

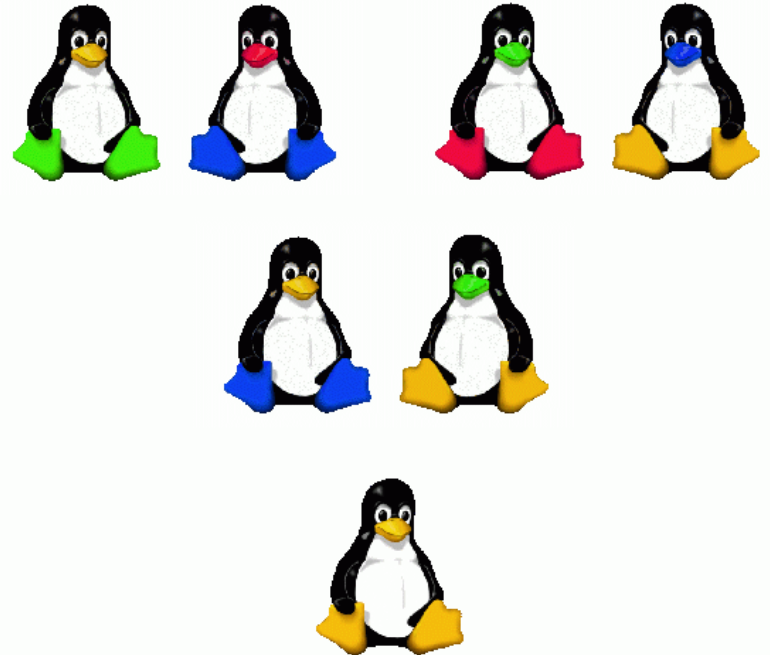
Βελτιστοποίηση Συστημάτων &
Υδροπληροφορική

Γενετικοί Αλγόριθμοι

Χρήστος Μακρόπουλος & Ανδρέας Ευστρατιάδης
Τομέας Υδατικών Πόρων και Περιβάλλοντος
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

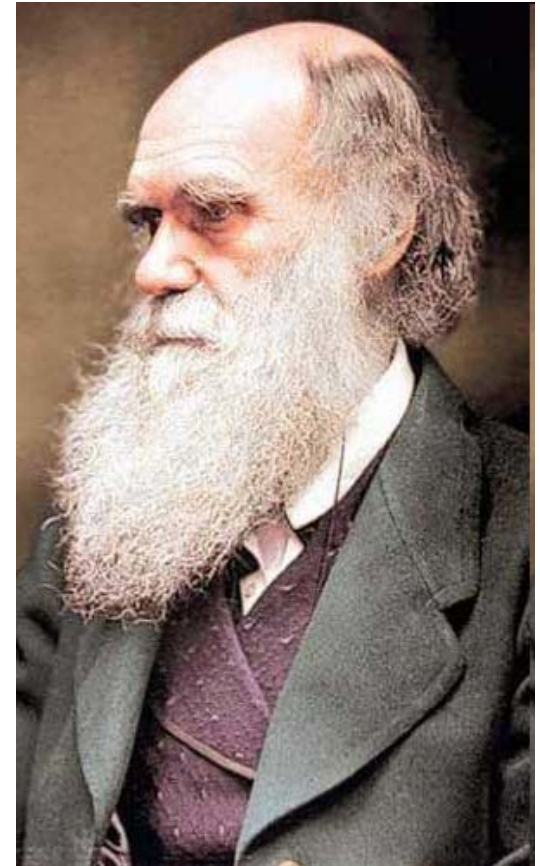
Γενετικοί αλγόριθμοι: Τι είναι;

Αλγόριθμοι επίλυσης
προβλημάτων που
βασίζονται (ή καλύτερα:
είναι εμπνευσμένοι)
από τις αρχές της
Βιολογικής Εξέλιξης
(Δαρβίνος).



Γενετικοί Αλγόριθμοι

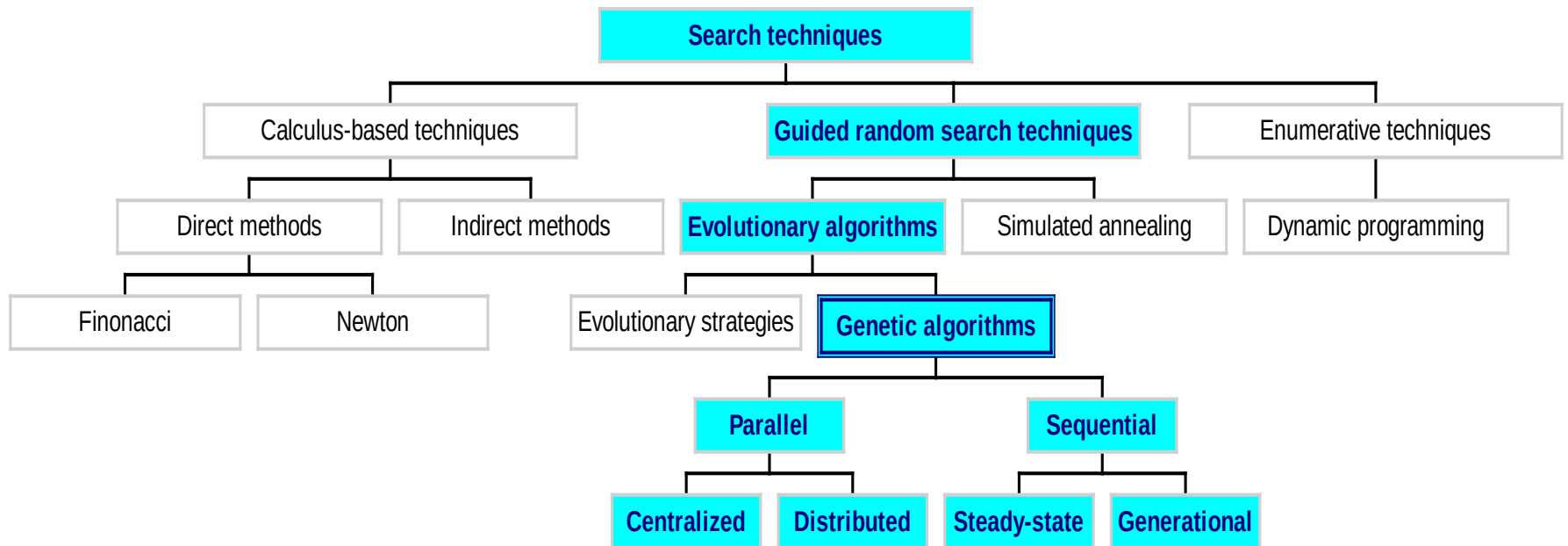
- **Θεωρία της εξέλιξης** (C. Darwin, 1858)
 - **Εξέλιξη** = Διαδικασία που οδηγεί στην **αύξηση της ικανότητας** ενός πληθυσμού να επιβιώνει σε ένα δεδομένο **περιβάλλον**: **Εξελικτική προσαρμογή**
 - Με την **αναπαραγωγή**, η ικανότητα αυτή περνά στις επόμενες γενιές (από τα άτομα που την είχαν και άρα **επέζησαν για να αναπαραχθούν**): **Φυσική επιλογή**



Η αρχή..

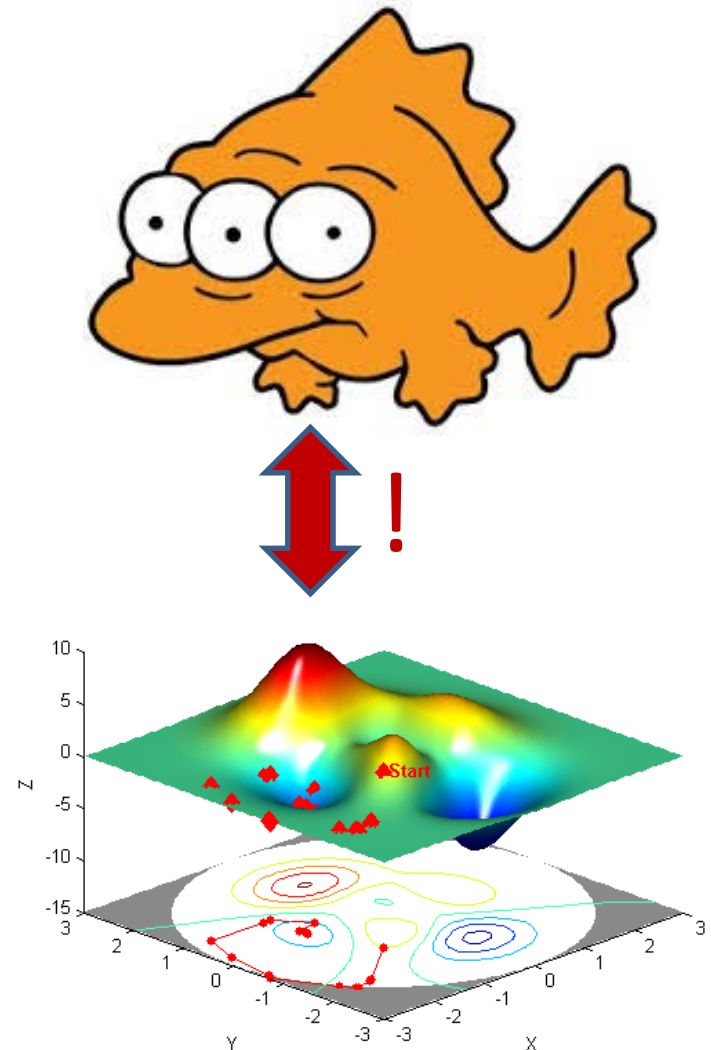
- Holland, John H (1975), *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor (η **βασική ιδέα**)
- Michalewicz, Zbigniew (1999), *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Springer-Verlag (το καλύτερο **textbook** μέχρι σήμερα)

Τι σχέση έχουν οι ΓΑ με τους υπόλοιπους αλγορίθμους που ξέρουμε;



Η βασική αναλογία (Holland)

- αντί για **άτομα** έχουμε **λύσεις**
- πολλές λύσεις (όχι απαραίτητα καλές) είναι ένας **πληθυσμός**
- ικανότητα επιβίωσης σε **συγκεκριμένο περιβάλλον** είναι η επίδοσή της λύσης σε σχέση με την **στοχική συνάρτηση**
- τώρα πως οι λύσεις **αναπαράγονται** είναι το (βασικό) θέμα μας ...



