



σχολήχημικώνμηχανικών
εθνικόμετσόβιοπολυτεχνείο

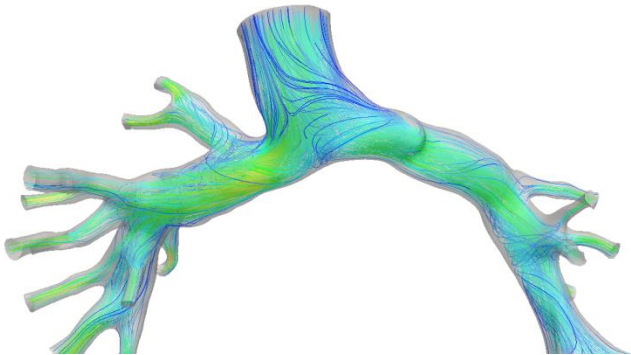
Βιορευστομηχανική

Ρευστομηχανική

Ρευστομηχανική: μελετά την κίνηση των ρευστών και τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω σε αυτά.

Η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων που διέπουν την κίνηση των ρευστών (Navier-Stokes) είναι ένα δύσκολο πρόβλημα:

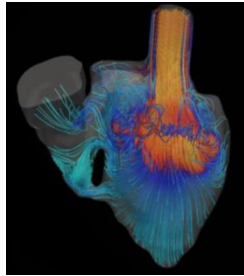
- Εξειδικευμένα αριθμητικά σχήματα
- Γένεση υπολογιστικού πλέγματος σε περίπλοκες γεωμετρίες



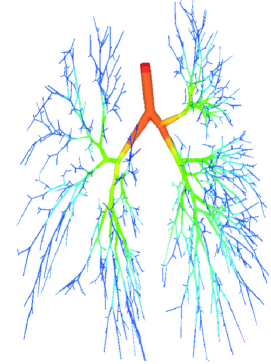
- Επίλυση προβλημάτων με μεγάλο αριθμό βαθμών ελευθερίας ($\sim 10^9$)

Βιο-Ρευστομηχανική

Προσομοίωση της ροής αίματος στην καρδιά

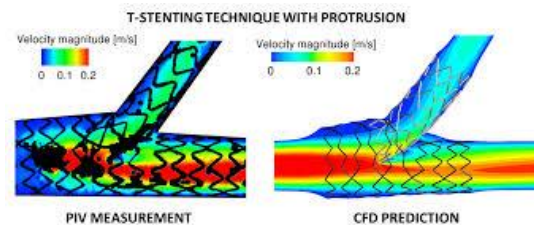
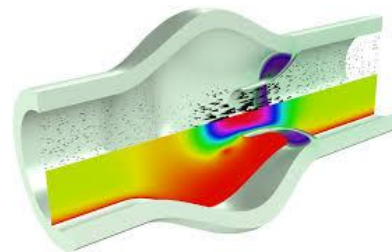


Ροή αέρα στους πνεύμονες



Προσθετικές συσκευές:

- Τεχνητές βαλβίδες καρδιάς
- Stents που ελευθερώνουν φαρμακευτικές ουσίες
- Εμφυτεύσιμες συσκευές για τη μεταφορά φαρμάκων



Κινηματική

Η κίνηση των ρευστών περιγράφεται με όρους ταχύτητας, και ρυθμού παραμόρφωσης (strain rate).

Ρευστά: οποδήποτε μικρή (διατμητική) τάση προκαλεί παραμόρφωση

Στη μηχανική στερεών: σχέση τάσης-παραμόρφωσης δίνεται από μία καταστατική εξίσωση.

Στη μηχανική των ρευστών: η καταστατική εξίσωση δίνει τη σχέση τάσης με ρυθμό παραμόρφωσης

π.χ. Νευτωνικά, ασυμπίεστα ρευστά: $\sigma_{ij} = p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$

σ_{ij} : Τελεστής τάσεων

$\Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$: ρυθμός παραμόρφωσης

p : πίεση

μ : δυναμικό ιξώδες – σταθερό (τριβή μεταξύ στρωμάτων ρευστού)

