολαβούν όλο και περισσότερες προσπάθειες ανάμεσα σε διαδοχικές επιτυχίες. Επειδή όμως και το πλήθος των προσπάθειων που προλαβαίνουμε να κάνουμε ανά μονάδα χρόνου μεγαλώνει ανάλογα, ο ρυθμός με τον οποίον σημειώνονται επιτυχίες σε πραγματικό χρόνο δεν θα αλλάξει. Στο όριο καθώς το $N \to \infty$, ο πραγματικός χρόνος ανάμεσα με διαδοχικές επιτυχίες ακολουθεί εκθετική κατανομή και η διαδικασία που μετρά τις επιτυχίες μας στον πραγματικό χρόνο είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό νp.

Ας θεωρήσουμε έναν χώρο πιθανότητας Ω, στον οποίο είναι ορισμένη μια ακολουθία $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ από ανεξάρτητες, εκθετικές, τυχαίες μεταβλητές, με παράμετρο λ. Επομένως,

$$\mathbb{P}\big[E_j > t\big] = e^{-\lambda t}, \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Μια καθοριστική ιδιότητα που έχουν οι εκθετικές τυχαίες μεταβλητές είναι η *ιδιότητα της απώλειας μνήμης* (memoryless property). Για κάθε $s, t \geq 0: \ \mathbb{P}\big[E_j > t+s \,\big|\, E_j > t\big] = \mathbb{P}\big[E_j > s\big]$. Ορίζουμε ακόμα

$$S_0 = 0 \quad \text{και } S_n = S_{n-1} + E_n, \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

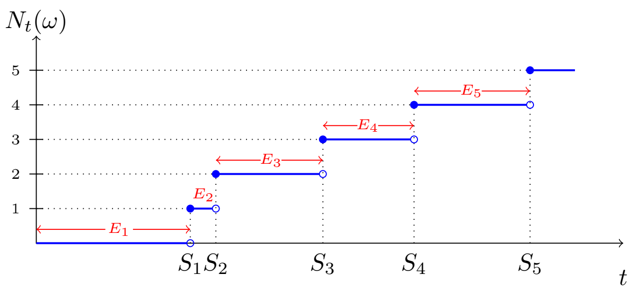
Οι μεταβλητές $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ μοντελοποιούν τον χρόνο ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις, οπότε οι μεταβλητές $\{S_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ είναι οι χρόνοι στους οποίους αυτές οι αφίξεις συμβαίνουν. Η διαδικασία Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ με ρυθμό λ μετρά πόσες τέτοιες αφίξεις έχουν συμβεί μέχρι την εκάστοτε χρονική στιγμή, δηλαδή

$$N_t(\omega) = \sup\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k(\omega) \leq t\}, \quad t \geq 0, \omega \in \Omega. \tag{8.1}$$

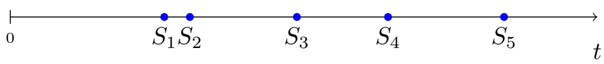
Μπορούμε επίσης να γράψουμε ισοδύναμα ότι

$$N_t(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{1}\{S_k(\omega) \leq t\}, \quad t \geq 0, \omega \in \Omega. \tag{8.2}$$

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η αρχή μιας τυπικής τροχιάς διαδικασίας Poisson.



Εφόσον τα άλματα μιας διαδικασίας Poisson έχουν μέγεθος 1, μπορούμε να αναπαραστήσουμε μια τροχιά της δίνοντας απλά τα χρονικά σημεία $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στα οποία η διαδικασία αυξάνει. Για παράδειγμα, μπορούμε να αναπαραστήσουμε την προηγούμενη τυπική τροχιά και ως εξής.



Θεώρημα 31 Η διαδικασία Poisson της (8.1) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.

1. Οι τροχιές της είναι αύξουσες, δηλαδή $0 \leq t_1 \leq t_2 \Rightarrow N_{t_1}(\omega) \leq N_{t_2}(\omega)$.

2. $\mathbb{P}\big[N_t \in \mathbb{X} = \mathbb{N}_0, \ \text{ για κάθε } t \geq 0\big] = 1$.

3. Οι τροχιές της είναι δεξιά συνεχείς.

4. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ η διαδικασία $\{\tilde{N}_t\}_{t\geq 0}$ με $\tilde{N}_t = N_{S_m+t} - m$ είναι κι αυτή μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και είναι ανεξάρτητη από τις $E_1, \ldots, E_m$.

Απόδειξη: Από τον ορισμό της διαδικασίας Poisson είναι προφανές ότι οι τροχιές της είναι αύξουσες, αφού, αν $0 \le t_1 \le t_2$, τότε

$$\{k \in \mathbb{N}_0 : S_k(\omega) \le t_1\} \subset \{k \in \mathbb{N}_0 : S_k(\omega) \le t_2\}.$$

Για την (2) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{P}\big[N_t < +\infty, \text{ για κάθε } t \ge 0\big] = \mathbb{P}\big[\bigcap_{t\ge 0}\{N_t < +\infty\}\big] = 1. \tag{8.3}$$

Έχουμε όμως ότι

$$\{S_k \to \infty\} \subset \bigcap_{t\ge 0}\{N_t < +\infty\}.$$

Πράγματι, αν $\omega \in \{S_k \to \infty\}$, για κάθε $t \ge 0$ υπάρχει ένα $k_0(\omega, t)$ τέτοιο ώστε $S_k(\omega) > t$ για όλα τα $k > k_0(\omega, t)$. Επομένως, $N_t(\omega) \le k_0(\omega, t)$ και ειδικότερα $N_t(\omega) < +\infty$. Από τον νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε ότι

$$\mathbb{P}\big[S_n/n \to 1/\lambda\big] = \mathbb{P}\big[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E_j \to 1/\lambda\big] = 1,$$

επομένως $\mathbb{P}\big[S_k \to \infty\big] = 1$, απ' όπου προκύπτει η (8.3).

Για την (3) προσέξτε ότι, αν για κάποιο $\omega \in \Omega,\ t \ge 0$ είχαμε ότι $N_{t+}(\omega) \ne N_t(\omega)$, τότε θα έπρεπε να υπάρχει κάποιο $k \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε

$$N_t(\omega) = k \text{ και } N_{t+\frac{1}{n}}(\omega) \ge k+1, \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Όμως $N_t(\omega) = k \Rightarrow S_{k+1}(\omega) > t$, ενώ $N_{t+\frac{1}{n}}(\omega) \ge k+1$ για κάθε $n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow S_{k+1}(\omega) \le t + \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα έπρεπε επομένως

$$S_{k+1}(\omega) \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \big(t, t+\frac{1}{n}\big] = \emptyset.$$

Θα δείξουμε τέλος την (4), η οποία συνεπάγεται ότι μια διαδικασία Poisson ξαναγεννιέται μετά από κάθε άλμα της και το μέλλον της είναι ανεξάρτητο του παρελθόντος της. Η ιδέα είναι ότι μετά το m-οστό άλμα της, η διαδικασία μετρά τις αφίξεις που υπαγορεύονται από τις $E_{m+1}, E_{m+2}, \ldots$. Συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} N_{S_m+t} &= \sup\{k \in \mathbb{N} : S_k \le S_m + t\} = \sup\{k \in \mathbb{N} : \sum_{j=m+1}^{k} E_j \le t\} \\ &= \sup\{k \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{k-m} E_{j+m} \le t\} = m + \sup\{r \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{r} E_{j+m} \le t\}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\tilde{N}_t = \sup\{r \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{r} E_{j+m} \le t\}.$$

Όμως οι $E_{m+1}, E_{m+2}, \ldots$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, εκθετικές, τυχαίες μεταβλητές με παράμετρο λ και είναι ανεξάρτητες από τις $E_1, \ldots, E_m$, οπότε το ζητούμενο προκύπτει από τον ορισμό της διαδικασίας Poisson. $\square$

Θα υπολογίσουμε τώρα τις κατανομές πεπερασμένης διάστασης της $\{N_t\}_{t\ge 0}$. Θα ξεκινήσουμε από τις μονοδιάστατες κατανομές.

Λήμμα 10 Για κάθε $t \geq 0$ η τυχαία μεταβλητή N_t ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό λt.

Απόδειξη: Για $k = 0$ έχουμε $\mathbb{P}[N_t = 0] = \mathbb{P}[E_1 > t] = e^{-\lambda t}$. Για $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mathbb{P}[N_t = k] = \mathbb{P}[S_k \leq t,\ S_{k+1} > t] = \mathbb{P}[S_k \leq t] - \mathbb{P}[S_k \leq t,\ S_{k+1} \leq t] = \mathbb{P}[S_k \leq t] - \mathbb{P}[S_{k+1} \leq t]. \tag{8.4}$$

Εφόσον όμως οι $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες, με $E_j \sim exp(\lambda) = G(\lambda, 1)$, έχουμε ότι

$$S_k = \sum_{j=1}^{k} E_j \sim G(\lambda, k)$$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της είναι η

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}, & \text{αν } x \geq 0 \\ 0, & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Επομένως, η (8.4) γίνεται

$$\mathbb{P}[N_t = k] = \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-\lambda x}\, dx - \int_0^t \frac{\lambda^{k+1}}{k!} x^k e^{-\lambda x}\, dx = \left[\frac{\lambda^k}{k!} x^k e^{-\lambda x}\right]_0^t = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

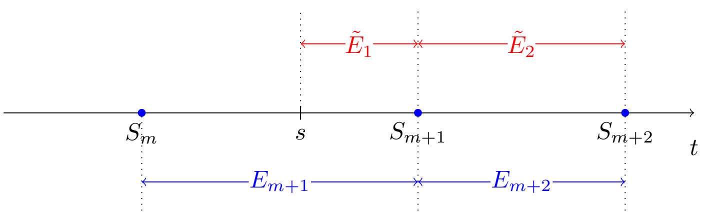
Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $N_t \sim Po(\lambda t)$. □

Θα δούμε στη συνέχεια ότι η διαδικασία Poisson έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα.