Γενετικοί Αλγόριθμοι: Ορολογία...

- Δανεισμένη από το χώρο της Γενετικής.
- Αναφερόμαστε σε **άτομα** μέσα σε ένα **πληθυσμό**. Πολύ συχνά αυτά τα άτομα καλούνται επίσης **χρωμοσώματα**.
- Τα **χρωμοσώματα** αποτελούνται από διάφορα στοιχεία που ονομάζονται **γονίδια**.
- Κάθε γονίδιο επηρεάζει την **κληρονομικότητα** ενός ή περισσότερων χαρακτηριστικών (είναι δηλαδή **συνδεδεμένη με μια παράμετρο της λύσης**)

Ο βασικός εξελικτικός κύκλος

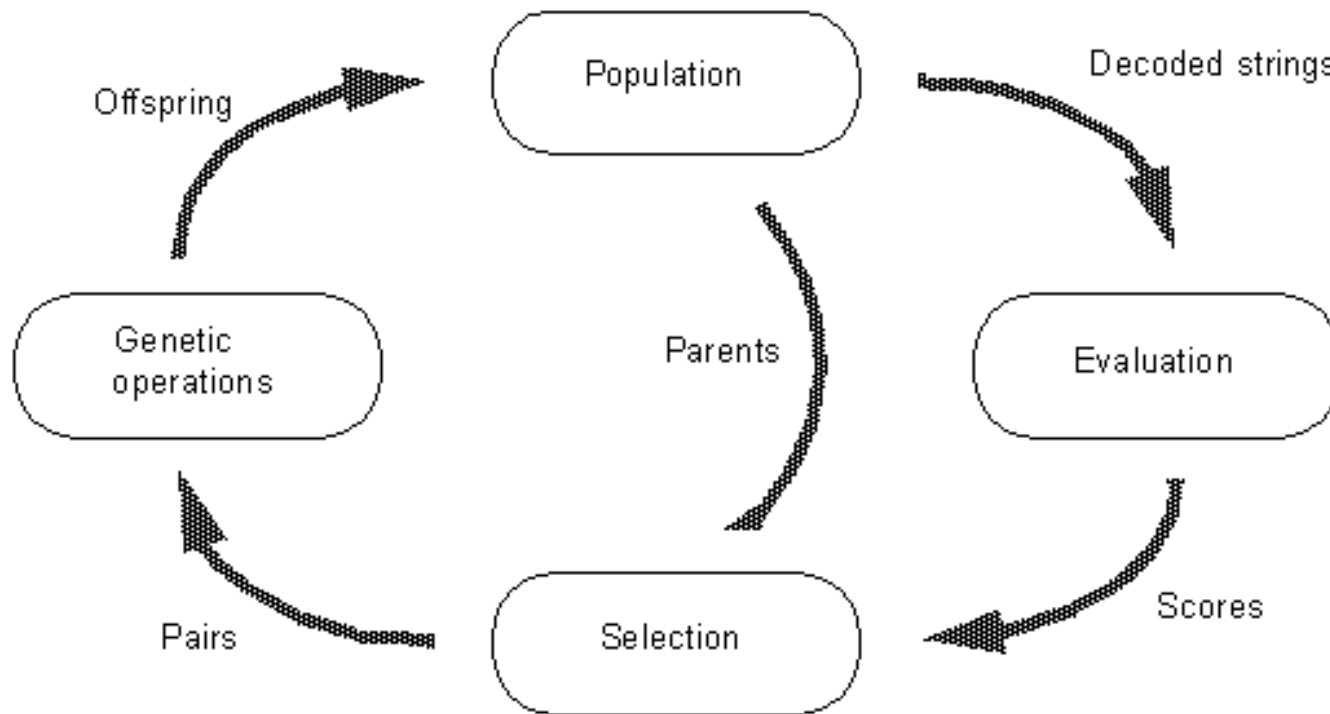


Figure 5.2: The “reproduction” cycle.

Πληθυσμιακή βελτιστοποίηση

Γενετικοί αλγόριθμοι: Πώς λειτουργούν;

- **Δημιουργούν** έναν πληθυσμό κωδικοποιημένων πιθανών λύσεων
- Υπολογίζουν την **στοχική συνάρτηση** για κάθε άτομο (λύση) του δημιουργούμενου πληθυσμού (fitness evaluation - επίδοση)
- **Εξελίσσουν** τον πληθυσμό εφαρμόζοντας γενετικές διαδικασίες (**τελεστές**) που επηρεάζονται από την επίδοση:
 - Διαδικασίες **επιλογής**,
 - Διαδικασίες **διασταύρωσης**,
 - Διαδικασίες **μετάλλαξης**.
- Δημιουργούν νέο πληθυσμό που αντικαθιστά τον προηγούμενο με βάση την επίδοση.
- Επαναλαμβάνουν τη διαδικασία μέχρι να «βρουν λύση».

Για να έχουμε έναν Γ.Α.
χρειαζόμαστε 5 πράγματα:

1. Γενετική αναπαράσταση
2. Τρόπο δημιουργίας ενός αρχικού πληθυσμού
3. Στοχική συνάρτηση αξιολόγησης
4. Γενετικούς τελεστές
5. Τιμές για τις διάφορες παραμέτρους (του ΓΑ)

...Γενετικοί αλγόριθμοι: Πώς λειτουργούν;

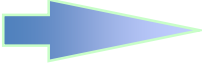
Για να έχουμε έναν Γ.Α. χρειαζόμαστε 5 πράγματα:

- 1. Γενετική αναπαράσταση**
2. Τρόπο δημιουργίας ενός αρχικού πληθυσμού
3. Στοχική συνάρτηση αξιολόγησης
4. Γενετικούς τελεστές
5. Τιμές για τις διάφορες παραμέτρους (του ΓΑ)

Τι θα μπορούσε να είναι ένα άτομο ενός πληθυσμού;

- Δυαδικά strings (0101 ... 1100)
- Πραγματικοί αριθμοί (43.2 -33.1 ... 0.0 89.2)
- Εναλλακτικές ακολουθίες στοιχείων (E11 E3 E7 ... E1 E15)
- Λίστες κανόνων (R1 R2 R3 ... R22 R23)
- Στοιχεία του προβλήματος (genetic programming)
- Πίνακες (ένα Raster file)
- ...οποιαδήποτε άλλη δομή

Γενετική Αναπαράσταση: (δυαδική) κωδικοποίηση

(11, 6, 9)  **1011 0110 1001**

Στο δυαδικό κάθε αριθμός είναι μια αύξουσα δύναμη του 2 ξεκινώντας από το 2^0

π.χ. $100101 = [(1) \times 2^5] + [(0) \times 2^4] + [(0) \times 2^3] + [(1) \times 2^2] + [(0) \times 2^1] + [(1) \times 2^0] = 37$

1010=?

...Γενετικοί αλγόριθμοι: Πώς λειτουργούν;

Για να έχουμε έναν Γ.Α. χρειαζόμαστε 5 πράγματα:

1. Γενετική αναπαράσταση
2. Τρόπο δημιουργίας ενός αρχικού πληθυσμού
3. Στοχική συνάρτηση αξιολόγησης
4. Γενετικούς τελεστές
5. Τιμές για τις διάφορες παραμέτρους (του ΓΑ)

...Γενετικοί αλγόριθμοι: Πώς λειτουργούν;

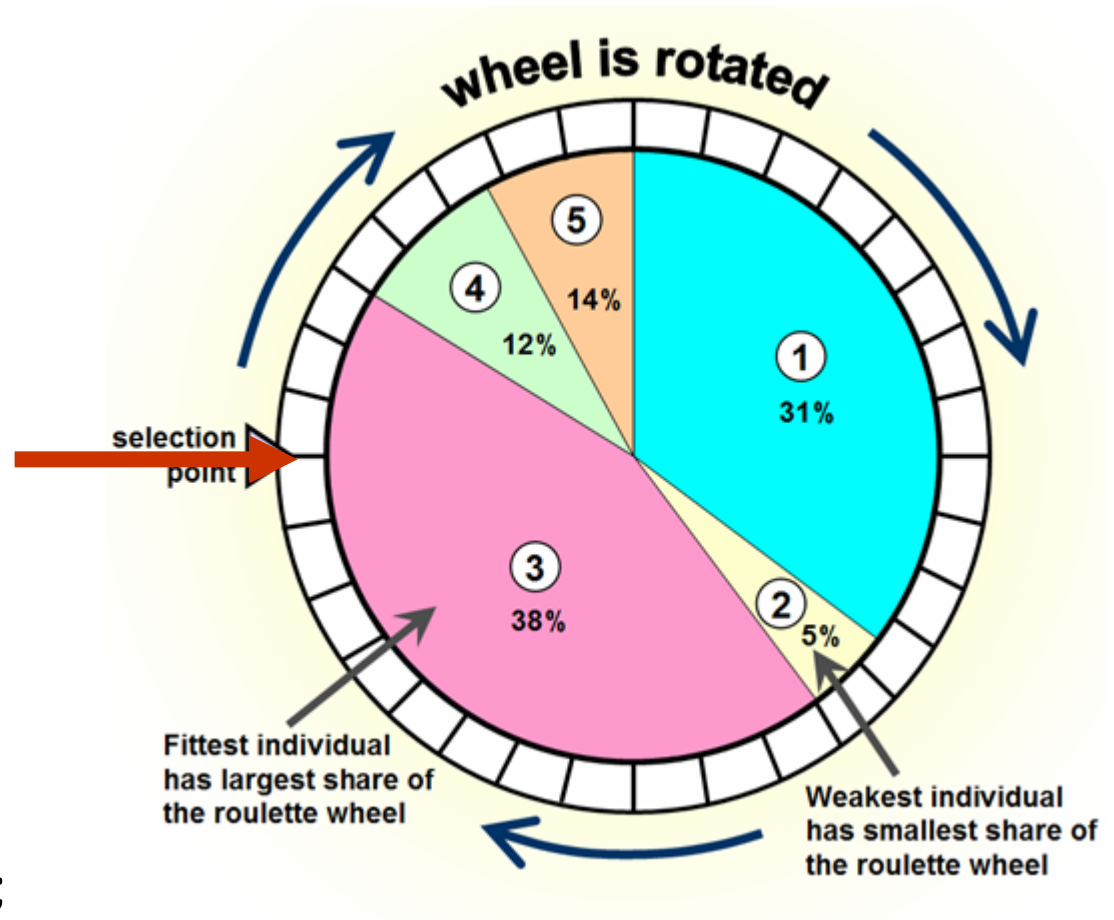
Για να έχουμε έναν Γ.Α. χρειαζόμαστε 5 πράγματα:

1. Γενετική αναπαράσταση
2. Τρόπο δημιουργίας ενός αρχικού πληθυσμού
3. Στοχική συνάρτηση αξιολόγησης
- 4. Γενετικούς τελεστές (Επ., Διασ, Μεταλλαξη)**
5. Τιμές για τις διάφορες παραμέτρους (του ΓΑ)

Επιλογή: Μηχανισμός ρουλέτας

$$\Pr(x_i) = \frac{f(x_i)}{\sum_j f(x_j)}$$

Όπου $f(x)$: η τιμή της στοχικής
στο x



Πως «γυρνάμε» τον τροχό;

Γενετικοί Τελεστές

1. Επιλέγω ζεύγος/άτομο: Να διασταυρώσω/μεταλλάξω; a%/b%
2. Αν προκύψει να διασταυρώσω/μεταλλάξω, τότε:
3. Επιλέγω **τυχαίο** σημείο (διασταύρωσης και μετάλλαξης), και:

Διασταύρωση

1 0 0 1 | 1 1 1 0

1 0 1 1 | 0 0 1 0



1 0 0 1 | 0 0 1 0

1 0 1 1 | 1 1 1 0

Σημείο διασταύρωσης

Μετάλλαξη

1 0 0 1 1 1 1 0



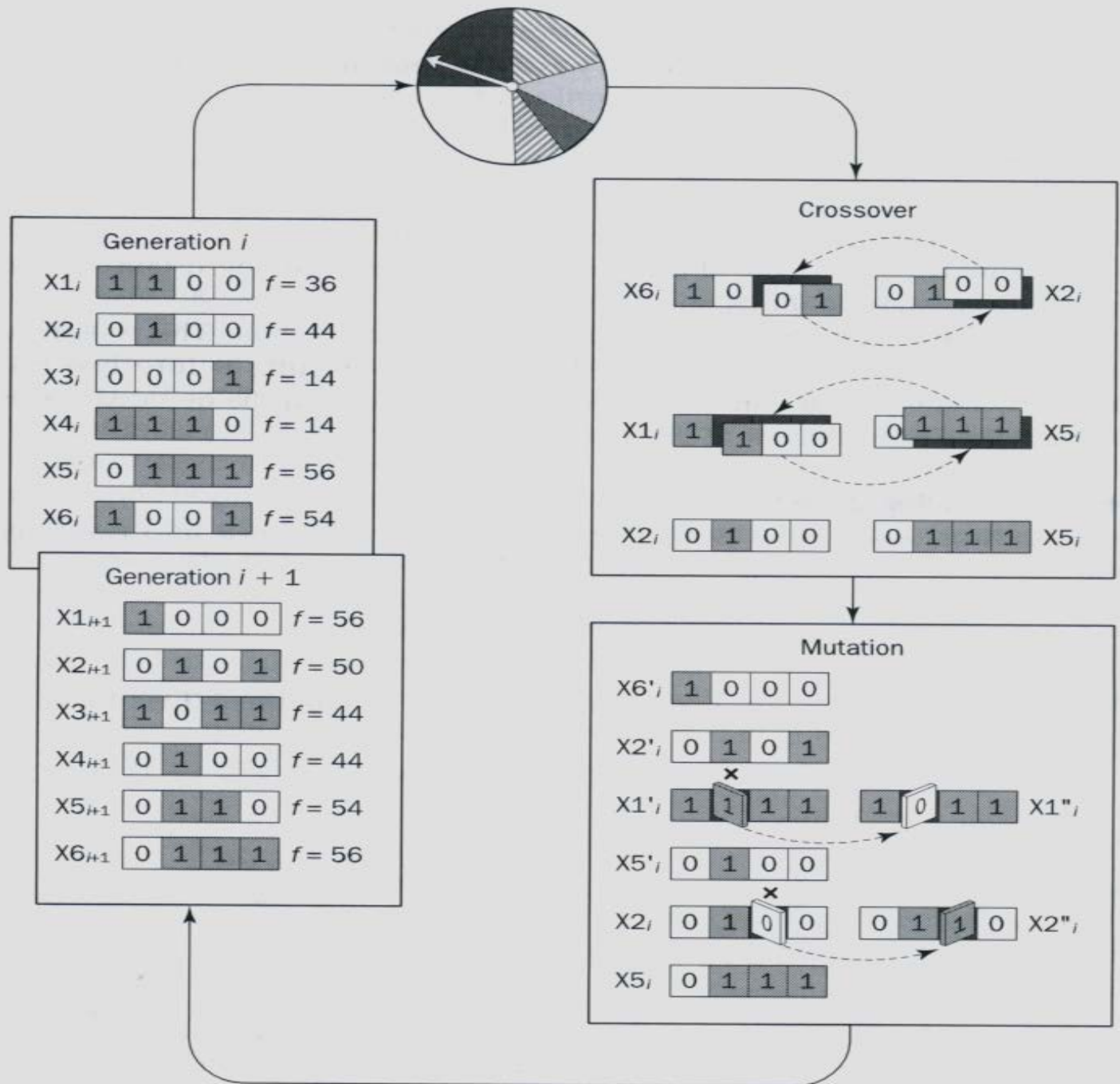
1 0 0 1 1 0 1 0

Ψηφίο μετάλλαξης

Ποιά η πιθανότητα
μετάλλαξης ενός γονιδίου;

Γενετικός
Κύκλος: η κάθε
γενιά είναι
κατά μέσο όρο
καλύτερη από
τη
προηγούμενη

(και
τουλάχιστον το
ίδιο καλή)



Το θεώρημα των σχημάτων (Holland, 1975)

Σχήμα (Schema) = Ακολουθία που περιλαμβάνει 0, 1
και '*' ("οτιδήποτε")

Π.χ. το σχήμα

1	*	*	0
---	---	---	---

παριστάνει το σύνολο
των δυαδικών ακολουθιών
(χρωμοσωμάτων)

1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0

Μια δυαδική ακολουθία μήκους L είναι εκπρόσωπος καθενός από τα 2^L διαφορετικά σχήματα με τα οποία ταιριάζει.

Το θεώρημα αποδεικνύει ότι σχήματα μικρού μήκους με απόδοση άνω του μέσου όρου **αυξάνουν εκθετικά μετά την εφαρμογή γενετικών τελεστών, σε επόμενες γενιές.**

Εξίσωση ανάπτυξης σχημάτων

Κάτω όριο της αναμενόμενης συχνότητας του σχήματος s (λαμβάνοντας υπόψη μόνο την αρνητική επίδραση των τελεστών διασταύρωσης και μετάλλαξης):

$$E[\alpha(s, t + 1)] \geq \frac{f(s, t)}{F(t)} \alpha(s, t) \left(1 - p_c \frac{l(s)}{L - 1} \right) (1 - p_m)^{\tau(s)}$$

Προσοχή:

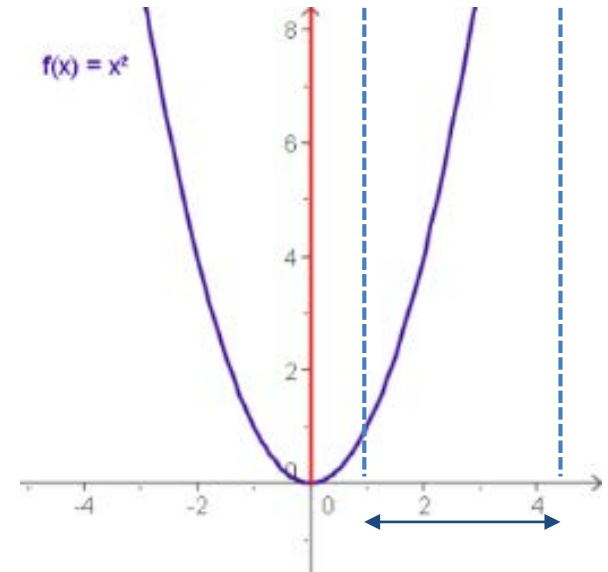
- Το θεώρημα αναφέρεται ουσιαστικά σε πληθυσμό με άπειρα μέλη – στην πράξη η αναμενόμενη συχνότητα μπορεί να διαφοροποιείται.
- Η ακριβής μορφή της διατύπωσης εξαρτάται από τους συγκεκριμένους τελεστές.
- Μιλάει για «συχνότητα εμφάνισης» και δε μας λέει τίποτα για το ποια σχήματα (δηλ. πόσο καλά σχήματα) περνάνε στην επόμενη γενιά.

Παράδειγμα:

Εύρεση μεγίστου της

$$F(x)=x^2$$

όπου x είναι ακέραιος στο
διάστημα $[1, 31]$.



Η κωδικοποίηση

Θέλουμε να **αναπαραστήσουμε** αριθμούς μέχρι το 31, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε χρωμοσώματα των πόσων γονιδίων (στο δυαδικό);

Και πόσα θα θέλαμε για τον αριθμό 32=?