Γραφική απεικόνιση των στοιχείων του τανυστή τάσεων

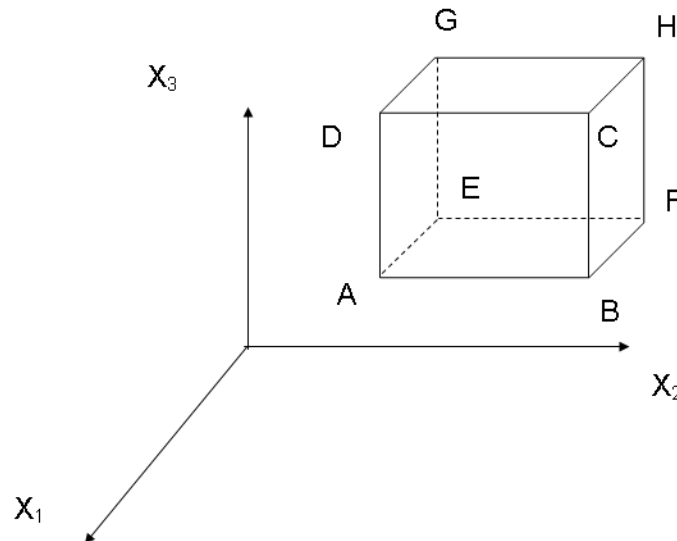
Η τάση που εφαρμόζεται πάνω σε μια πλευρά δίνεται από την έκφραση:

$$\mathbf{s} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Στην πλευρά ABCD το μοναδιαίο κάθετο με φορά προς τα έξω διάνυσμα είναι το $\mathbf{n} = (1,0,0) = \mathbf{e}_1$. Συνεπώς η τάση που ασκείται σε αυτή την πλευρά από το περιβάλλον ρευστό είναι:

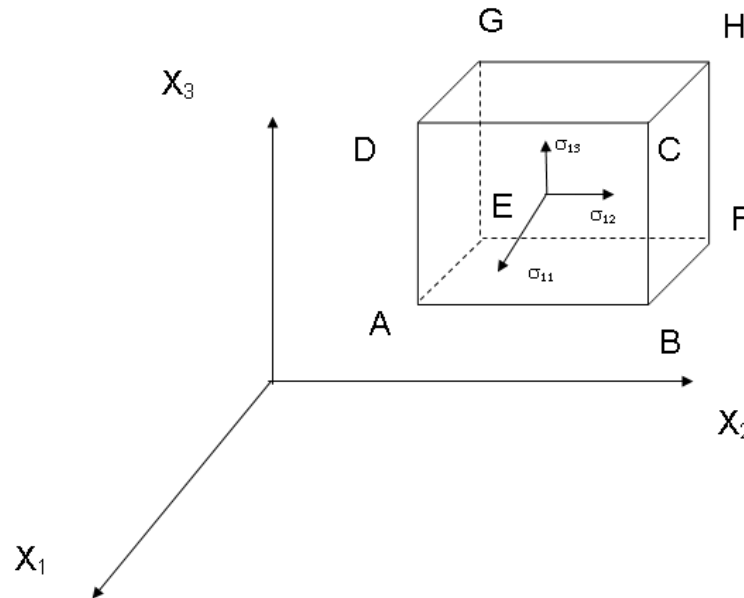
$$\mathbf{s}_{ABCD} = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}_1 \cdot \sum_{i,j} \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \sum_j \sigma_{1j} \mathbf{e}_j$$

Συνεπώς, μόνο 3 από τις 6 ανεξάρτητες συνιστώσες του τανυστή τάσεων συνεισφέρουν στην τάση της πλευράς ABCD.



Γραφική απεικόνιση των στοιχείων του τανυστή τάσεων

Η τάση γενικά δεν είναι κάθετη στην επιφάνεια ABCD. Τα στοιχεία σ_{12} και σ_{13} είναι προσανατολισμένα προς το εφαπτομενικό επίπεδο και αντιστοιχούν στις τάσεις διάτμησης (shear stresses) ενώ το στοιχείο σ_{11} είναι κάθετο στην επιφάνεια.



Από τους 2 δείκτες ο πρώτος αντιστοιχεί στη διεύθυνση που είναι κάθετη στην επιφάνεια, και ο δεύτερος δείκτης τη διεύθυνση στην οποία οποία δείχνει το στοιχείο του τανυστή τάσεων.

Νευτωνικά ρευστά

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{Navier-Stokes}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Εξίσωση συνέχειας}$$

Με αυτές τις εξισώσεις (και κατάλληλες αρχικές και συνοριακές συνθήκες) υπολογίζονται για μια ισόθερμη ροή, το πεδίο ταχύτητας, $\mathbf{u}$, και η πίεση P .