Λήμμα 11 Έστω $\{N_t\}_{t\geq 0}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Για κάθε $s \geq 0$ και κάθε $m \in \mathbb{N}_0$, με δεδομένο ότι $N_s = m$, η διαδικασία $\{\tilde{N}_t\}_{t\geq 0}$ με τύπο $\tilde{N}_t = N_{s+t} - N_s$ είναι ομοίως μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και είναι ανεξάρτητη από τις τυχαίες μεταβλητές $E_1, \ldots, E_m$.

Απόδειξη: Παρατηρήστε ότι η διαδικασία $\{\tilde{N}_t\}_{t\geq 0}$ μετρά τις αφίξεις μετά τη χρονική στιγμή s. Με δεδομένο ότι $N_s = m$, οι χρόνοι ανάμεσα στα διαδοχικά άλματα της $\{\tilde{N}_t\}_{t\geq 0}$ είναι

$$\tilde{E}_1 = S_{m+1} - s, \quad \tilde{E}_2 = E_{m+2}, \ldots, \tilde{E}_k = E_{m+k}, \ldots$$



Το ενδεχόμενο ως προς το οποίο δεσμεύουμε $\{N_s = m\} = \{S_m \leq s,\ S_{m+1} > s\}$ εξαρτάται μόνο από τις $E_1, \ldots, E_{m+1}$. Επομένως, με δεδομένο το $\{N_s = m\}$, οι $\tilde{E}_2, \tilde{E}_3, \ldots$ συνεχίζουν να είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, εκθετικές τυχαίες μεταβλητές, με παράμετρο λ και να είναι ανεξάρτητες από τις $E_1, \ldots, E_m$ αλλά και την $\tilde{E}_1$ που εξαρτάται μόνο από τις $E_1, \ldots, E_{m+1}$. Μένει να δείξουμε πως, δεδομένου ότι $N_s = m$, η $\tilde{E}_1$ είναι ανεξάρτητη από τις $E_1, \ldots, E_m$ και ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Θεωρήστε ένα ενδεχόμενο $B = \{(E_1, \ldots, E_m) \in F \subset \mathbb{R}^m\}$ που εξαρτάται μόνο από τις $E_1, \ldots, E_m$. Χρειάζεται να δείξουμε ότι

$$\mathbb{P}[\{\tilde{E}_1 > t\} \cap B \mid N_s = m] = e^{-\lambda t}\, \mathbb{P}[B \mid N_s = m], \quad \text{για κάθε } t \geq 0.$$

Παρατηρήστε τώρα ότι $\tilde{E}_1 = S_{m+1} - s = S_m + E_{m+1} - s$ και $\{N_s = m\} = \{S_m \le s,\, S_m + E_{m+1} > s\}$. Επομένως για κάθε $t \ge 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[\{\tilde{E}_1 > t\} \cap B \,\big|\, N_s = m\big] &= \mathbb{P}\big[\{E_{m+1} + S_m > t + s\} \cap B \,\big|\, S_m \le s, E_{m+1} + S_m > s\big] \\ &= \frac{\mathbb{P}\big[\{E_{m+1} + S_m > t + s,\, S_m \le s\} \cap B\big]}{\mathbb{P}\big[N_s = m\big]}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Ας συμβολίσουμε με $g : \mathbb{R}^m \to [0, \infty)$ την από κοινού πυκνότητα πιθανότητας των $E_1, \ldots, E_m$. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα ότι η E_{m+1} είναι ανεξάρτητη από τις $E_1, \ldots, E_m$ για να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[\{E_{m+1} + S_m > t + s, S_m \le s\} \cap B\big] &= \int_{F \cap \{\sum_{i=1}^m t_i \le s\}} g(t_1, \ldots, t_m) \mathbb{P}\big[E_{m+1} > t + s - \sum_{i=1}^m t_i\big] dt_1 \cdots dt_m \\ &= e^{-\lambda t} \int_{F \cap \{\sum_{i=1}^m t_i \le s\}} g(t_1, \ldots, t_m) \mathbb{P}\big[E_{m+1} > s - \sum_{i=1}^m t_i\big] dt_1 \cdots dt_m \\ &= e^{-\lambda t}\, \mathbb{P}\big[\{E_{m+1} + S_m > s,\, S_m \le s\} \cap B\big] \\ &= e^{-\lambda t} \mathbb{P}\big[B \cap \{N_s = m\}\big],\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προέκυψε από την απώλεια μνήμης της εκθετικής κατανομής. Το ζητούμενο έπεται τώρα άμεσα από την (8.5). □

Θεώρημα 32 (μαρκοβιανή ιδιότητα) Έστω $\{N_t\}_{t \ge 0}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Για κάθε $s \ge 0$ η διαδικασία $\{\tilde{N}_t\}_{t \ge 0}$ με τύπο $\tilde{N}_t = N_{s+t} - N_s$ είναι ομοίως μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και είναι ανεξάρτητη από τις $\{N_r\}_{0 \le r \le s}$.

Απόδειξη: Χρειάζεται να δείξουμε ότι αν $\tilde{A}$ είναι ένα ενδεχόμενο της μορφής $\{\tilde{N}_{t_1} = m_1, \ldots, \tilde{N}_{t_k} = m_k\}$ όπου $k \in \mathbb{N}_0$, $t_1, \ldots, t_k \ge 0$ και $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}_0$ και B είναι ένα ενδεχόμενο της μορφής $\{N_{r_1} = n_1, \ldots, N_{r_j} = n_j\}$ όπου $j \in \mathbb{N}_0$, $r_1, \ldots, r_j \in [0, s]$ και $n_1, \ldots, n_j \in \mathbb{N}_0$, τότε $\mathbb{P}\big[\tilde{A} \cap B\big] = \mathbb{P}\big[A\big]\, \mathbb{P}\big[B\big]$, όπου $A = \{N_{t_1} = m_1, \ldots, N_{t_k} = m_k\}$. Αυτό θα μας εξασφαλίσει άμεσα ότι η $\{\tilde{N}_t\}_{t \ge 0}$ είναι ανεξάρτητη από τις $\{N_r\}_{0 \le r \le s}$. Επιπλέον, παίρνοντας $j = 0 \Leftrightarrow B = \Omega$ θα μας εξασφαλίσει επίσης ότι

$$\mathbb{P}\big[\tilde{A}\big] = \mathbb{P}\big[A\big] \Leftrightarrow \mathbb{P}\big[\tilde{N}_{t_1} = m_1, \ldots, \tilde{N}_{t_k} = m_k\big] = \mathbb{P}\big[N_{t_1} = m_1, \ldots, N_{t_k} = m_k\big]$$

και επομένως ότι η $\{\tilde{N}_t\}_{t \ge 0}$ έχει τις κατανομές πεπερασμένης διάστασης μιας διαδικασίας Poisson με ρυθμό λ. Από τον τύπο της ολικής πιθανότητας έχουμε ότι

$$\mathbb{P}\big[\tilde{A} \cap B\big] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}\big[\tilde{A} \cap B \,\big|\, N_s = m\big] \mathbb{P}\big[N_s = m\big]. \tag{8.6}$$

Παρατηρήστε τώρα ότι στο το ενδεχόμενο $\{N_s = m\}$ έχουμε

$$N_r = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}\{S_k \le r\}, \quad \text{για κάθε } r \le s.$$

Αυτό συμβαίνει γιατί γνωρίζοντας ότι $N_s = m$ μπορούμε να περιορίσουμε το άθροισμα στη σχέση (8.2) στους m πρώτους όρους. Από το Λήμμα 11 έχουμε ότι δεδομένου ότι $N_s = m$, η $\{\tilde{N}_t\}_{t \ge 0}$ είναι ανεξάρτητη από τις $E_1, \ldots, E_m$. Επομένως, δεδομένου ότι $N_s = m$, η $\{\tilde{N}_t\}_{t\ge 0}$ θα είναι ανεξάρτητη και από τις $\{N_r\}_{0\le r\le s}$ και η (8.6) θα γίνει

$$\mathbb{P}[\tilde{A} \cap B] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}[\tilde{A} \,|\, N_s = m] \mathbb{P}[B \,|\, N_s = m] \mathbb{P}[N_s = m]. \tag{8.7}$$

Από το Λήμμα 11 έχουμε ακόμα πως, δεδομένου ότι $N_s = m$, η $\{\tilde{N}_t\}_{t\ge 0}$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Επομένως, $\mathbb{P}\big[\tilde{A} \,\big|\, N_s = m\big] = \mathbb{P}\big[A\big]$ και η (8.7) δίνει πράγματι ότι $\mathbb{P}\big[\tilde{A} \cap B\big] = \mathbb{P}\big[A\big]\,\mathbb{P}\big[B\big]$. □

Πόρισμα 12 Η διαδικασία Poisson έχει ανεξάρτητες και χρονικά ομοιογενείς προσαυξήσεις. Συγκεκριμένα, για κάθε $s, t \ge 0$ η προσαύξηση $N_{t+s} - N_s$ είναι ανεξάρτητη από τις προηγούμενες τιμές της διαδικασίας και ακολουθεί την ίδια κατανομή όπως η N_t, δηλαδή $Po\big(\lambda t\big)$.

Θα δούμε τώρα πώς η πληροφορία που περιέχεται στο προηγούμενο πόρισμα καθορίζει τις κατανομές πεπερασμένης διάστασης της $\{N_t\}_{t\ge 0}$.

Θεώρημα 33 Έστω $t_0 = 0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n$. Για οποιουσδήποτε ακέραιους $k_0 = 0 \le k_1 \le k_2 \le \cdots \le k_n$ έχουμε

$$\mathbb{P}\big[N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n\big] = e^{-\lambda t_n} \lambda^{k_n} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(t_{i+1} - t_i)^{k_{i+1}-k_i}}{(k_{i+1} - k_i)!}. \tag{8.8}$$

Από το Θεώρημα 32 έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[N_{t_1} = k_1, \ldots, N_{t_n} = k_n\big] &= \mathbb{P}\big[N_{t_1} = k_1,\, N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1, \cdots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}\big] \\
&= \mathbb{P}\big[N_{t_1} = k_1\big]\mathbb{P}\big[N_{t_2} - N_{t_1} = k_2 - k_1\big] \cdots \mathbb{P}\big[N_{t_n} - N_{t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}\big] \\
&= \mathbb{P}\big[N_{t_1} = k_1\big]\mathbb{P}\big[N_{t_2 - t_1} = k_2 - k_1\big] \cdots \mathbb{P}\big[N_{t_n - t_{n-1}} = k_n - k_{n-1}\big] \\
&= \prod_{i=0}^{n-1} e^{-\lambda(t_{i+1}-t_i)} \frac{\big(\lambda(t_{i+1} - t_i)\big)^{k_{i+1}-k_i}}{(k_{i+1} - k_i)!} \\
&= e^{-\lambda t_n} \lambda^{k_n} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{(t_{i+1} - t_i)^{k_{i+1}-k_i}}{(k_{i+1} - k_i)!}.
\end{aligned}$$

Πόρισμα 13 Αν μια διαδικασία $\{N_t\}_{t\ge 0}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις με $N_{s+t} - N_s \sim Po(\lambda t)$, τότε η $\{N_t\}_{t\ge 0}$ έχει την κατανομή μιας διαδικασίας Poisson με ρυθμό λ.