Παράδειγμα: Η αρχικοποίηση

- Δημιουργία αρχικού πληθυσμού (έστω μεγέθους 4) με τυχαίο τρόπο:

$$A_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 1 = 13_{10}$$

$$A_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 0 = 24_{10}$$

$$A_3 = 0\ 1\ 0\ 0\ 0 = 8_{10}$$

$$A_4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 1 = 19_{10}$$

Παράδειγμα: Η αξιολόγηση

$$F(A_1) = 13^2 = 169$$

$$F(A_2) = 24^2 = 576$$

$$F(A_3) = 8^2 = 64$$

$$F(A_4) = 19^2 = 361$$

Συνολική Απόδοση: 1170

Μέση απόδοση: 293

Παράδειγμα: Η επιλογή

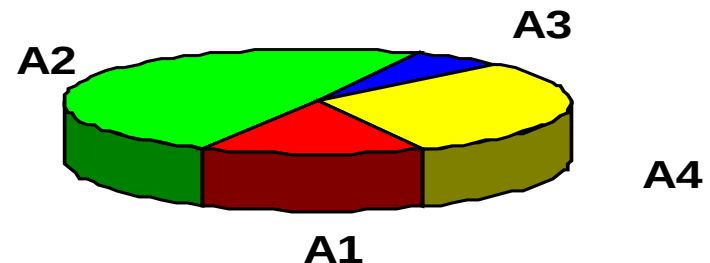
Ρουλέτα: κάθε μέλος του πληθυσμού έχει πιθανότητα επιλογής ίση με τη σχετική του απόδοση στον τρέχοντα πληθυσμό.

$$P(A_1) = 0.14$$

$$P(A_2) = 0.49$$

$$P(A_3) = 0.06$$

$$P(A_4) = 0.31$$



Παράδειγμα: Η αναπαραγωγή

- Επιλέγουμε 4 άτομα για αναπαραγωγή - Ο προσωρινός πληθυσμός μετά την εφαρμογή της ρουλέτας:

$$A'_1 = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$$

$$A'_2 = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$A'_3 = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$A'_4 = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1$$

Με αρχικό:

$$A1 = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1$$

$$A2 = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$A3 = 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$A4 = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1$$

Παράδειγμα: Η διασταύρωση

- Επιλογή με τυχαίο τρόπο των ατόμων που θα διασταυρώσουν το γενετικό υλικό τους (από τους επιλεγμένους με τη ρουλέτα)
- Έστω ότι διασταυρώνονται το A'_1 με το A'_2 με σημείο διασταύρωσης το 4 και το A'_3 με το A'_4 με σημείο διασταύρωσης το 2:

$$\begin{array}{l} A'_1 = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \mid 1 \\ A'_2 = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \mid 0 \end{array} \xrightarrow{\text{}} \begin{array}{l} A''_1 = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \mid 0 \\ A''_2 = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \mid 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A'_3 = 1 \ 1 \mid 0 \ 0 \ 0 \\ A'_4 = 1 \ 0 \mid 0 \ 1 \ 1 \end{array} \xrightarrow{\text{}} \begin{array}{l} A''_3 = 1 \ 1 \mid 0 \ 1 \ 1 \\ A''_4 = 1 \ 0 \mid 0 \ 0 \ 0 \end{array}$$

Παράδειγμα: Η μετάλλαξη

Με τυχαίο τρόπο επιλέγονται γονίδια των οποίων η τιμή αντιστρέφεται:

$$\mathbf{A}''_1 = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$\mathbf{A}''_2 = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1$$

$$\mathbf{A}''_3 = 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1$$

$$\mathbf{A}''_4 = 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$



$$\mathbf{A}'''_1 = 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$\mathbf{A}'''_2 = 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1$$

$$\mathbf{A}'''_3 = 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1$$

$$\mathbf{A}'''_4 = 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0$$

Παράδειγμα: Ο νέος πληθυσμός

$$A_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 0 = 12_{10} \Rightarrow F(12) = 144$$

$$A_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 1 = 25_{10} \Rightarrow F(25) = 625$$

$$A_3 = 1\ 1\ 0\ 1\ 1 = 27_{10} \Rightarrow F(27) = 729$$

$$A_4 = 1\ 0\ 0\ 1\ 0 = 18_{10} \Rightarrow F(18) = 324$$

Συνολική Απόδοση: 1822 (από 1170)

Μέση απόδοση: 455.5 (από 293)

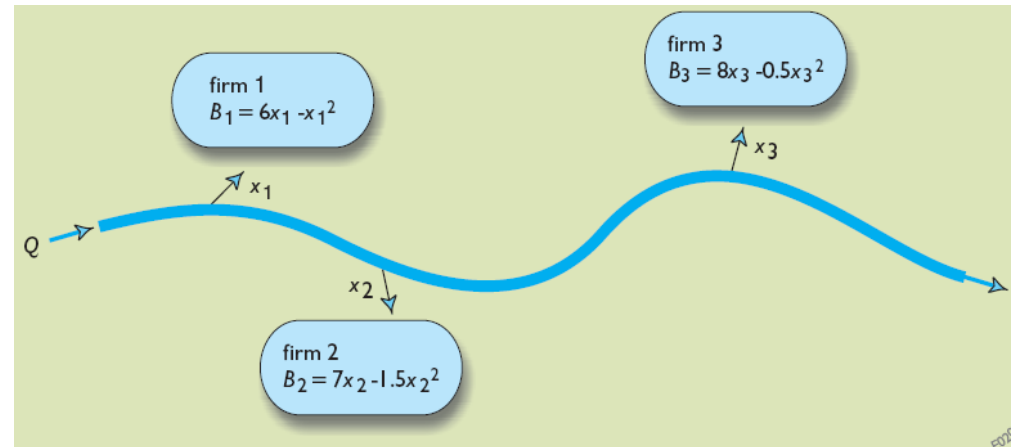
Προσέξτε ότι ο αλγόριθμος δεν γνωρίζει τη **μορφή**
του χώρου των λύσεων...

Παράδειγμα: Υδατικοί Πόροι (με δεκαδική κωδικοποίηση)

- Κατανομή νερού σε 3 χρήστες (για **μεγιστοποίηση κέρδους**)
- Μέγιστη ποσότητα νερού σε κάθε χρήστη να μην υπερβαίνει το 5
- Το άθροισμα όλων των χρηστών να μην υπερβαίνει το 6

$$0 \leq x_i \leq 5 \quad \text{for } i = 1, 2, \text{ and } 3.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$



$$\begin{aligned} \text{Maximize } B(X) = & (6x_1 - x_1^2) + (7x_2 - 1.5x_2^2) \\ & + (8x_3 - 0.5x_3^2) \end{aligned}$$

Διαδικασία επίλυσης

- Δημιουργούμε (τυχαία) ένα πληθυσμό εφικτών λύσεων
- Βασικοί παράμετροι ενός ΓΑ είναι ο αριθμός των λύσεων που εξετάζουμε και παράμετροι που καθορίζουν την επιλογή, διασταύρωση και μετάλλαξη
- Οι παράμετροι αυτοί καθορίζονται με δοκιμή και πλάνη (trial and error).
- Μια πιθανή λύση μπορεί να είναι η **[3,1,2]** που καθορίζει κατανομή $x_1=3$, $x_2=1$, and $x_3=2$.
- Μια άλλη λύση μπορεί να είναι η **[1,0,1]**
- Οι δύο αυτές λύσεις μπορούν να συνδυαστούν και να δώσουν 2 «απογόνους».

Διαδικασία επίλυσης

- Τα γονίδια των απογόνων καθορίζονται από την διασταύρωση και τη μετάλλαξη
- Ας υποθέσουμε ότι το σημείο διασταύρωσης καθορίζεται τυχαία και είναι μετά το πρώτο στοιχείο

3 | 1 2

1 | 0 1



?

Διαδικασία επίλυσης: μετάλλαξη

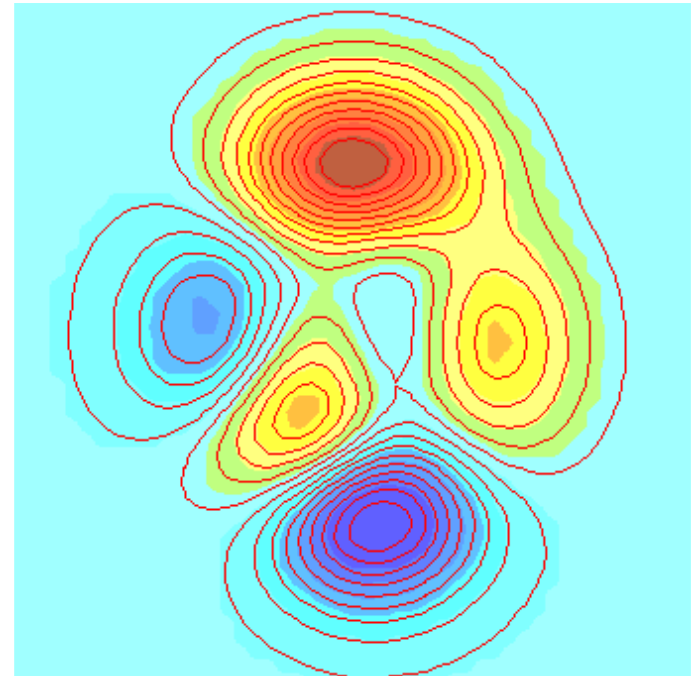
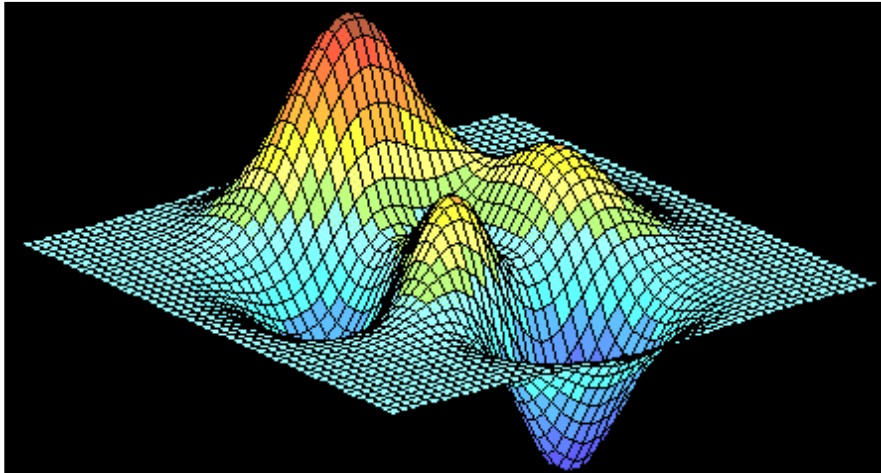
- Η μετάλλαξη καθορίζεται σε κάθε γονίδιο και συνεπάγεται την αλλαγή της τιμής του γονιδίου (με κάποιο προκαθορισμένο τρόπο – **εκτός αν είναι δυαδικό** οπότε απλά το 0 γίνεται 1 και αντίστροφα).
- Πχ, ας αποφασίσουμε ότι μετάλλαξη σημαίνει -1 (εκτός αν είναι μη εφικτό οπότε το γονίδιο γίνεται το μέγιστο) πχ το 0 γίνεται 5, ενώ το 2 γίνεται 1).
- Ας υποθέσουμε ότι μεταλλάσσουμε το μεσαίο ψηφίο του **112** και άρα έχουμε **102**.
- Η διαδικασία μας έδωσε από τα **312** και **101** → **301** και **102**.
- Πρέπει να υπολογίσουμε το όφελος για τις νέες λύσεις ($301 \rightarrow 16.5$ & $102 \rightarrow 19.0$)