Γιατί είναι δύσκολη η αριθμητική επίλυση του συστήματος αυτών των διαφορικών εξισώσεων;

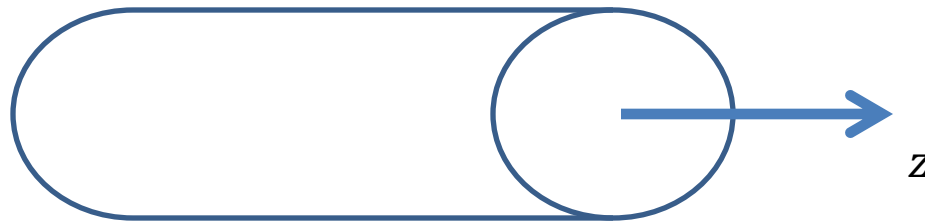
- Υπάρχουν εξισώσεις για τα u_x, u_y, u_z αλλά όχι για την πίεση, P .
- Η εξίσωση συνέχειας είναι ένας αλγεβρικός περιορισμός, τον οποίο πρέπει να ικανοποιεί η ταχύτητα.
- Ο όρος $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ είναι μη γραμμικός.

Στρωτή ροή αίματος σε αρτηρία μεγάλου μήκους

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{Navier-Stokes}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Εξίσωση συνέχειας}$$

Αναζητούμε τη λύση ανεπτυγμένης και συμμετρικής ροής σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης.



Πλήρως ανεπτυγμένη ροή: $v_r = v_\theta = 0$

$$\text{Εξίσωση συνέχειας: } \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \rightarrow v_z = v_z(r, \theta) \xrightarrow{\text{symmetry}} v_z = v_z(r)$$

$$\text{Εξίσωση Navier-Stokes: } -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0$$

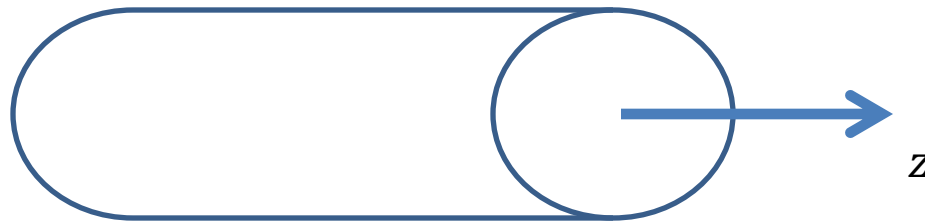
$$\text{Από } r \text{ και } \theta \text{ Navier-Stokes: } \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$$

Στρωτή ροή αίματος σε αρτηρία μεγάλου μήκους

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{Navier-Stokes}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Εξίσωση συνέχειας}$$

Αναζητούμε τη λύση ανεπτυγμένης και συμμετρικής ροής σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης.



$$\text{Καταλήγουμε στην: } -\frac{dP}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dz} r \xrightarrow{P=P(z)}$$
$$\frac{dv_z}{dr} = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dz} r + \frac{C_1}{r} \rightarrow v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

Πεπερασμένη τιμή ταχύτητας στο $r = 0$: $C_1 = 0$

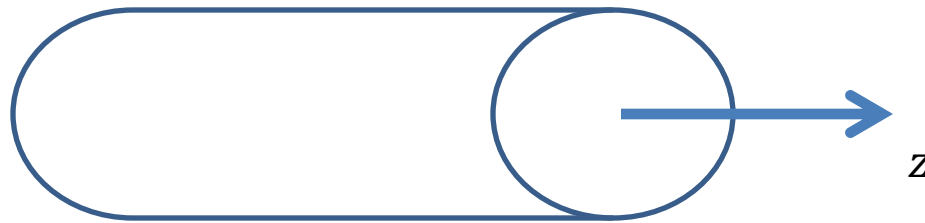
Συνθήκη μη ολίσθησης στο τοίχωμα: $v_z(r = R) = 0$.

Στρωτή ροή αίματος σε αρτηρία μεγάλου μήκους

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \rho \mathbf{g} - \nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{u} \quad \text{Navier-Stokes}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{Εξίσωση συνέχειας}$$

Αναζητούμε τη λύση ανεπτυγμένης και συμμετρικής ροής σε συνθήκες μόνιμης κατάστασης.