Απόδειξη: Είδαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 33 ότι μια διαδικασία $\{N_t\}_{t\ge 0}$ η οποία έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις με $N_{s+t} - N_s \sim Po(\lambda t)$ έχει τις κατανομές πεπερασμένης διάστασης που φαίνονται στη σχέση (8.8). Επομένως έχει τις ίδιες κατανομές πεπερασμένης διάστασης με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Ο ισχυρισμός έπεται από το γεγονός ότι οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης καθορίζουν την κατανομή μιας στοχαστικής διαδικασίας. □

Προκειμένου να καταλάβουμε διαισθητικά τη σχέση (8.8) ας θυμηθούμε την πολυωνυμική κατανομή, την οποία μάλλον έχετε συναντήσει σε κάποιο εισαγωγικό μάθημα Πιθανοτήτων. Η πολυωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n, p_1, \ldots, p_m$ είναι μια διακριτή κατανομή σε m διαστάσεις με σ.μ.π.

$$p(n_1, \ldots, n_m) = \binom{n}{n_1, \ldots, n_m} p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}, \qquad n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}_0,$$

όπου
$$\binom{n}{n_1,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1!\cdots n_m!}, \qquad \text{αν } n_1+\cdots+n_m = n,$$
και μηδέν, αν $n_1+\cdots+n_m \neq n$. Εμφανίζεται φυσικά όταν μελετάμε την κατανομή σφαιρών σε κελιά. Συγκεκριμένα, αν τοποθετήσουμε n σφαίρες σε m κελιά, και επιλέγουμε το κελί i με πιθανότητα p_i ανεξάρτητα για κάθε σφαίρα, τότε η πιθανότητα να τοποθετηθούν n_1 σφαίρες στο κελί $1,\ldots,n_m$ σφαίρες στο κελί m είναι ίση με $p(n_1,\ldots,n_m)$.

Μπορούμε τώρα να παρατηρήσουμε, διαιρώντας τα δύο μέλη της (8.8) με $\mathbb{P}\big[N_{t_n}=k_n\big] = e^{-\lambda t_n}\frac{(\lambda t_n)^{k_n}}{k_n!}$, ότι
$$\mathbb{P}\big[N_{t_1}=k_1,\ldots,N_{t_n}=k_n \,\big|\, N_{t_n}=k_n\big] = \binom{k_n}{k_1,k_2-k_1,\ldots,k_n-k_{n-1}} \prod_{i=0}^{n-1}\left(\frac{t_{i+1}-t_i}{t_n}\right)^{k_{i+1}-k_i}.$$
Επομένως, δεδομένου του πλήθους των αφίξεων k_n στο διάστημα $(0,t_n]$, οι αφίξεις που σημειώθηκαν στα διαστήματα
$$I_1=(0,t_1], I_2=(t_1,t_2], I_3=(t_2,t_3],\ldots,I_n=(t_{n-1},t_n]$$
ακολουθούν πολυωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας για κάθε διάστημα $p_k=\frac{t_k-t_{k-1}}{t_n}$, ίση δηλαδή με το κλάσμα του μήκους του διαστήματος I_k στο συνολικό μήκος t_n. Με διαφορετικά λόγια, δεδομένου ότι μέχρι τη χρονική στιγμή t_n είχαμε k_n αφίξεις, η κατανομή αυτών των αφίξεων στα διαστήματα $I_1,I_2,\ldots,I_n$ είναι ίδια όπως αν τοποθετούσαμε τις k_n αφίξεις ανεξάρτητα και ομοιόμορφα στο διάστημα $(0,t_n]$. Αυτό ακριβώς είναι το περιεχόμενο του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 34 Έστω $\{N_t\}_{t\geq 0}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων λ. Δεδομένου ότι $N_t=n$, οι χρόνοι $S_1,S_2,\ldots,S_n$, στους οποίους η διαδικασία Poisson αλλάζει κατάσταση, ακολουθούν την ίδια κατανομή όπως μια διατεταγμένη n-άδα σημείων, ομοιόμορφα επιλεγμένων στο $(0,t]$. Συγκεκριμένα, έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που δίνεται από την
$$g(s_1,s_2,\ldots,s_n) = n!\,t^{-n}\mathbb{1}\{0\leq s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_n\leq t\}. \tag{8.9}$$
Απόδειξη: Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του διανύσματος $E=(E_1,E_2,\ldots,E_n,E_n+1)$ είναι η
$$f(t_1,t_2,\ldots,t_n,t_{n+1}) = \lambda^{n+1}e^{-(\lambda t_1+\cdots+\lambda t_{n+1})}\mathbb{1}\{t_1,\cdots,t_{n+1}\geq 0\}.$$
Αν ορίσουμε $S=(S_1,S_2,\ldots,S_n,S_{n+1})$, έχουμε ότι $S=\Phi(E)$, όπου
$$\Phi(t_1,\ldots,t_{n+1}) = (t_1,t_1+t_2,\ldots,t_1+\cdots+t_{n+1}), \qquad (t_1,\ldots,t_{n+1})\in\mathbb{R}_+^{n+1}.$$
Ο γραμμικός μετασχηματισμός Φ έχει ορίζουσα 1 και ο αντίστροφός του Φ^{-1} δίνεται από την
$$\Phi^{-1}(s_1,\ldots,s_{n+1}) = (s_1,s_2-s_1,\ldots,s_{n+1}-s_n), \qquad 0\leq s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_{n+1}.$$
Επομένως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του S είναι
$$f(s_1,s_2-s_1,\ldots,s_{n+1}-s_n) = \lambda^{n+1}e^{-\lambda s_{n+1}}\mathbb{1}\{0\leq s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_{n+1}\}.$$
Έχουμε τώρα ότι για κάθε Borel σύνολο $A\subset\mathbb{R}^n$
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[(S_1,\ldots,S_n)\in A, N_t=n\big] &= \mathbb{P}\big[(S_1,\ldots,S_n)\in A, S_n\leq t, S_{n+1}>t\big]\\ &= \lambda^{n+1}\int_A\int_t^\infty e^{-\lambda s_{n+1}}\mathbb{1}\{0\leq s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_n\leq t\}ds_{n+1}ds_1\cdots ds_n\\ &= \lambda^n e^{-\lambda t}\int_A \mathbb{1}\{0\leq s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_n\leq t\}ds_1\cdots ds_n.\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 10 έχουμε όμως ότι $\mathbb{P}\big[N_t = n\big] = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$. Επομένως,

$$\mathbb{P}\big[(S_1, \ldots, S_n) \in A \,\big|\, N_t = n\big] = \int_A n! t^{-n}\, \mathbb{1}\{0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_n \le t\}\, ds_1 \cdots ds_n.$$

Η παραπάνω σχέση σημαίνει ακριβώς ότι η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $S_1, \ldots, S_n$, δεδομένου ότι $N_t = n$, είναι η g της (8.9). Θα δείξουμε τώρα ότι η g είναι επίσης η πυκνότητα της μιας διατεταγμένης κατά μέγεθος n-άδας ανεξάρτητων, ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, t]$.

Έστω $U_1, \ldots, U_n$ ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες, τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0, t]$. Αν $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \mapsto \{1, 2, \ldots, n\}$ είναι μια μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$, θα συμβολίζουμε με πU το διάνυσμα $(U_{\pi(1)}, U_{\pi(2)}, \ldots, U_{\pi(n)})$. Θα συμβολίζουμε επίσης με S το σύνολο των μεταθέσεων του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$. Επειδή η ομοιόμορφη κατανομή είναι συνεχής, με πιθανότητα 1 οι $U_1, \ldots, U_n$ θα λαμβάνουν διαφορετικές τιμές. Επομένως θα υπάρχει μια μοναδική μετάθεση $\pi^<$ για την οποία ισχύει

$$U_{\pi^<(1)} \le U_{\pi^<(2)} \le \cdots \le U_{\pi^<(n)}.$$

Φυσικά η μετάθεση $\pi^<$ για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση είναι τυχαία, αφού εξαρτάται από την πραγματοποίηση των $U_1, \ldots, U_n$. Θα δείξουμε τώρα ότι το τυχαίο διάνυσμα

$$\pi^< U = (U_{\pi^<(1)}, \ldots, U_{\pi^<(n)}),$$

το οποίο είναι η μετάθεση του διανύσματος $U = (U_1, \ldots, U_n)$ που τοποθετεί τις συντεταγμένες του διανύσματος U σε αύξουσα διάταξη, έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την g της (8.9). Πράγματι, αν A είναι ένα σύνολο Borel του $[0, t]^n$, θα έχουμε

$$\mathbb{P}\big[\pi^< U \in A\big] = \sum_{\pi \in S} \mathbb{P}\big[\pi^< U \in A,\, \pi^< = \pi\big] = \sum_{\pi \in S} \mathbb{P}\big[\pi U \in A,\, \pi^< = \pi\big].$$

Επειδή για κάθε $\pi \in S$ τα διανύσματα πU και U έχουν την ίδια κατανομή (οι συντεταγμένες τους είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές στο $[0, t]$), οι πιθανότητες στο παραπάνω άθροισμα είναι όλες ίσες, δηλαδή

$$\mathbb{P}\big[\pi U \in A,\, \pi^< = \pi\big] = \mathbb{P}\big[U \in A,\, \pi^< = id\big], \qquad \forall \pi \in S,$$

όπου $id \in S$ είναι η ταυτοτική μετάθεση $id(1) = 1, \ldots, id(n) = n$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[\pi^< U \in A\big] &= |S|\, \mathbb{P}\big[U \in A,\, \pi^< = id\big] = n! \mathbb{P}\big[U \in A,\, U_1 \le U_2 \le \cdots \le U_n\big] \\ &= \int \cdots \int_A n!\, t^{-n} \mathbb{1}\{0 \le s_1 \le s_2 \le \cdots \le s_n \le t\} ds_1 \cdots ds_n,\end{aligned}$$

δηλαδή το διάνυσμα $\pi^< U$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την g. □

Το διαισθητικό συμπέρασμα του Θεωρήματος 34 είναι ότι, με δεδομένο ότι σε ένα χρονικό διάστημα $[0, t]$ έχουμε n αφίξεις μιας διαδικασίας Poisson, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε την κατανομή των χρόνων άφιξης επιλέγοντας τυχαία (ανεξάρτητα και ομοιόμορφα) n σημεία στο διάστημα $[0, t]$.