Διαδικασία επίλυσης: επιλογή νέου πληθυσμού

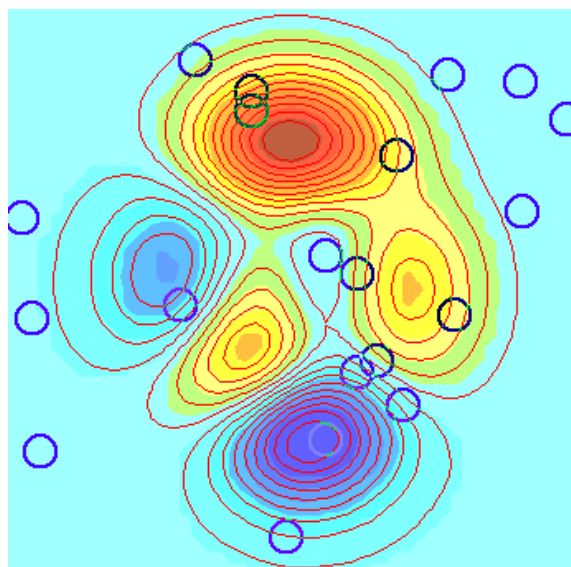
- Το άθροισμα των δύο οφελών είναι 35.5.
- Ορίζουμε ως πιθανότητα επιλογής της λύσης 301 το $16.5/35.5 = 0.47$ και της λύσης 102 το $19/35.5 = 0.53$
- Πρακτικά επιλέγοντας ένα τυχαίο αριθμό από μια **ομοιόμορφη κατανομή** [0 to 1], αν ο αριθμός αυτός είναι μεταξύ 0 to 0.47 τότε επιλέγουμε το 301. Αν είναι μεγαλύτερος επιλέγουμε το 102.
- Και η διαδικασία συνεχίζεται για μια ακόμα γενιά.

Παράδειγμα: μέγιστο της συνάρτησης *peaks*

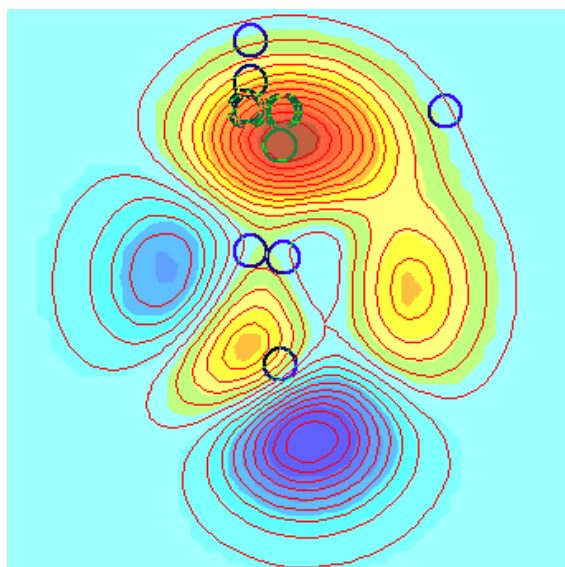
$$z = f(x, y) = 3*(1-x)^2*\exp(-(x^2) - (y+1)^2) - 10*(x/5 - x^3 - y^5)*\exp(-x^2-y^2) - 1/3*\exp(-(x+1)^2 - y^2).$$



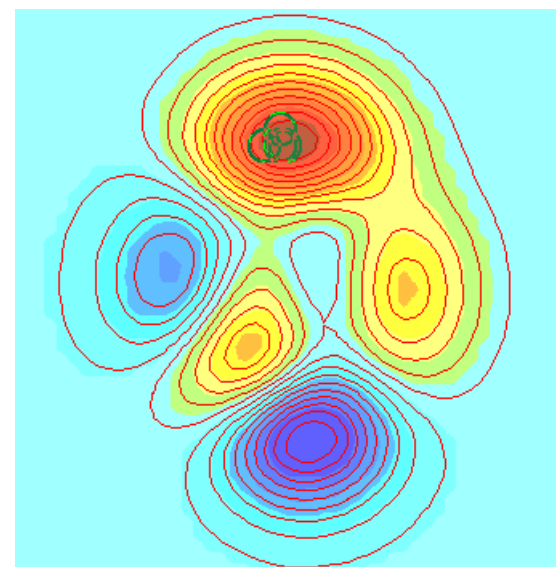
Παράδειγμα επίλυσης



Αρχικός πληθυσμός

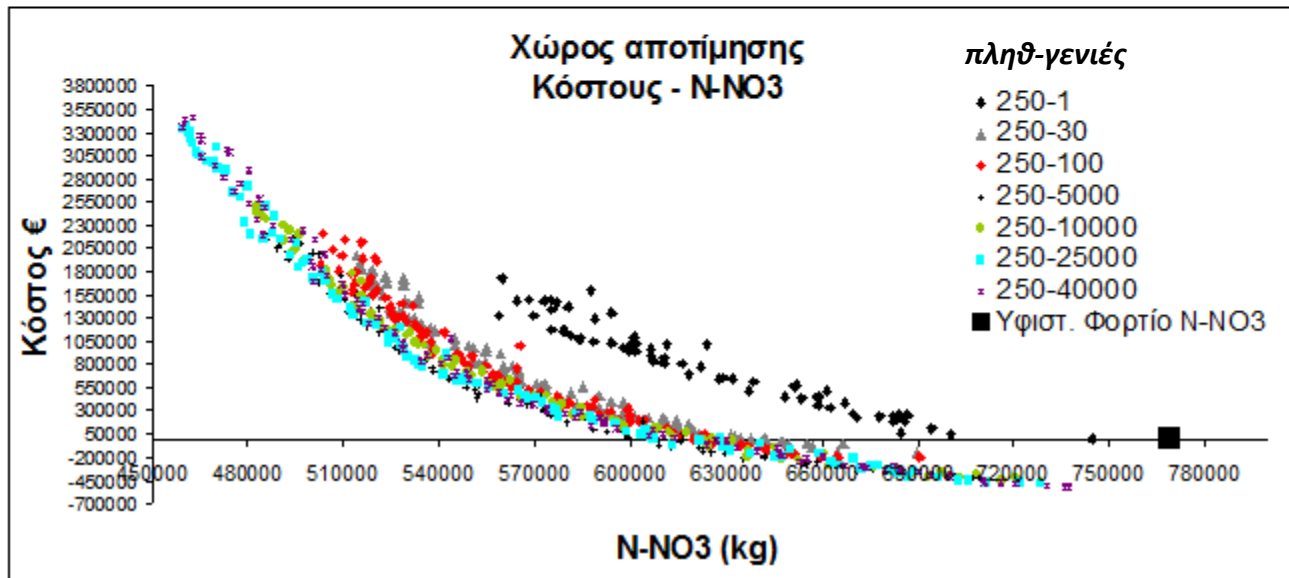
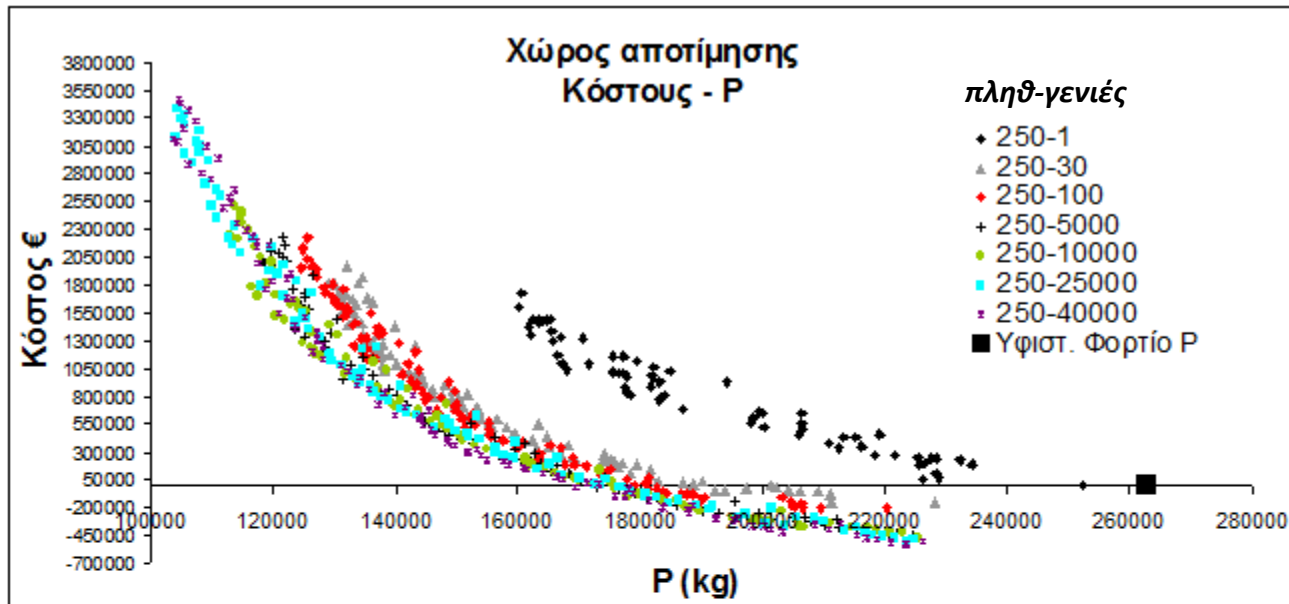