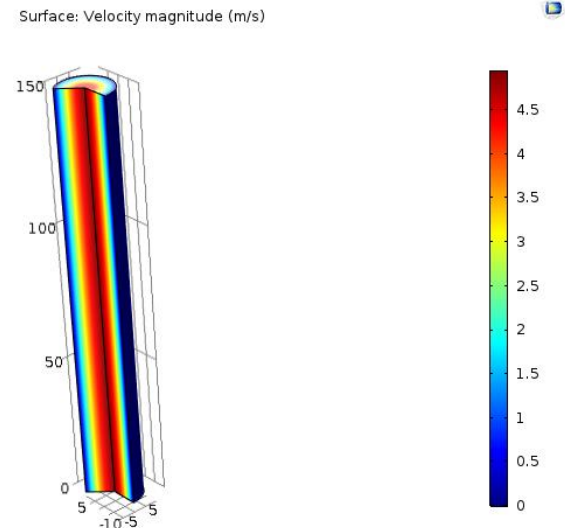
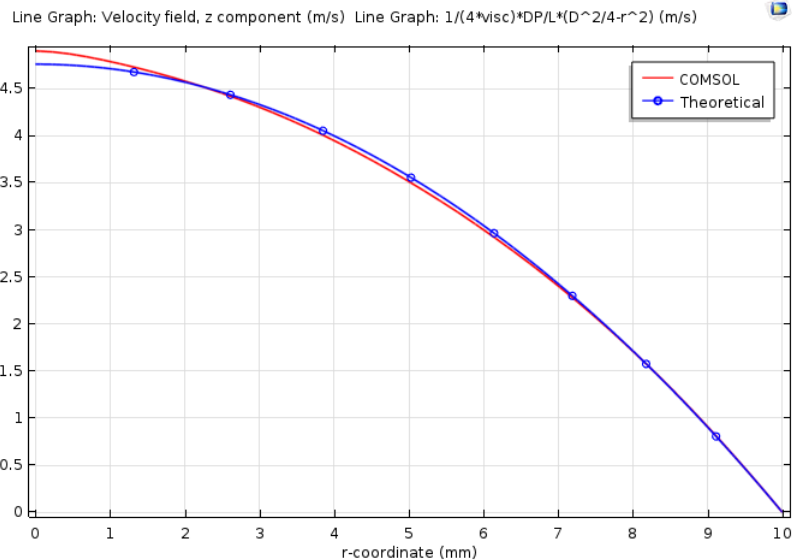


$v_z = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dz} (r^2 - R^2)$: αναμένεται παραβολική κατανομή στην κυλινδρική αρτηρία

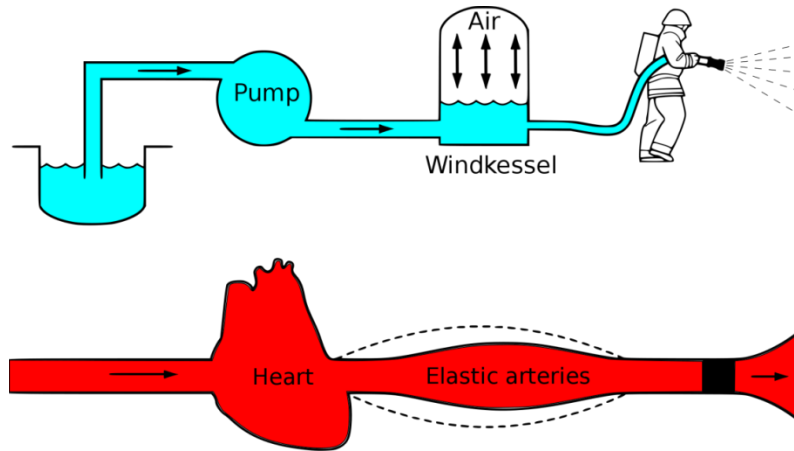
Στρωτή ροή αίματος σε αρτηρία μεγάλου μήκους

Εφαρμογή στο COMSOL

Επαληθεύστε το παραβολικό προφίλ της κατανομής της ταχύτητας όταν η διάμετρος του αγωγού είναι 2 cm, το μήκος 15 cm, το δυναμικό ιξώδες του ρευστού είναι 3.5 mPa·s, η πυκνότητά του 1000 kg/m³ και πτώση πίεσης είναι 100 Pa.



Φαινόμενο Windkessel



Περιγραφή της αλληλεπίδρασης της καρδιακής παροχής (όγκος παλμού) με την ευενδοτότητα (compliance) του αρτηριακού τοιχώματος. Ο τελευταίος όρος δίνει τη μεταβολή όγκου στην αρτηρία από την αλλαγή πίεσης (dV/dP) .

Μετατροπή σε ελαστική ενέργεια η οποία αποδίδεται στο ρευστό όταν η καρδιά διαστέλλεται.