Προσέξτε ότι το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από τον ρυθμό των αφίξεων της διαδικασίας. Ο ρυθμός επηρεάζει οπωσδήποτε το πλήθος των αφίξεων μέχρι τη στιγμή t. Με δεδομένο όμως το πλήθος των αφίξεων, ο ρυθμός δεν έχει καμία άλλη πληροφορία για το πώς κατανέμονται αυτές οι αφίξεις στο διάστημα $[0, t]$. Όπως είδαμε, αρκεί να τις τοποθετήσουμε τυχαία σ' αυτό το διάστημα.

Σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα, θα μπορούσαμε να προσομοιώσουμε ένα μονοπάτι μιας διαδικασίας Poisson με ρυθμό λ στο χρονικό διάστημα $[0, t]$ ως εξής. Αρχικά επιλέγουμε το πλήθος των αφίξεων που θα τοποθετήσουμε συνολικά σ' αυτό το διάστημα. Από το Λήμμα 10 το πλήθος των αφίξεων στο διάστημα $[0,t]$ ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο λt. Έχοντας επιλέξει το πλήθος των αφίξεων n, επιλέγουμε ομοιόμορφα και ανεξάρτητα n σημεία στο $[0,t]$. Αυτά είναι και τα σημεία που θα κάνει άλμα κατά 1 το μονοπάτι της διαδικασίας Poisson.

Παράδειγμα 50 Τα τηλεφωνήματα που δέχεται το ΕΚΑΒ μεταξύ 6 το πρωί και 12 το μεσημέρι είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 10/ώρα. Αν από τις 6 μέχρι τις 9 έγιναν δέκα τηλεφωνήματα, ποια είναι η πιθανότητα να έγινε ένα ακριβώς την πρώτη ώρα;

Αν $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι η διαδικασία που μετρά τα τηλεφωνήματα μετά τις 6, ψάχνουμε για την

$$\mathbb{P}\big[N_s = 1 \,\big|\, N_t = 10\big],$$

όπου s =1 ώρα και t = 3 ώρες. Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα με δύο τρόπους. Εκμεταλλευόμενοι τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις της διαδικασίας έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\big[N_s = 1 \,\big|\, N_t = 10\big] &= \frac{\mathbb{P}\big[N_s = 1,\, N_t = 10\big]}{\mathbb{P}\big[N_t = 10\big]} = \frac{\mathbb{P}\big[N_s = 1,\, N_t - N_s = 9\big]}{\mathbb{P}\big[N_t = 10\big]}\\ &= \frac{e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^1}{1!}e^{-\lambda(t-s)}\frac{\big(\lambda(t-s)\big)^9}{9!}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{10}}{10!}} = 10\times 2^9\times 3^{-10}.\end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα θα μπορούσαμε να φτάσουμε και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 34. Δεδομένου ότι έχουμε 10 τηλεφωνήματα, αυτά κατανέμονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα στο διάστημα $(0,t]$. Έχουμε λοιπόν 10 ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας (να συμβούν κατά την πρώτη ώρα) ίση με $s/t = 1/3$. Το πλήθος των επιτυχιών σ' αυτές τις δοκιμές ακολουθεί διωνυμική κατανομή bin(10,1/3), επομένως

$$\mathbb{P}\big[N_s = 1 \,\big|\, N_t = 10\big] = \binom{10}{1}\big(\frac{1}{3}\big)^1\big(\frac{2}{3}\big)^9.$$

Σκεφτείτε τώρα την πολυπλοκότητα των δύο μεθόδων, αν θέλαμε να βρούμε την πιθανότητα να έχουμε ακριβώς μία άφιξη από τις δέκα, στα πρώτα είκοσι δευτερόλεπτα κάθε λεπτού. Ο πρώτος τρόπος μάλλον δεν είναι ελκυστικός, ο δεύτερος τρόπος όμως μας δίνει εύκολα ότι η απάντηση παραμένει ίδια!

Παράδειγμα 51 Ένας φωτεινός σηματοδότης επιτρέπει τη διέλευση πεζών από μια διασταύρωση τα πρώτα 10 δευτερόλεπτα κάθε λεπτού. Οι πεζοί φτάνουν στη διασταύρωση ως μια διαδικασία Poisson. Αν σε διάστημα μιας ώρας έφτασαν στη διασταύρωση 500 πεζοί, ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα το πολύ 90 από αυτούς να διέσχισαν τη διασταύρωση χωρίς να χρειαστεί να περιμένουν;

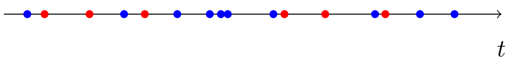
Σύμφωνα με το Θεώρημα 34 οι χρόνοι άφιξης των 500 πεζών έχουν την ίδια κατανομή όπως 500 ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $[0,T]$, όπου T = 60min. Επομένως, για καθέναν από αυτούς η πιθανότητα να έφτασε στο σηματοδότη κάποια στιγμή που η ένδειξη του σηματοδότη ήταν πράσινη είναι ίση με το ποσοστό του χρόνου που η ένδειξη του σηματοδότη ήταν πράσινη στη διάρκεια μιας ώρας, δηλαδή $\frac{1}{6}$. Το πλήθος N των πεζών που έφτασαν στη διασταύρωση κάποια στιγμή που ένδειξη του σηματοδότη ήταν πράσινη και τη διέσχισαν χωρίς να χρειαστεί να περιμένουν ακολουθεί λοιπόν διωνυμική κατανομή bin(500,1/6). Εφόσον $500\times\frac{1}{6}\geq 10$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση από το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα ώστε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα

$$\mathbb{P}\big[N\leq 90\big] = \mathbb{P}\Big[\frac{N-500\times\frac{1}{6}}{\sqrt{500\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\leq\frac{90-500\times\frac{1}{6}}{\sqrt{500\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\Big]\simeq\Phi\big(\frac{4}{5}\big)\simeq 0,78814.$$

8.3 Πρόσθεση και εκλέπτυνση

Σ' αυτήν την παράγραφο θα δούμε δύο χρήσιμους χειρισμούς, στους οποίους μπορούμε να υποβάλλουμε διαδικασίες Poisson και το αποτέλεσμα είναι πάλι μια διαδικασία Poisson, την πρόσθεση ανεξάρτητων διαδικασιών και την *εκλέπτυνση* (thinning).

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια πραγματοποίηση των χρόνων άφιξης δύο ανεξάρτητων διαδικασιών Poisson $\{X_t\}_{t\geq 0}$ (με ρυθμό 2 σε μπλε χρώμα) και $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ (με ρυθμό 1 σε κόκκινο χρώμα).



Το πρώτο αποτέλεσμα που θα δείξουμε έχει να κάνει με τη διαδικασία των αφίξεων που βλέπουμε, αν αγνοήσουμε το χρώμα τους.

Θεώρημα 35 Αν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ και $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ είναι δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ και μ αντίστοιχα, τότε η διαδικασία $\{N_t\}_{t\geq 0}$ με $N_t = X_t + Y_t$, είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda + \mu$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Πόρισμα 13, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε s, t με $0 \leq s \leq t$, η τυχαία μεταβλητή $N_t - N_s$ είναι ανεξάρτητη από τις $\{N_r\}_{0\leq r\leq s}$ και ακολουθεί κατανομή $Po\big((\lambda+\mu)(t-s)\big)$. Έχουμε όμως

$$N_t - N_s = (X_t - X_s) + (Y_t - Y_s).$$

Η $X_t - X_s$ είναι ανεξάρτητη από τις $\{X_r\}_{0\leq r\leq s}$, αφού η $\{X_t\}_{t\geq 0}$ είναι διαδικασία Poisson. Επίσης είναι ανεξάρτητη από τις $\{Y_r\}_{0\leq r\leq s}$, αφού οι διαδικασίες που προσθέτουμε είναι ανεξάρτητες. Επομένως, η $X_t - X_s$ είναι ανεξάρτητη από τις $\{N_r\}_{0\leq r\leq s}$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι και η $Y_t - Y_s$ είναι ανεξάρτητη από τις $\{N_r\}_{0\leq r\leq s}$. Επομένως η $\{N_t\}_{t\geq 0}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Σχετικά με την κατανομή της $N_t - N_s$, προσέξτε ότι η $X_t - X_s$ ακολουθεί κατανομή $Po\big(\lambda(t-s)\big)$, η $Y_t - Y_s$ ακολουθεί κατανομή $Po\big(\mu(t-s)\big)$, ενώ οι $X_t - X_s$ και $Y_t - Y_s$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, το άθροισμά τους ακολουθεί κατανομή Poisson με ρυθμό το άθροισμα των δύο ρυθμών, δηλαδή $(\lambda+\mu)(t-s)$. $\square$

Παρατήρηση: Το παραπάνω Θεώρημα γενικεύεται εύκολα με επαγωγή, σε αθροίσματα n ανεξάρτητων διαδικασιών Poisson. Το άθροισμά τους είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό το άθροισμα των επί μέρους ρυθμών.