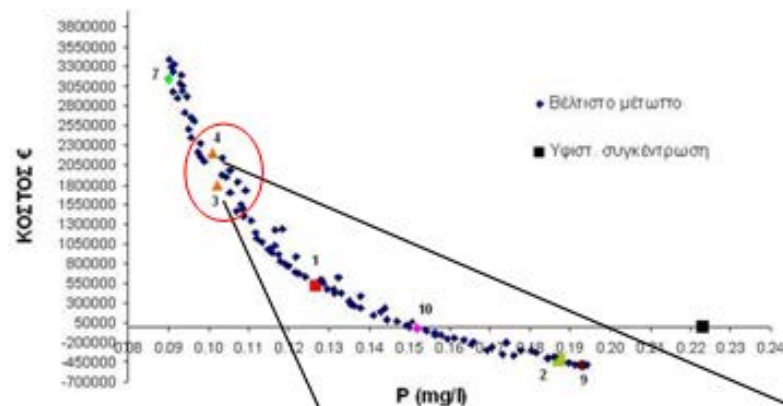
5η γενιά



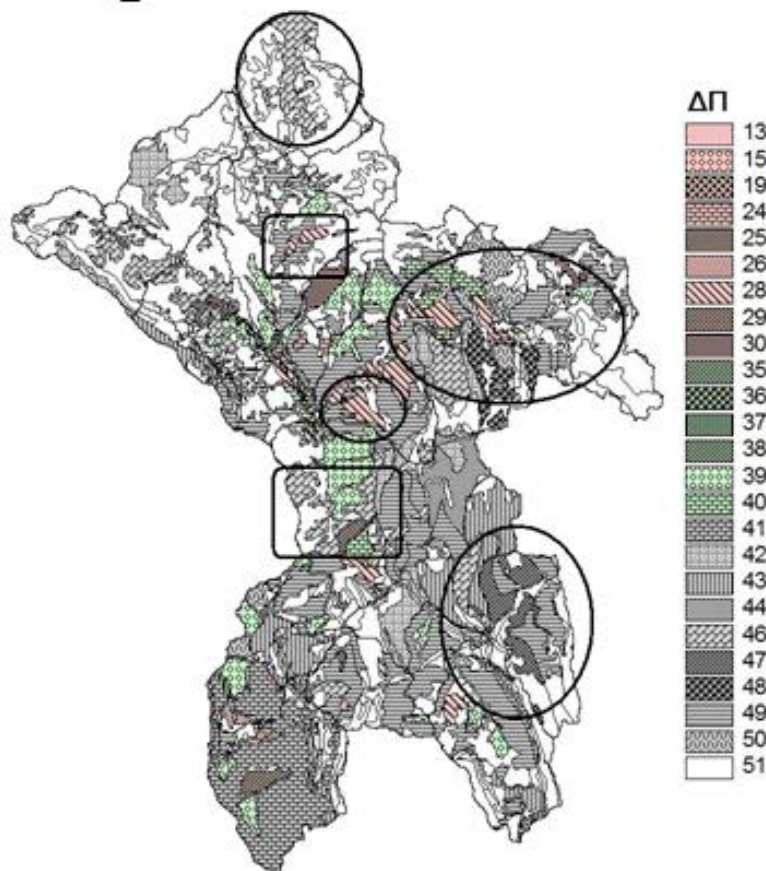
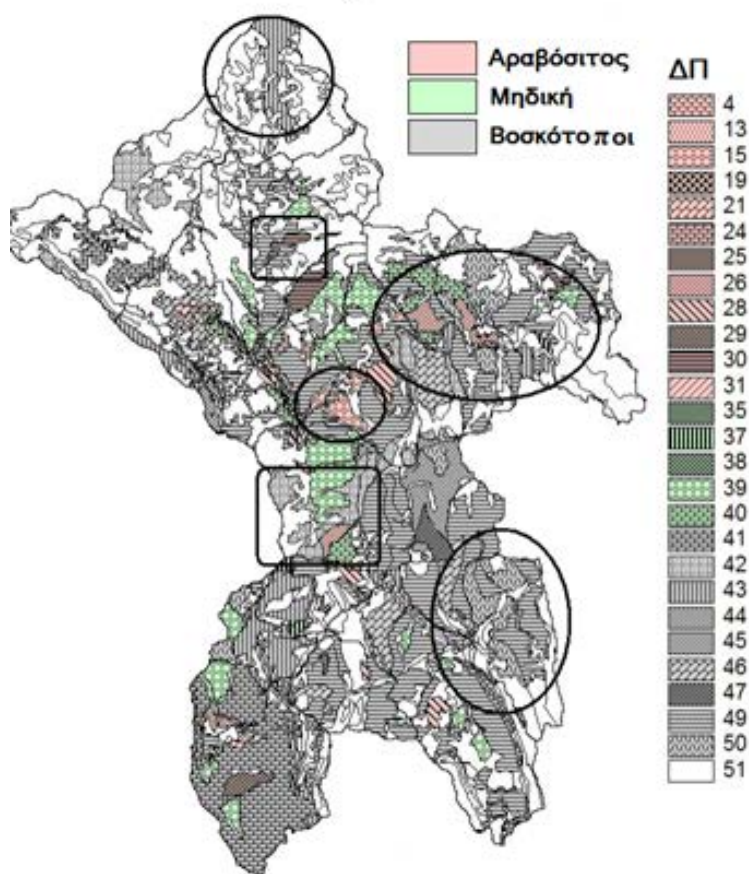
10η γενιά

Παράδειγμα εξέλιξης λύσεων ΓΑ για πρόβλημα διαχείρισης μη-σημειακής ρύπανσης





Η στοχική συνάρτηση δεν χρειάζεται να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη – συγκεκριμένα μπορούμε να μην μπορούμε καν να τη διατυπώσουμε!

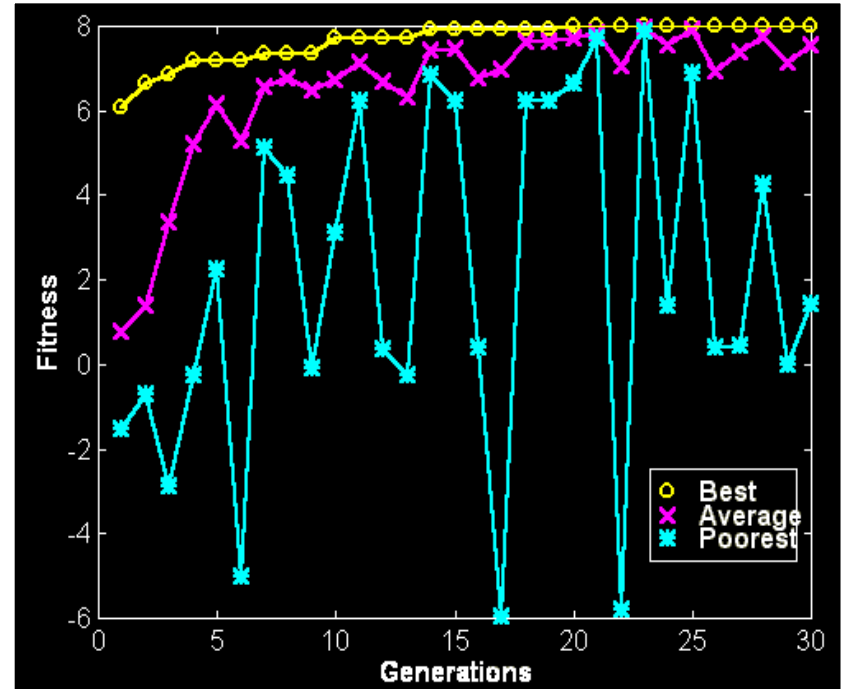


Ανοιχτά θέματα

- Επιλογή βασικών παραμέτρων:
 - Μορφή του ατόμου/χρωμοσώματος/λύσης
 - Μέγεθος πληθυσμού, πιθανότητα μετάλλαξης
 - Πολιτική επιλογής
 - Επιλογή τελεστών μετάλλαξης και διασταύρωσης..
- Κριτήρια Τερματισμού
- Επίδοση, σύγκλιση, ταχύτητα
- Προφανώς η αξιοπιστία της «βέλτιστης» λύσης εξαρτάται (πάντα) από την στοχική συνάρτηση ...

Επίδοση

- Εγκλωβισμός σε τοπικά ακρότατα;
 - Διασταύρωση: χρήση της **υπάρχουσας** πληροφορίας
 - Μετάλλαξη: αναζήτηση **νέας** πληροφορίας
- $P(\text{mutation}) \rightarrow 0$ όσο εξελίσσεται η βελτιστοποίηση



Επαναλήψεις

- Οι γενετικοί αλγόριθμοι περιλαμβάνουν **πολλές επαναλήψεις** των διαδικασιών που αναφέρθηκαν.
- Κάθε επανάληψη (ή γενιά) είναι καλύτερη από την προηγούμενη (σαν μέσος όρος).
- Η διαδικασία αυτή μεταφέρει στην επόμενη γενιά τις καλύτερες από την προηγούμενη γενιά: Όσο πιο υψηλό fitness (ουσιαστικά μεγαλύτερη τιμή στην αντικειμενική συνάρτηση) τόσο μεγαλύτερη η **πιθανότητα** να συμπεριληφθεί στον πληθυσμό της επόμενης γενιάς. **Πρόβλημα;**
- **Η απόλυτα καλύτερη λύση κάθε γενιάς συνήθως μεταφέρεται αυτούσια στην επόμενη γενιά (ελιτισμός).**
- Ο ΓΑ τελειώνει όταν οι επαναλήψεις δεν επιτυγχάνουν βελτίωση των λύσεων.
- **Προσοχή:** δεν υπάρχει καμία σιγουριά ότι η τελική λύση που βρήκε ο ΓΑ είναι η βέλτιστη.

Μέγεθος ενός πληθυσμού..

- Το μέγεθος του πληθυσμού εκφράζει πόσα χρωμοσώματα αποτελούν τον πληθυσμό (σε κάθε γενιά).
- Το μέγεθος του πληθυσμού είναι κρίσιμο για την απόδοση του Γενετικού Αλγορίθμου.
- Αν είναι λίγα τα χρωμοσώματα, ο ΓΑ έχει μόνο μερικές δυνατότητες να εκτελέσει διασταύρωση και ένα μικρό μέρος του χώρου καταστάσεων θα εξεταστεί.
- Οι μικροί πληθυσμοί βρίσκουν γενικά, τις **καλές λύσεις γρήγορα**, αλλά είναι συχνά **κολλημένοι στα τοπικά βέλτιστα**.
- Από την άλλη πλευρά, αν υπάρχουν πάρα πολλά χρωμοσώματα, ο ΓΑ θα μειώσει την ταχύτητά του.
- Οι μεγαλύτεροι πληθυσμοί είναι λιγότερο πιθανό να εγκλωβιστούν σε τα τοπικά βέλτιστα, αλλά γενικά παίρνουν περισσότερο χρόνο για να βρουν τις καλές λύσεις.
- Ένας καλός αριθμός χρωμοσωμάτων σε κάθε πληθυσμό είναι περίπου 20-30, όμως, κάποιες φορές μεγέθη 50-100 θεωρούνται καλύτερα.
- Το (βέλτιστο) μέγεθος του πληθυσμού εξαρτάται επίσης από την αναπαράσταση και κυρίως από το μέγεθος του χρωμοσώματος.