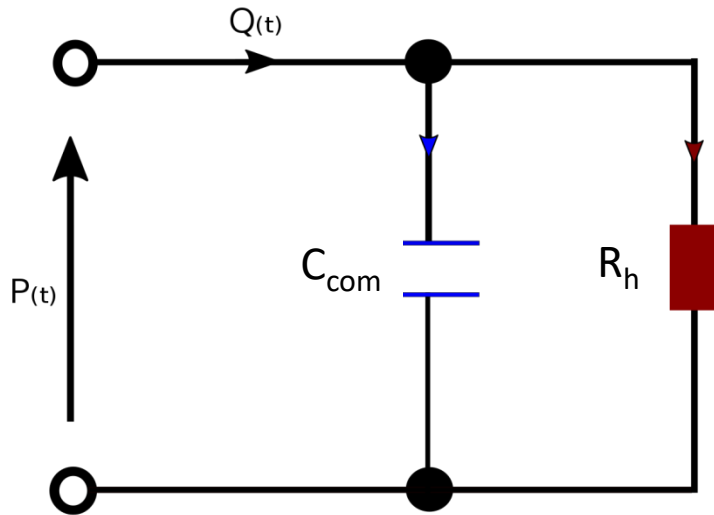
Έτσι εξασφαλίζεται η συνεχής ροή του αίματος.

<https://www.youtube.com/watch?v=Bx9Nu2PkPsE>

Φαινόμενο Windkessel

Υδραυλικό κύκλωμα αντίστοιχο ενός ηλεκτρικού κυκλώματος:

- Διαφορά Πίεσης (P (mmHg))– Διαφορά Τάσης (V)
- Ογκομετρική παροχή (Q (cm³/s)) – Ηλεκτρικό ρεύμα (I)
- Υδραυλική αντίσταση (R_h (mmHg·s/cm³)) – Ηλεκτρική αντίσταση (R)
- Ευενδοτότητα (C_{com} (cm³/mmHg))– Χωρητικότητα πυκνωτή (C)



2 element Windkessel circuit

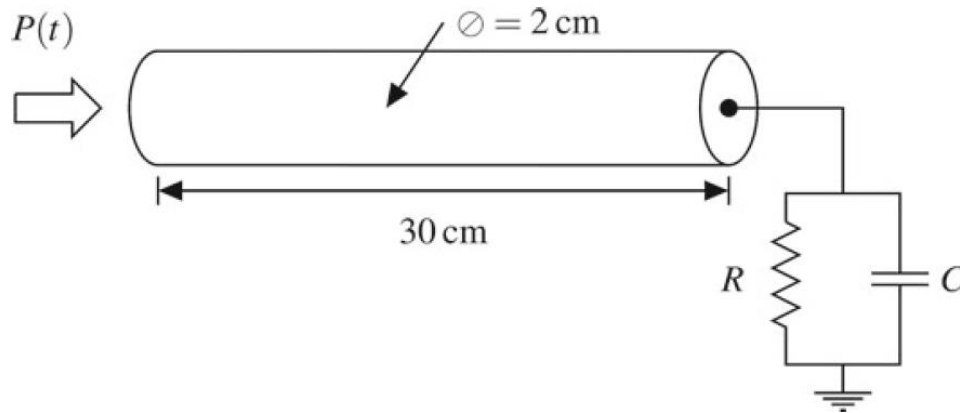
Ηλεκτρικό κύκλωμα:

$$I = C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R}$$

Υδραυλικό κύκλωμα:

$$Q = C_{com} \frac{dP}{dt} + \frac{P}{R_h}$$

Προσομοίωση ροής στην κοιλιακή αορτή



Δίνονται:

$R=1 \text{ mmHg}\cdot\text{s}\cdot\text{cm}^{-3}$, $C=2.75 \text{ cm}^3\cdot\text{mmHg}^{-1}$

$$P(t) = \begin{cases} 120 \sin(2\pi t) \text{ mmHg}, & 0 \leq t < 0.5 \text{ s} \\ 0, & 0.5 \leq t < 1 \text{ s} \end{cases}$$

Διάρκεια παλμού 1s.

Δυναμικό Ιξώδες: $\mu=3.5 \text{ mPa}\cdot\text{s}$

Πυκνότητα: $\rho=1100 \text{ kg/m}^3$

Μοντέλα διάχυσης

Η διάχυση αναφέρεται στη μεταφορά χημικών ουσιών από περιοχές υψηλής συγκέντρωσης σε περιοχές χαμηλότερης συγκέντρωσης ως αποτέλεσμα της τυχαίας μοριακής κίνησης.