Το επόμενο Θεώρημα περιγράφει την κατανομή του πλήθους των αφίξεων κάθε είδους, με δεδομένο τον συνολικό αριθμό αφίξεων.

Θεώρημα 36 Αν $\{X_t^{(i)}\}_{t\geq 0}, i = 1, 2, \ldots, m$ είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_i, i = 1, 2, \ldots, m$ και $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι το άθροισμά τους, τότε για κάθε $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$ έχουμε

$$\mathbb{P}\big[X_t^{(1)} = k_1, \ldots X_t^{(m)} = k_m \big| N_t = n\big] = \binom{n}{k_1, \ldots, k_m} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^{k_m}, \tag{8.10}$$

όπου $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$. Επομένως, αν ξέρουμε τον συνολικό αριθμό αφίξεων σε κάποιο διάστημα, μπορούμε να ανακατασκευάσουμε το είδος των αφίξεων αποδίδοντας κάθε άφιξη στο είδος i με πιθανότητα $p_i = \lambda_i/\lambda$.

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε τον ισχυρισμό όταν $k_1+\cdots+k_m=n$, αφού διαφορετικά και τα δυο μέλη της (8.10) είναι ίσα με μηδέν. Από το Θεώρημα 35 η διαδικασία $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Από την ανεξαρτησία των διαδικασιών $\{X_t^{(i)}\}_{t\geq 0}$ και το Λήμμα 10 έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[X_t^{(1)}=k_1,\ldots,X_t^{(m)}=k_m \,\big|\, N_t=n\big] &= \frac{\mathbb{P}\big[X_t^{(1)}=k_1,\ldots X_t^{(m)}=k_m\big]}{\mathbb{P}\big[N_t=n\big]} \\
&= \frac{\mathbb{P}\big[X_t^{(1)}=k_1\big]\cdots\mathbb{P}\big[X_t^{(m)}=k_m\big]}{\mathbb{P}\big[N_t=n\big]} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^{k_1}}{k_1!}\cdots e^{-\lambda_m t}\frac{(\lambda_m t)^{k_m}}{k_m!}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}} \\
&= \frac{n!}{k_1!\cdots k_m!}\frac{\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_m^{k_m}}{\lambda^n} \\
&= \binom{n}{k_1,\ldots,k_m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^{k_m}.
\end{aligned}$$

Για να δείξουμε τον τελευταίο ισχυρισμό, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το δεξί μέλος της τελευταίας σχέσης είναι η σ.μ.π. της πολυωνυμικής κατανομής με παραμέτρους $n,p_1,\ldots,p_m$. □

Πόρισμα 14 Αν $\{X_t^{(i)}\}_{t\geq 0}, i=1,2,\ldots,m$ είναι ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\lambda_i, i=1,2,\ldots,m$ και $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι το άθροισμά τους, τότε

$$\mathbb{P}\big[X_t^{(i)}=k \,\big|\, N_t=n\big]=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^{n-k},$$

όπου $\lambda=\lambda_1+\cdots,\lambda_m$. Επομένως, με δεδομένο τον συνολικό αριθμό αφίξεων n σε ένα διάστημα, οι αφίξεις του είδους i ακολουθούν διωνυμική κατανομή $\mathrm{bin}(n,\frac{\lambda_i}{\lambda})$.

Απόδειξη: Θεωρήστε τη διαδικασία $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ με $Y_t=\sum_{j\neq i}X_t^{(j)}$, η οποία είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\mu=\sum_{j\neq i}\lambda_j=\lambda-\lambda_i$ (Θεώρημα 35) και είναι ανεξάρτητη από την $\{X_t^{(i)}\}_{t\geq 0}$. Η (8.10) δίνει ότι

$$\mathbb{P}\big[X_t^{(i)}=k \,\big|\, N_t=n\big]=\mathbb{P}\big[X_t^{(i)}=k, Y_t=n-k \,\big|\, N_t=n\big]=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda}\right)^{n-k}.$$

□

Παράδειγμα 52 Ένα Τμήμα Επειγόντων Περιστατικών εφημερεύει μόνο για παθολογικά, χειρουργικά και καρδιολογικά περιστατικά. Τα παθολογικά περιστατικά καταφτάνουν όπως μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda=1/10$min, τα χειρουργικά περιστατικά όπως μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\mu=1/15$min, ενώ τα καρδιολογικά περιστατικά όπως μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\nu=1/30$min. Οι τρεις διαδικασίες είναι ανεξάρτητες. Αν 20 λεπτά μετά την έναρξη της εφημερίας είχαν προσέλθει 6 ασθενείς, ποια είναι οι πιθανότητα να είχαμε 2 ασθενείς από κάθε είδος περιστατικού; Αν κατά τη διάρκεια της εφημερίας εμφανίστηκαν 300 ασθενείς, ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να υπήρχαν ανάμεσά τους τουλάχιστον 50 καρδιολογικά περιστατικά;

Οι συνολικές αφίξεις στο Τμήμα Επειγόντων είναι επομένως μια διαδικασία Poisson $\{N_t\}_{t\geq 0}$ με ρυθμό $\lambda+\mu+\nu$=1/5min. Από το Θεώρημα 36 έχουμε ότι

$$\mathbb{P}\big[\Pi_t=2, X_t=2, K_t=2 \,\big|\, N_t=6\big]=\frac{6!}{(2!)^3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{72}.$$

Από το Πόρισμα 14, με δεδομένο ότι κατά τη διάρκεια της εφημερίας εμφανίστηκαν 300 ασθενείς, το πλήθος K_T των καρδιολογικών περιστατικών ακολουθεί διωνυμική κατανομή $\mathrm{bin}(300, \frac{1}{6})$. Επομένως,

$$\mathbb{P}\big[K_T \geq 50 \,\big|\, N_T = 300\big] = \sum_{k=50}^{300} \binom{300}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{300-k}.$$

Μπορούμε να εκτιμήσουμε το άθροισμα αυτό χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής με βάση το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα. Συγκεκριμένα,

$$\mathbb{P}\big[K_T \geq 50 \,\big|\, N_T = 300\big] = \mathbb{P}\Big[\frac{K_T - 300 \times \frac{1}{6}}{\sqrt{300 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}} \geq 0 \,\Big|\, N_T = 300\Big] \simeq 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

□

Παράδειγμα 53 Στο προηγούμενο παράδειγμα, υπολογίστε την πιθανότητα το πρώτο περιστατικό που θα εμφανιστεί στην εφημερία να είναι παθολογικό.

Έστω X, Y, Z οι χρόνοι αναμονής μέχρι την άφιξη του πρώτου παθολογικού, χειρουργικού ή καρδιολογικού περιστατικού, αντίστοιχα. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X \leq Y\} \cap \{X \leq Z\} = \{X \leq Y \wedge Z\}$. Μπορούμε να κάνουμε τον υπολογισμό απ΄ ευθείας, χρησιμοποιώντας την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y, Z. Μπορούμε όμως και να παρατηρήσουμε ότι η $Y \wedge Z$ είναι εκθετική με ρυθμό $\mu + \nu$. Πράγματι,

$$\mathbb{P}\big[Y \wedge Z > t\big] = \mathbb{P}\big[\{Y > t\} \cap \{Z > t\}\big] = \mathbb{P}\big[Y > t\big]\mathbb{P}\big[Z > t\big] = e^{-\mu t}e^{-\nu t} = e^{-(\mu+\nu)t}.$$

Αυτό θα έπρεπε να το περιμένουμε. Η $Y \wedge Z$ είναι ο χρόνος αναμονής μέχρι την πρώτη άφιξη της διαδικασίας $\{X_t + K_t\}_{t \geq 0}$, η οποία σύμφωνα με το Θεώρημα 35 είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\mu + \nu$.

Εφόσον οι Y, Z είναι ανεξάρτητες από την X, οι $Y \wedge Z$ και X θα είναι επίσης ανεξάρτητες. Επομένως,

$$\mathbb{P}\big[X \leq Y \wedge Z\big] = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \int_x^\infty (\mu+\nu)e^{-(\mu+\nu)v}\, dv\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\nu)x}\, dx = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\nu} = \frac{1}{2}.$$

Αντίστοιχα, η πιθανότητα το πρώτο περιστατικό να είναι χειρουργικό είναι $\frac{\mu}{\lambda+\mu+\nu} = \frac{1}{3}$ και η πιθανότητα το πρώτο περιστατικό να είναι καρδιολογικό είναι $\frac{\nu}{\lambda+\mu+\nu} = \frac{1}{6}$.

Θα μπορούσαμε άραγε να ισχυριστούμε ότι *κάθε* περιστατικό που εμφανίζεται είναι παθολογικό, χειρουργικό ή καρδιολογικό με πιθανότητα $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ και $\frac{1}{6}$ αντίστοιχα, ανεξάρτητα από τα άλλα περιστατικά; Κάτι τέτοιο υποδεικνύει και το περιεχόμενο του Θεωρήματος 36. Θα μπορούσαμε πράγματι να το ισχυριστούμε, αν γενικεύαμε το Θεώρημα 32 ώστε να εξασφαλίσουμε την *ισχυρή* μαρκοβιανή ιδιότητα για τον χρόνο διακοπής $T = X \wedge Y \wedge Z$. Η άφιξη του δεύτερου ασθενούς είναι η πρώτη άφιξη μετά τον χρόνο T, οπότε το πρόβλημα της δεύτερης άφιξης ανάγεται στο πρόβλημα που μόλις λύσαμε, ενώ μπορούμε να επεκτείνουμε τον παραπάνω συλλογισμό επαγωγικά. Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε χρησιμοποιώντας την έννοια της εκλέπτυνσης μιας διαδικασίας Poisson, με την οποία θα ασχοληθούμε τώρα. □

Ορισμός: Η p-εκλέπτυνση μιας διαδικασίας Poisson $\{N_t\}_{t \geq 0}$ είναι η διαδικασία αφίξεων που προκύπτει αν διαγράψουμε κάθε άφιξη της $\{N_t\}_{t \geq 0}$ με πιθανότητα $1 - p$ ανεξάρτητα από τις άλλες αφίξεις και τη διαδικασία $\{N_t\}_{t \geq 0}$.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την εκλέπτυνση ας κάνουμε το ακόλουθο νοητικό πείραμα. Θα θεωρήσουμε μια ακολουθία $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $\mathrm{Bernoulli}(p)$, που είναι ανεξάρτητες από τη διαδικασία αφίξεων $\{N_t\}_{t \geq 0}$ και θα χρωματίσουμε την i-οστή άφιξη κόκκινη, αν $X_i = 1$, ή μπλε, αν $X_i = 0$. Η διαδικασία που περιγράφει τις κόκκινες αφίξεις είναι μια p-εκλέπτυνση της $\{N_t\}_{t\geq 0}$. Το πλήθος των κόκκινων αφίξεων μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι $\sum_{i=1}^{N_t} X_i$. Αντίστοιχα, η διαδικασία που περιγράφει τις μπλε αφίξεις είναι μια $(1-p)$-εκλέπτυνση της $\{N_t\}_{t\geq 0}$ και το πλήθος των μπλε αφίξεων μέχρι τη χρονική στιγμή t είναι $\sum_{i=1}^{N_t}(1-X_i)$. Το επόμενο Θεώρημα χαρακτηρίζει τις διαδικασίες των κόκκινων και μπλε αφίξεων.