Συνοψίζοντας: Βασικά Χαρακτηριστικά των Γενετικών Αλγορίθμων

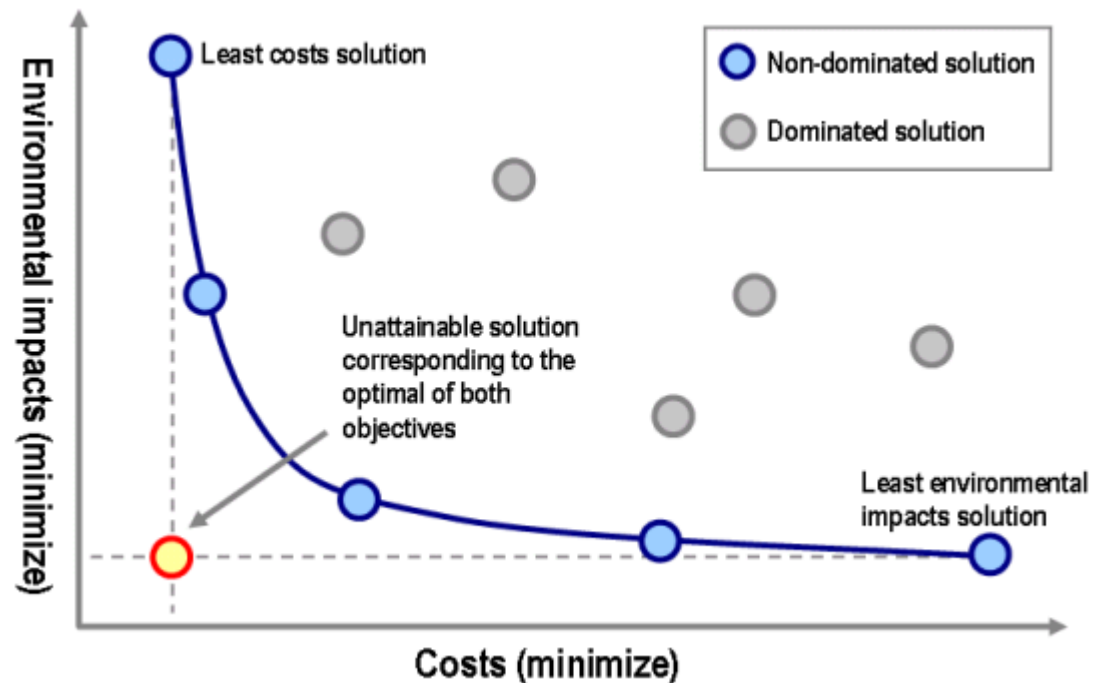
- Κάνουν αναζήτηση σε πολλά σημεία ταυτόχρονα και όχι μόνο σε ένα
- Χρησιμοποιούν **μόνο*** την **στοχική συνάρτηση** και καμία επιπρόσθετη πληροφορία
- Χρησιμοποιούν πιθανοτικούς κανόνες αναζήτησης νέων λύσεων και όχι ντετερμινιστικούς

Πλεονεκτήματα

- Απλή βασική ιδέα
- Γενικής φύσης – μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιοδήποτε πρόβλημα
- Υποστηρίζει πολύ-κριτηριακή βελτιστοποίηση
- Αντέχει θόρυβο/αβεβαιότητα
- Βγάζει πάντα μια απάντηση, η οποία και βελτιώνεται με το χρόνο
- Μπορούν να επιλύουν δύσκολα προβλήματα γρήγορα και αξιόπιστα.
- Μπορούν εύκολα να συνδεθούν με υπάρχοντα μοντέλα και συστήματα
- Είναι εύκολα επεκτάσιμοι και εξελίξιμοι (δεκάδες την ημέρα!)
- Μπορούν να συνδυαστούν (σε υβριδικές μορφές) με άλλες μεθόδους.
- Έχουν από τη φύση τους το στοιχείο του παραλληλισμού και άρα προσφέρεται για παράλληλη υλοποίηση.

Πολυκριτηριακοί ΓΑ

- Ή καλύτερα πολύ-στοχικοί
- Βελτιστοποίηση κατά Pareto



Πολλοί (!) πολυκριτηριακοί Γενετικοί..

- VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithms) David Schaffer (1984)
- VOES(Vector Optimized Evolution Strategy) Frank Kursawe (1990).
- MOGA (Multi-objective GA) Fonseca and Fleming (1993).
- NSGA (Non-dominated Sorting GA) Srinivas and Deb (1994)
- NPGA (Niche-Pareto Genetic Algorithm) Horn et al. (1994)
- PPES (Predator-Prey Evolution Strategy) Laumanns et al. (1998)
- DSGA (Distributed Sharing GA) Hiroyasgu et al. (1999)
- DRLA (Distributed Reinforcement Learning Approach) Mariano and Morales (2000).
- Nash GA, (Game Theoretic) Sefrioui and Periaux (2000)
- REMOEA (Rudolph's Elitist MOEA) Rudolph (2001)
- ***NSGA-II (Non-dominated Sorting GA) Deb et al. (2000).***

Ορισμός Pareto

- Μια λύση είναι **βέλτιστη κατά Pareto** αν και μόνο αν:
 - Είναι τουλάχιστον τόσο καλή όσο οι άλλες λύσεις για όλους τους στόχους/κριτήρια και
 - Είναι καλύτερη από όλες τις άλλες λύσεις σε τουλάχιστον ένα στόχο/κριτήριο.

Κυριαρχία (dominance)

$$f_i(\vec{x}_1) \leq f_i(\vec{x}_2) \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

και

$$\exists i \in \{1, \dots, k\} : f_i(\vec{x}_1) < f_i(\vec{x}_2)$$

Για πρόβλημα ελαχιστοποίησης..

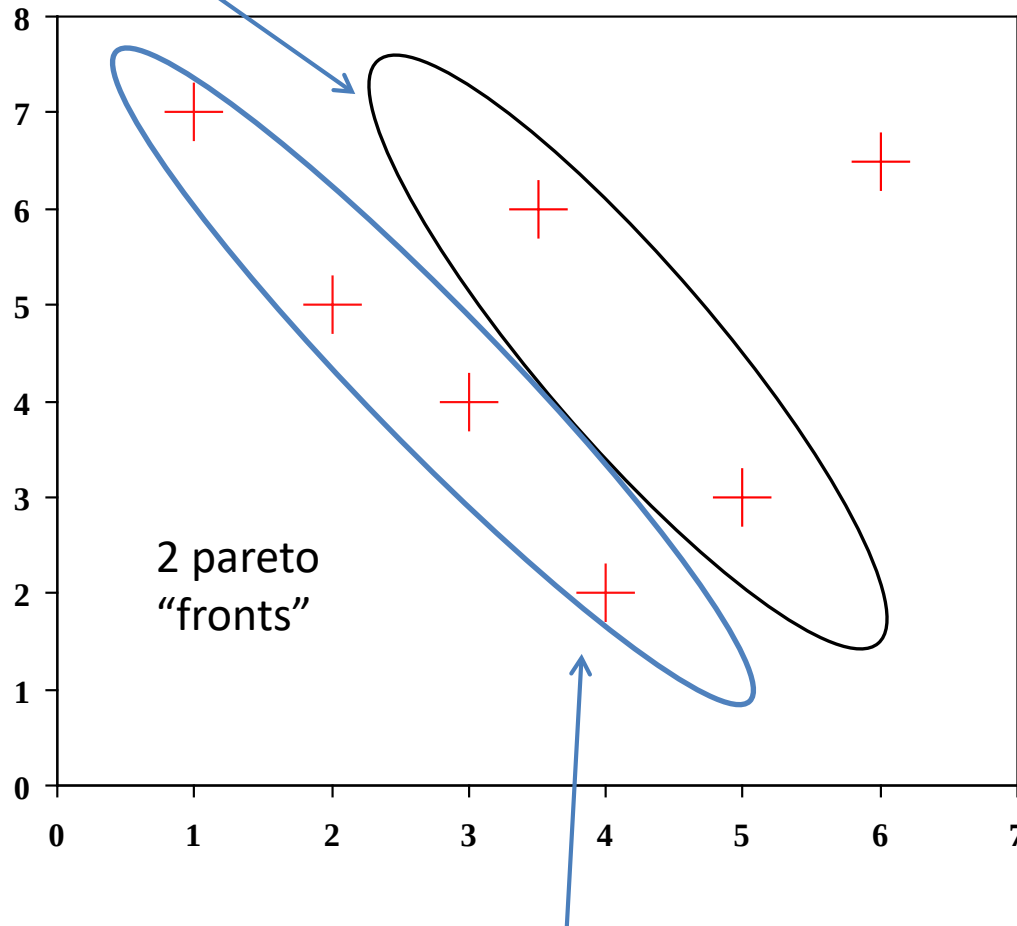
Μη κυριαρχούμενες λύσεις (non-dominated)

- Μπορούμε να έχουμε μόνο **μία κυρίαρχη λύση**
- Αλλά μπορούμε να έχουμε αρκετές **μη-κυριαρχούμενες** λύσεις (pareto set)

$$P := \left\{ x \in F \mid \left[\neg \exists x' \in F \right] \exists \left(\vec{f}(x') \preceq \vec{f}(x) \right) \right\}$$