Βιολογικά συστήματα και εφαρμογές εμβιομηχανικής:

- Ανταλλαγή μεταβολιτών μεταξύ κυττάρου και του περιβάλλοντός του.
- Διάχυση νερού διαμέσου ημιπερατής μεμβράνης (ώσμωση)
- Ανταλλαγή οξυγόνου και διοξειδίου του άνθρακα στις κυψελίδες των πνευμόνων.
- Συσκευές για μεταφορά φαρμάκων

Νόμος του Fick

Η ποσότητα μιας ουσίας που μεταφέρεται μέσω διάχυσης ανά μονάδα χρόνου είναι ανάλογη της κλίσης της συγκέντρωσης

$$\mathbf{\Gamma} = -D\nabla c$$

$\mathbf{\Gamma}$: material flux (ρυθμός μεταφοράς μάζας ανά μονάδα επιφάνειας)

D : ο συντελεστής διάχυσης

c : η γραμμομοριακή συγκέντρωση μιας χημικής ουσίας.

Η εξίσωση διάχυσης σε ακίνητο μέσο διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla c)$$

Η εξίσωση διάχυσης σε ρευστό (επιπλέον της διάχυσης, μεταφορά με συναγωγή):

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}c) = \nabla \cdot (D\nabla c)$$

$\mathbf{u}$: το πεδίο ταχύτητας

Μεταφορά φαρμάκου από στεφανιαίο stent

Ένα stent που απελευθερώνει φάρμακο τοποθετείται σε μία αποφραγμένη αρτηρία.

Τα stent αυτά απελευθερώνουν σταδιακά φαρμακευτικές ουσίες (paclitaxel, sirolimus) για την επούλωση των τραυμάτων του ιστού, και για να διατηρήσουν την αρτηρία ανοιχτή.

Fig. 7.5 Occluded coronary artery segment with plaque deposits shown in *grey* (*top*). Insertion of a coronary stent opens the artery (*bottom*), allowing blood to flow freely again. Drug-eluting stents slowly release pharmaceutical agents that inhibit scar tissue formation and prevent re-occlusion

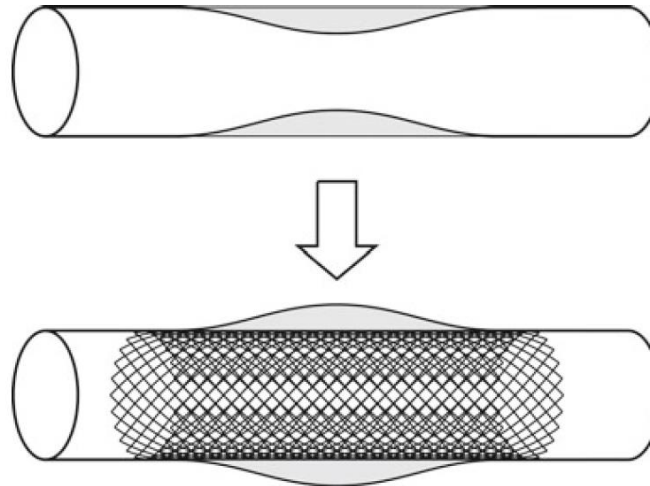


Fig. 7.6 Simplified stent model geometry, with uniform stent surface shown in *grey*



Μεταφορά φαρμάκου από στεφανιαίο stent

Το πεδίο ροής μπορεί να προσεγγιστεί από ένα παραβολικό προφίλ:

$$u = \frac{u_{max}}{R^2} (R^2 - r^2)$$

$$u_{max} = 50 \frac{cm}{s}, R = 1 mm$$

Μήκος αρτηρίας: 9 mm

Μήκος stent: 6 mm

Συντελεστής διάχυσης paclitaxel: $2.56 \times 10^{-4} \text{cm}^2 \text{min}^{-1}$.

Αρχική συγκέντρωση paclitaxel στο stent: 49.2 nmol.

Ποσότητα φαρμάκου στο stent: $M(t) = M_0 \exp(-kt)$

$M_0 = 49.2 \text{ nmol}$, $k=0.2 \text{ hr}^{-1}$ ο ρυθμός απελευθέρωσης φαρμάκου.

Βρείτε πώς εξελίσσεται η συγκέντρωση του φαρμάκου στην έξοδο της αρτηρίας σε απόσταση 0.5mm από το κέντρο για $t \in [0, 28] \text{hrs}$.

Μεταφορά φαρμάκου από στεφανιαίο stent