Θεώρημα 37 Έστω $\{N_t\}_{t\geq 0}$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή Bernoulli(p), που είναι ανεξάρτητες από τη διαδικασία αφίξεων $\{N_t\}_{t\geq 0}$. Τότε οι διαδικασίες $\{N_t^+\}_{t\geq 0}$ και $\{N_t^-\}_{t\geq 0}$ με

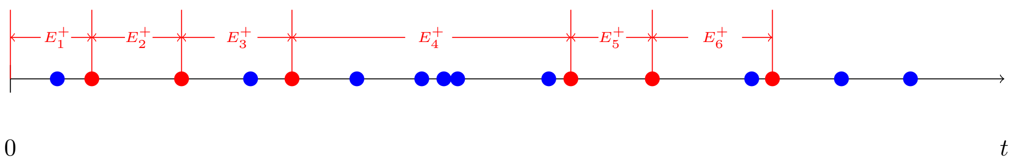
$$N_t^+ = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \qquad \text{και} \qquad N_t^- = N_t - N_t^+ = \sum_{i=1}^{N_t}(1-X_i),$$

είναι δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λp και $\lambda(1-p)$ αντίστοιχα.

Απόδειξη: Έστω $M_1, M_2, \ldots,$ η ακολουθία των επιτυχημένων προσπαθειών, δηλαδή

$$M_1 = \inf\{k \geq 1 : X_k = 1\}, \qquad M_{n+1} = \inf\{k > M_n : X_k = 1\}, n \in \mathbb{N}.$$

Για παράδειγμα, στο παρακάτω σχήμα, όπου έχουμε χρωματίσει την k-οστή άφιξη κόκκινη, αν $X_k = 1$, ή μπλε, αν $X_k = 0$, έχουμε $M_1 = 2, M_2 = 3, M_3 = 5, M_4 = 11, M_5 = 12, M_6 = 14$.



Οι $M_1, M_2 - M_1, M_3 - M_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, που ακολουθούν γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p, δηλαδή

$$\mathbb{P}\big[M_1 = k\big] = (1-p)^{k-1}p, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{8.11}$$

Αν $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι η ακολουθία των χρόνων που μεσολαβούν ανάμεσα στις διαδοχικές αφίξεις της διαδικασίας $\{N_t\}_{t\geq 0}$ και ορίσουμε $M_0 = 0$, τότε οι χρόνοι ανάμεσα στις διαδοχικές αφίξεις της $\{N_t^+\}_{t\geq 0}$ είναι η ακολουθία $\{E_k^+\}_{k\in\mathbb{N}}$ με

$$E_n^+ = \sum_{k=M_{n-1}+1}^{M_n} E_k.$$

Εφόσον η $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ εξαρτάται μόνο από την $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ και η $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ μόνο από τη διαδικασία αφίξεων, οι ακολουθίες αυτές είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον, η ανεξαρτησία και ισονομία των $M_1, M_2 - M_1, \ldots$ συνεπάγεται την ανεξαρτησία και ισονομία των $E_1^+, E_2^+, \ldots$ Θα δείξουμε ότι οποιεσδήποτε δύο από αυτές είναι ανεξάρτητες και ισόνομες καθώς το επιχείρημα στη γενική περίπτωση είναι εντελώς ανάλογο. Για $n, m \in \mathbb{N}$ με $n < m$ έχουμε

$$I = \mathbb{P}\big[E_n^+ > t, E_m^+ > s\big] = \mathbb{P}\big[\sum_{k=M_{n-1}+1}^{M_n} E_k > t, \sum_{k=M_{m-1}+1}^{M_m} E_k > s\big]$$

$$= \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{N}} \sum_{q_2\geq q_1+p_1} \mathbb{P}\big[\sum_{k=q_1+1}^{q_1+p_1} E_k > t, \sum_{k=q_2+1}^{q_2+p_2} E_k > s, M_{n-1} = q_1 = M_n - p_1, M_{m-1} = q_2 = M_m - p_2\big].$$

Από την ανεξαρτησία των ακολουθιών $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ παίρνουμε

$$I = \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{N}} \sum_{q_2\geq q_1+p_1} \mathbb{P}\big[\sum_{k=q_1+1}^{q_1+p_1} E_k > t, \sum_{k=q_2+1}^{q_2+p_2} E_k > s\big]\mathbb{P}\big[M_{n-1} = q_1 = M_n - p_1, M_{m-1} = q_2 = M_m - p_2\big].$$

Από την ανεξαρτησία και την ισονομία των τυχαίων μεταβλητών $E_n, n = 1, 2, \dots$ παίρνουμε στη συνέχεια

$$\begin{aligned} I &= \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{N}} \sum_{q_2\geq q_1+p_1} \mathbb{P}\big[\sum_{k=1}^{p_1} E_k > t\big]\ \mathbb{P}\big[\sum_{k=1}^{p_2} E_k > s\big]\times \\ &\qquad\qquad \times \mathbb{P}\big[M_{n-1} = q_1, M_n - M_{n-1} = p_1, M_{m-1} = q_2, M_m - M_{m-1} = p_2\big] \\ &= \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big[\sum_{k=1}^{p_1} E_k > t\big]\ \mathbb{P}\big[\sum_{k=1}^{p_2} E_k > s\big]\mathbb{P}\big[M_n - M_{n-1} = p_1, M_m - M_{m-1} = p_2\big] \end{aligned}$$

Τέλος, από το γεγονός ότι οι $M_n - M_{n-1}$ και $M_m - M_{m-1}$ είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή με τη M_1 παίρνουμε

$$\begin{aligned} I &= \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big[\sum_{k=1}^{p_1} E_k > t\big]\ \mathbb{P}\big[\sum_{k=1}^{p_2} E_k > s\big]\mathbb{P}\big[M_1 = p_1\big]\mathbb{P}\big[M_1 = p_2\big] \\ &= \left(\sum_{p_1\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big[\sum_{k=1}^{p_1} E_k > t\big]\ \mathbb{P}\big[M_1 = p_1\big]\right) \left(\sum_{p_2\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big[\sum_{k=1}^{p_2} E_k > t\big]\ \mathbb{P}\big[M_1 = p_2\big]\right) \\ &= \left(\sum_{p_1\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big[\sum_{k=1}^{M_1} E_k > t, M_1 = p_1\big]\right) \left(\sum_{p_2\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\big[\sum_{k=1}^{M_1} E_k > t, M_1 = p_2\big]\right) \\ &= \mathbb{P}\big[E_1^+ > t\big]\ \mathbb{P}\big[E_1^+ > s\big]. \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας το παραπάνω επιχείρημα, δείξαμε ότι για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m > n$ και κάθε $s, t > 0$ έχουμε

$$\mathbb{P}\big[E_n^+ > t, E_m^+ > s\big] = \mathbb{P}\big[E_1^+ > t\big]\ \mathbb{P}\big[E_1^+ > s\big].$$

Επομένως οι τυχαίες μεταβλητές E_n, E_m είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή όπως η E_1^+. Προκειμένου να βρούμε την κατανομή τους παρατηρούμε όπως πριν ότι

$$\mathbb{P}\big[E_1^+ > t\big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\Big[\sum_{k=1}^{n} E_k > t\Big]\ \mathbb{P}\big[M_1 = n\big]. \tag{8.12}$$

Ας θυμηθούμε τώρα ότι η τυχαία μεταβλητή $\sum_{k=1}^{n} E_k$ ακολουθεί κατανομή $G(\lambda, n)$. Επομένως,

$$\mathbb{P}\Big[\sum_{k=1}^{n} E_k > t\Big] = \int_t^{\infty} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\, dx.$$

Αν αντικαταστήσουμε την παραπάνω σχέση και την (8.11) στην 8.12 και χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Fubini-Tonelli για να εναλλάξουμε τη σειρά της άθροισης και της ολοκλήρωσης, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[E_1^+ > t\big] &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_t^{\infty} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\, dx\ (1-p)^{n-1} p \\
&= \lambda p \int_t^{\infty} e^{-\lambda x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\lambda(1-p)x\big)^{n-1}}{(n-1)!} \right) dx \\
&= \lambda p \int_t^{\infty} e^{-\lambda x} e^{\lambda(1-p)x}\, dx \\
&= \lambda p \int_t^{\infty} e^{-\lambda p x} dx = e^{-\lambda p t}.
\end{aligned}$$

Επομένως οι $\{E_k^+\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες και ακολουθούν εκθετική κατανομή με παράμετρο λp, άρα η διαδικασία $\{N_t^+\}_{t\geq 0}$ είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λp.

Εφόσον η $\{1 - X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, με κατανομή Bernoulli$(1-p)$, παίρνουμε αμέσως ότι η $\{N_t^-\}_{t\geq 0}$ είναι επίσης μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda(1-p)$.

Θα δείξουμε τώρα ότι οι $\{N_t^+\}_{t\geq 0}$ και $\{N_t^-\}_{t\geq 0}$ είναι ανεξάρτητες. Θα ξεκινήσουμε δείχνοντας ότι οι τυχαίες μεταβλητές N_t^+ και N_t^- είναι ανεξάρτητες για κάθε $t \geq 0$.

$$\mathbb{P}\big[N_t^+ = m, N_t^- = n\big] = \mathbb{P}\big[N_t^+ = m, N_t = m+n\big] = \mathbb{P}\big[\sum_{i=1}^{m+n} X_i = m, N_t = m+n\big] \tag{8.13}$$

$$= \mathbb{P}\big[\sum_{i=1}^{m+n} X_i = m\big]\mathbb{P}\big[N_t = m+n\big]. \tag{8.14}$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε ότι η ακολουθία $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη από τη διαδικασία αφίξεων $\{N_t\}_{t\geq 0}$. Από το Λήμμα 10 έχουμε ότι

$$\mathbb{P}\big[N_t = m+n\big] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!}.$$

Επιπλέον, εφόσον οι $X_1, X_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{m+n} X_i \sim$bin$(m+n, p)$ και

$$\mathbb{P}\big[\sum_{i=1}^{m+n} X_i = m\big] = \binom{n+m}{m} p^m (1-p)^n.$$

Αν αντικαταστήσουμε τις δύο παραπάνω ισότητες στην (8.13), έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\big[N_t^+ = m, N_t^- = n\big] &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{m+n}}{(m+n)!} \binom{n+m}{m} p^m (1-p)^n \\
&= e^{-\lambda p t} \frac{(\lambda p t)^m}{m!} e^{-\lambda(1-p)t} \frac{(\lambda(1-p)t)^n}{n!}.
\end{aligned} \tag{8.15}$$

Επομένως οι τυχαίες μεταβλητές N_t^+ και N_t^- είναι ανεξάρτητες για κάθε $t \geq 0$. Για να δείξουμε ότι οι διαδικασίες $\{N_t^+\}_{t\geq 0}$ και $\{N_t^-\}_{t\geq 0}$ είναι ανεξάρτητες, χρειάζεται να δείξουμε κάτι αντίστοιχο για τις από κοινού κατανομές πεπερασμένης διάστασης. Συγκεκριμένα, αν $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_k$ και οι $\{m_i\}_{1\leq i\leq k}$ και $\{n_i\}_{1\leq i\leq k}$ είναι αύξουσες ακολουθίες ακεραίων, θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\mathbb{P}\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^+ = m_i, N_{t_i}^- = n_i\}\Big] = \mathbb{P}\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^+ = m_i\}\Big]\ \mathbb{P}\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^- = n_i\}\Big]. \tag{8.16}$$

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι διαδικασίες Poisson έχουν ανεξάρτητες και χρονικά ομοιογενείς προσαυξήσεις, ώστε να αναγάγουμε αυτό το ερώτημα στο ερώτημα για τις μονοδιάστατες κατανομές της διαδικασίας που ήδη απαντήσαμε. Πράγματι, αν θέσουμε $t_0 = m_0 = n_0 = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^+ = m_i,\ N_{t_i}^- = n_i\}\Big] &= \mathbb{P}\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^+ - N_{t_{i-1}}^+ = m_i - m_{i-1},\ N_{t_i}^- - N_{t_{i-1}}^- = n_i - n_{i-1}\}\Big] \\ &= \mathbb{P}\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\{\sum_{k=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} X_k = m_i - m_{i-1},\ \sum_{k=N_{t_{i-1}}+1}^{N_{t_i}} (1 - X_k) = n_i - n_{i-1}\}\Big] \\ &= \prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}\Big[N_{t_i - t_{i-1}}^+ = m_i - m_{i-1},\ N_{t_i - t_{i-1}}^- = n_i - n_{i-1}\Big].\end{aligned}$$

Από την (8.15) έχουμε τώρα ότι

$$\mathbb{P}\Big[\bigcap_{i=1}^{k}\{N_{t_i}^+ = m_i,\ N_{t_i}^- = n_i\}\Big] = \prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}\Big[N_{t_i - t_{i-1}}^+ = m_i - m_{i-1}\Big]\,\mathbb{P}\Big[N_{t_i - t_{i-1}}^- = n_i - n_{i-1}\Big]$$

και αντιστρέφοντας τα βήματα του τελευταίου επιχειρήματος φτάνουμε στην (8.16). □

Πόρισμα 15 Θεωρήστε δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson $\{X_t\}_{t\geq 0}$ και $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ με ρυθμούς λ και μ αντίστοιχα. Αν $\{N_t\}_{t\geq 0}$ είναι το άθροισμά τους και $\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ είναι μια $\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$-εκλέπτυνση της $\{N_t\}_{t\geq 0}$, τότε τα ζευγάρια διαδικασιών

$$(\{X_t\}_{t\geq 0}, \{Y_t\}_{t\geq 0}) \quad \text{και} \quad (\{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}, \{N_t - \tilde{X}_t\}_{t\geq 0})$$

έχουν την ίδια κατανομή. Ειδικότερα, κάθε άφιξη της $\{N_t\}_{t\geq 0}$ οφείλεται σε αύξηση της $\{X_t\}_{t\geq 0}$ με πιθανότητα $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, ανεξάρτητα από τις άλλες αφίξεις και τη διαδικασία αφίξεων $\{N_t\}_{t\geq 0}$.

Πόρισμα 16 Με βάση τα Θεωρήματα 35 και 37 μπορούμε να προσομοιώσουμε ταυτόχρονα δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson $\{X_t\}_{t\geq 0}$ και $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ με ρυθμούς λ και μ αντίστοιχα, κάνοντας εκλέπτυνση στο άθροισμά τους. Συγκεκριμένα, προκειμένου να προσομοιώσουμε τις δύο διαδικασίες στο διάστημα $[0, T]$ μπορούμε να κάνουμε τα ακόλουθα βήματα.

1. Προσομοιώνουμε το συνολικό πλήθος αφίξεων $N_T = X_T + Y_T \sim Po\big((\lambda+\mu)T\big)$.

2. Αν $N_T = n$ προσομοιώνουμε τους χρόνους των n αφίξεων επιλέγοντας n ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, T]$.

3. Αποδίδουμε ανεξάρτητα κάθε μια από τις n αφίξεις είτε στη $\{X_t\}_{t\geq 0}$ (με πιθανότητα $p_X = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$) είτε στην $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ (με πιθανότητα $p_Y = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$).

Παράδειγμα 54 Οι άνθρωποι που προσέρχονται σε ένα αναψυκτήριο ένα καλοκαιρινό μεσημέρι φτάνουν ως μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 3/min. Καθένας από αυτούς επιλέγει είτε χυμό πορτοκάλι είτε χυμό μήλο με πιθανότητα 5/6 και 1/6 αντίστοιχα και ανεξάρτητα ο ένας από τον αλλον. Αν κάποια στιγμή υπάρχουν αποθέματα πορτοκαλιών για 240 χυμούς και μήλων για 39 χυμούς, ποια είναι η πιθανότητα να εξυπηρετηθούν όλοι οι άνθρωποι που θα φτάσουν μέσα στην επόμενη μιάμιση ώρα;

Σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα, οι παραγγελίες για χυμό πορτοκαλιού φτάνουν ως μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 3/min×5/6=2,5/min. Επομένως, από το Θεώρημα 10, οι παραγγελίες για χυμό πορτοκαλιού την επόμενη ώρα είναι μια τυχαία μεταβλητή N, που ακολουθεί κατανομή Poisson με παράμετρο 2,5/min×90min=225. Αντίστοιχα, οι παραγγελίες για χυμό μήλου φτάνουν ως μια διαδικασία Poisson με ρυθμό 3/min×1/6=1/2min. Επομένως, οι παραγγελίες για χυμό μήλου την επόμενη ώρα, είναι μια τυχαία μεταβλητή, M, που ακολουθεί κατανομή Poisson, με παράμετρο 1/2min×90min=45. Μάλιστα, εφόσον οι δύο διαδικασίες είναι ανεξάρτητες, θα είναι ανεξάρτητες και οι τυχαίες μεταβλητές M και N. Εμείς θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα

$$\mathbb{P}\big[\{N \leq 240\} \cap \{M \leq 39\}\big] = \mathbb{P}\big[N \leq 240\big]\ \mathbb{P}\big[M \leq 39\big].$$

Προκειμένου να ολοκληρώσουμε τον υπολογισμό, μπορούμε να υπολογίσουμε αυτές τις ποσότητες είτε με τη βοήθεια κάποιου στατιστικού πακέτου, όπως η R, είτε να βρούμε προσεγγιστικά την απάντηση με τη βοήθεια του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος. Συγκεκριμένα, αν η τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί κατανομή $Po(\lambda)$, τότε

$$\mathbb{P}\Big[\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq x\Big] \to \Phi(x), \quad \text{καθώς } \lambda \to \infty,$$

όπου η συνάρτηση Φ στο δεξί μέλος είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής. Στην πράξη, η προσέγγιση είναι αρκετά καλή για $\lambda \geq 30$, οπότε μπορούμε να εκτιμήσουμε

$$\mathbb{P}\big[N \leq 240\big] = \mathbb{P}\Big[\frac{N-225}{\sqrt{225}} \leq \frac{240-225}{\sqrt{225}}\Big] \simeq \Phi(1) \simeq 0,8414.$$

Ομοίως,

$$\mathbb{P}\big[M \leq 39\big] = \mathbb{P}\Big[\frac{M-45}{\sqrt{45}} \leq \frac{39-45}{\sqrt{45}}\Big] \simeq \Phi(-\frac{2}{\sqrt{5}}) = 0,1856.$$

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι περίπου 0,1561. Η απάντηση που θα παίρναμε με τη βοήθεια του υπολογιστή, χωρίς την προσέγγιση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος, θα ήταν 0,1769. □

Παράδειγμα 55 Αν $\{X_t\}_{t\geq 0}$ και $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ είναι δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς λ και μ αντίστοιχα, ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος Z των αφίξεων της $\{X_t\}_{t\geq 0}$ ανάμεσα σε δύο διαδοχικές αφίξεις της $\{Y_t\}_{t\geq 0}$;

Η διαδικασία $\{N_t\}_{t\geq 0}$ με $N_t = X_t + Y_t$ είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda+\mu$. Το ενδεχόμενο $\{Z \geq k\}$ είναι το ενδεχόμενο οι πρώτες k αφίξεις της $\{N_t\}_{t\geq 0}$ μετά από μια άφιξη της $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ να οφείλονται σε αυξήσεις της $\{X_t\}_{t\geq 0}$. Επομένως

$$\mathbb{P}\big[Z \geq k\big] = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Επομένως για κάθε $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}\big[Z+1 = k\big] = \mathbb{P}\big[Z \geq k-1\big] - \mathbb{P}\big[Z \geq k\big] = \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^{k-1} \frac{\mu}{\lambda+\mu},$$

δηλαδή η $Z+1$ ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$. □

8.4 Ασκήσεις

Άσκηση 120 Σωματίδια προσπίπτουν σ΄ έναν ανιχνευτή σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson. Αν στα πρώτα δύο λεπτά λειτουργίας του ανιχνευτή προσέπεσαν 14 σωματίδια, ποια είναι η πιθανότητα τα 5 από αυτά να προσέπεσαν κατά το πρώτο λεπτό;

Άσκηση 121 Σε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων μ, αν S_N είναι ο χρόνος της N-οστής άφιξης, υπολογίστε τα όρια

$$\mathbb{P}\big[\lim_N \frac{S_N}{N} = \frac{1}{\mu}\big] \qquad \text{και} \qquad \lim_N \mathbb{P}\big[S_N \leq \frac{N}{\mu}\big].$$

Άσκηση 122 Σε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων λ, βρείτε την κατανομή που ακολουθεί το πλήθος των αφίξεων στο διάστημα $(0, s]$ δεδομένου ότι έχουμε N αφίξεις στο διάστημα $(0, t]$ με $t \geq s$.

Άσκηση 123 Οι αφίξεις φοιτητών στη βιβλιοθήκη του ΕΜΠ μεταξύ 8πμ και 2μμ είναι μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων 1/5min. Οι αφίξεις καθηγητών την ίδια περίοδο είναι μια μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων 1/30min. Αν στο διάστημα 11πμ και 12μ μπήκαν στη βιβλιοθήκη 10 άτομα, ποια είναι η πιθανότητα να μπήκαν το πολύ δύο καθηγητές; Η πιθανότητα να δανειστεί βιβλίο κάποιος καθηγητής που επισκέπτεται τη βιβλιοθήκη είναι 4/5 ενώ η πιθανότητα να δανειστεί βιβλίο ένας φοιτητής που επισκέπτεται τη βιβλιοθήκη είναι 1/6. Υποθέστε ότι δεν μεσολαβεί χρόνος ανάμεσα στην άφιξη ενός ατόμου που θέλει να δανειστεί βιβλίο και στον δανεισμό του βιβλίου. Πώς θα περιγράφατε τη διαδικασία που μετράει τους δανεισμούς βιβλίων κατά την παραπάνω περίοδο; Ποια είναι η πιθανότητα το πρώτο βιβλίο της ημέρας να το δανειστεί ένας φοιτητής;

Άσκηση 124 Σ΄ ένα δισκάδικο εξυπηρετούν δύο υπάλληλοι. Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη ακολουθεί εκθετική κατανομή με ρυθμό 1/2min. Μπαίνετε στο δισκάδικο και παρατηρείτε ότι και οι δύο υπάλληλοι εξυπηρετούν, ενώ υπάρχει ακόμα ένας πελάτης πριν από σας που περιμένει να εξυπηρετηθεί. Ποια είναι η κατανομή του χρόνου που θα σας πάρει μέχρι να εξυπηρετηθείτε; Ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσετε πριν από τον πελάτη που περιμένει; Ποια είναι η πιθανότητα να τελειώσετε πριν από κάποιον πελάτη που εξυπηρετείτο όταν μπήκατε;

Άσκηση 125 Στις αναμετρήσεις των ποδοσφαιρικών ομάδων Α και Β τα τέρματα της ομάδας Α σημειώνονται σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων 1/45min, ενώ εκείνα της ομάδας Β σύμφωνα με μια ανεξάρτητη από την προηγούμενη διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων 1/60min. Ποια είναι η πιθανότητα στο ημίχρονο να προηγείται η ομάδα Β με 0-1 αλλά στο τέλος να κερδίσει η ομάδα Α με 3-1; Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα Α με 2-1, δεδομένου ότι το σκορ ημιχρόνου είναι 0-1;

Άσκηση 126 Σωματίδια τύπου Α και τύπου Β φτάνουν σ΄ έναν ανιχνευτή σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς αφίξεων λ και μ αντίστοιχα. Ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των σωματιδίων τύπου Α που έχουν ανιχνευτεί μέχρι την ανίχνευση του πρώτου σωματιδίου τύπου Β; Ποια κατανομή ακολουθεί το πλήθος των σωματιδίων τύπου Α που έχουν ανιχνευτεί μέχρι την ανίχνευση του τρίτου σωματιδίου τύπου Β;

Άσκηση 127 Σ΄ έναν μελλοντικό κόσμο διαστημικά λεωφορεία αναχωρούν από τη Γη για τη Σελήνη ως μια διαδικασία Poisson $\{D_t : t \geq 0\}$ με ρυθμό $\lambda = 4$ ανά ημέρα. Οι ταξιδιώτες προσέρχονται ως μια διαδικασία Poisson $\{A_t : t \geq 0\}$ με ρυθμό $\mu = 50$ ανά ώρα, ανεξάρτητη από την $\{D_t : t \geq 0\}$ και φεύγουν με το πρώτο διαθέσιμο διαστημικό λεωφορείο. Αυτή τη στιγμή η ώρα είναι 12 το μεσημέρι.

α) Ποια είναι η πιθανότητα το μεθεπόμενο λεωφορείο να αναχωρήσει πριν τα μεσάνυχτα;

β) Ποια είναι προσεγγιστικά η πιθανότητα να έχουν φτάσει τουλάχιστον 640 επιβάτες μέχρι τα μεσάνυχτα;

β) Αν N είναι το πλήθος των επιβατών σε μία πτήση υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}[N = k]$, για $k = 0, 1, 2, \ldots$

στ) Αν Λ είναι το πλήθος των λεωφορείων που θα έχουν αναχωρήσει μέχρι τη στιγμή που θα φτάσει ο χιλιοστός ταξιδιώτης (μετρώντας από τώρα και μετά) υπολογίστε την πιθανότητα $\mathbb{P}[\Lambda = k]$, για $k = 0, 1, 2, \ldots$

Άσκηση 128 Αυτοκίνητα και μοτοσυκλέτες προσέρχονται σε έναν σταθμό διοδίων ως δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς 3/λεπτό και 1/λεπτό αντίστοιχα.

α) Υπολογίστε την πιθανότητα το επόμενο λεπτό να περάσουν τουλάχιστον δύο οχήματα από τον σταθμό.

β) Υπολογίστε την πιθανότητα το επόμενο λεπτό να περάσουν μόνο μοτοσυκλέτες από τον σταθμό.

γ) Αν το προηγούμενο λεπτό πέρασαν από τον σταθμό δύο οχήματα, υπολογίστε την πιθανότητα οι αφίξεις τους να απείχαν χρονικά λιγότερο από 1/2 λεπτό.

δ) Υπολογίστε την πιθανότητα το επόμενο λεπτό να μην περάσουν διαδοχικά οχήματα του ίδιου τύπου.

Άσκηση 129 Σε μια πειραματική διάταξη μια δέσμη laser περνά από ένα διαχωριστή που τη χωρίζει σε δύο δέσμες A,B. Η προσπίπτουσα δέσμη αποτελείται από φωτόνια που φτάνουν στον διαχωριστή ως μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ. Κάθε φωτόνιο, κατευθύνεται είτε στη δέσμη A είτε στη δέσμη B με πιθανότητα 1/2, ανεξάρτητα για κάθε φωτόνιο. Οι δύο δέσμες A, B κατευθύνονται στη συνέχεια σε δύο φωτοδιόδους. Για κάθε φωτόνιο που προσπίπτει στη φωτοδίοδο απελευθερώνεται ένα ηλεκτρόνιο. Τα ηλεκτρόνια που απελευθερώνονται δημιουργούν τα ρεύματα I_1 και I_2 αντίστοιχα. Στη συνέχεια τα δύο αυτά ρεύματα αφαιρούνται, οπότε προκύπτει ένα ηλεκτρικό ρεύμα $I = I_1 - I_2$, που οδηγείται σε μια συσκευή μέτρησης. Ποια είναι η μέση τιμή και ποια είναι η διασπορά του αριθμού των ηλεκτρονίων που φτάνει στη συσκευή μέτρησης σε χρόνο Δt;

Άσκηση 130 Αρσενικά και θηλυκά μπαρμπούνια πέφτουν στα δίχτυα ενός ψαρά σύμφωνα με δύο ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με ρυθμούς $\alpha = 1/20\text{min}$ και $\theta = 1/30\text{min}$ αντίστοιχα.

α) Αν ο ψαράς αφήσει τα δίχτυα για 2 ώρες ποια είναι η κατανομή του πλήθους των μπαρμπουνιών που θα πιάσει;

β) Αν σε 2 ώρες έπιασε 10 μπαρμπούνια ποια είναι η πιθανότητα να μην έπιασε κανένα στο διάστημα 30min έως 90min;

γ) Αν σε 2 ώρες έπιασε 10 μπαρμπούνια ποια είναι η πιθανότητα να μην έπιασε κανένα θηλυκό μεταξύ 30min και 90min;

δ) Αν T είναι η πρώτη χρονική στιγμή (από την ώρα που έριξε τα δίχτυα) που έχουν πιαστεί τουλάχιστον 2 αρσενικά και τουλάχιστον 2 θηλυκά μπαρμπούνια, ποια κατανομή ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή T;

Άσκηση 131 Σε μια διαδικασία Poisson με ρυθμό αφίξεων λ, ποια είναι η κατανομή του διαστήματος ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις που περιέχει το $t > 0$; Γιατί η κατανομή ΔΕΝ είναι εκθετική με ρυθμό λ; Ποιο είναι το όριο αυτής της κατανομής όταν $t \to \infty$;