Παράδειγμα

Κυριαρχούμενες λύσεις

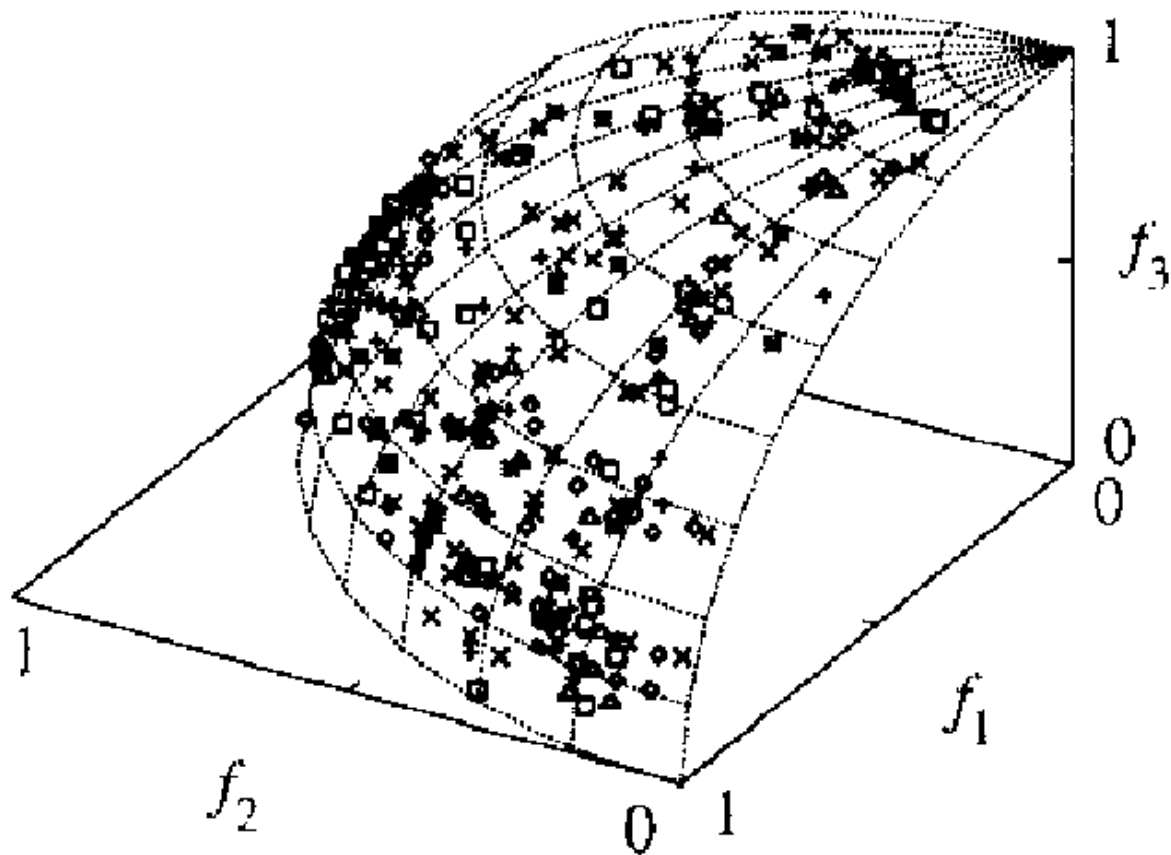


Μη κυριαρχούμενες λύσεις

Καθώς οι ΓΑ από τη φύση τους δημιουργούν πολλαπλές λύσεις (πληθυσμούς) είναι εύκολο να δημιουργήσεις pareto: είναι πολυκριτηριακοί από φυσικού τους!

(Fonseca and Fleming 1993)

Pareto Front σε 3 διαστάσεις



(Tamaki *et al.* 1996)

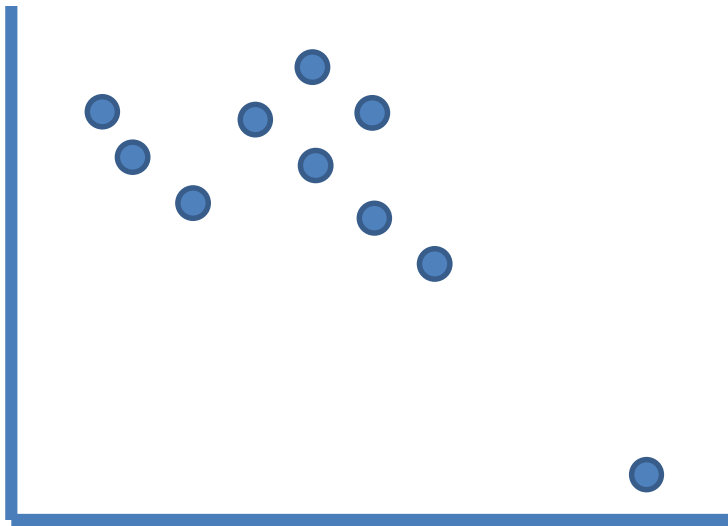
Παράδειγμα (ελαχιστοποίησης) και σε 4 διαστάσεις

<i>Candidate</i>	f_1	f_2	f_3	f_4
1	5	6	3	10
2	4	6	3	10
3	5	5	2	11
4	5	6	2	10
5	4	5	3	9

Παράδειγμα (ελαχιστοποίησης)

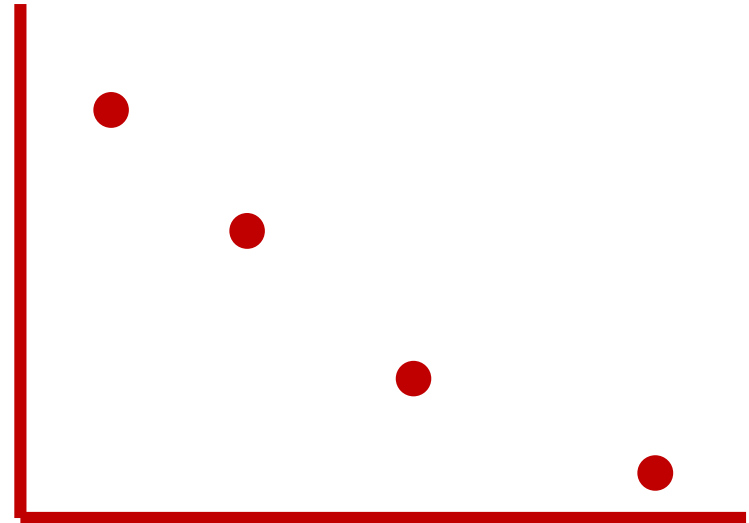
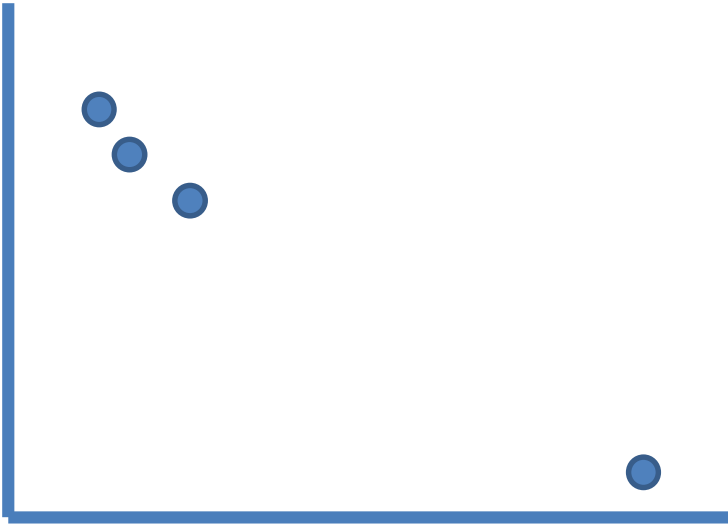
<i>Candidate</i>	f_1	f_2	f_3	f_4
1 (dominated by: 2,4,5)	5	6	3	10
2 (dominated by: 5)	4	6	3	10
3 (non-dominated)	5	5	2	11
4 (non-dominated)	5	6	2	10
5 (non-dominated)	4	5	3	9

Πρόβλημα των πολυστοχικών:



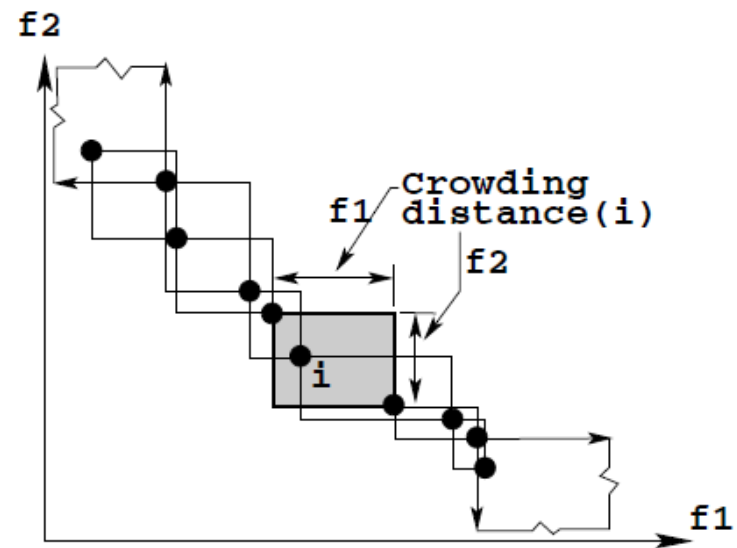
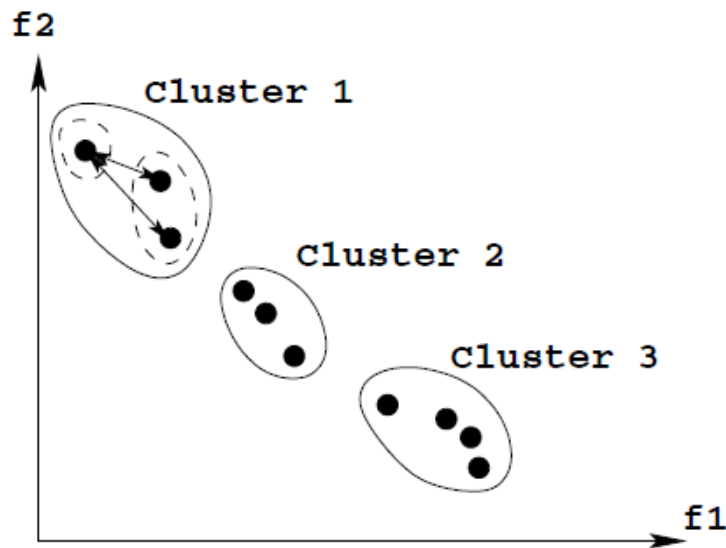
- Ας υποθέσουμε ότι ο πληθυσμός έχει 4 pareto λύσεις.
- Τι κάνω αν θέλω να διαλέξω 2 μόνο για διασταύρωση;
- Τι κάνω αν θέλω να διαλέξω 6 για διασταύρωση;

Ποιό Pareto είναι καλύτερο;

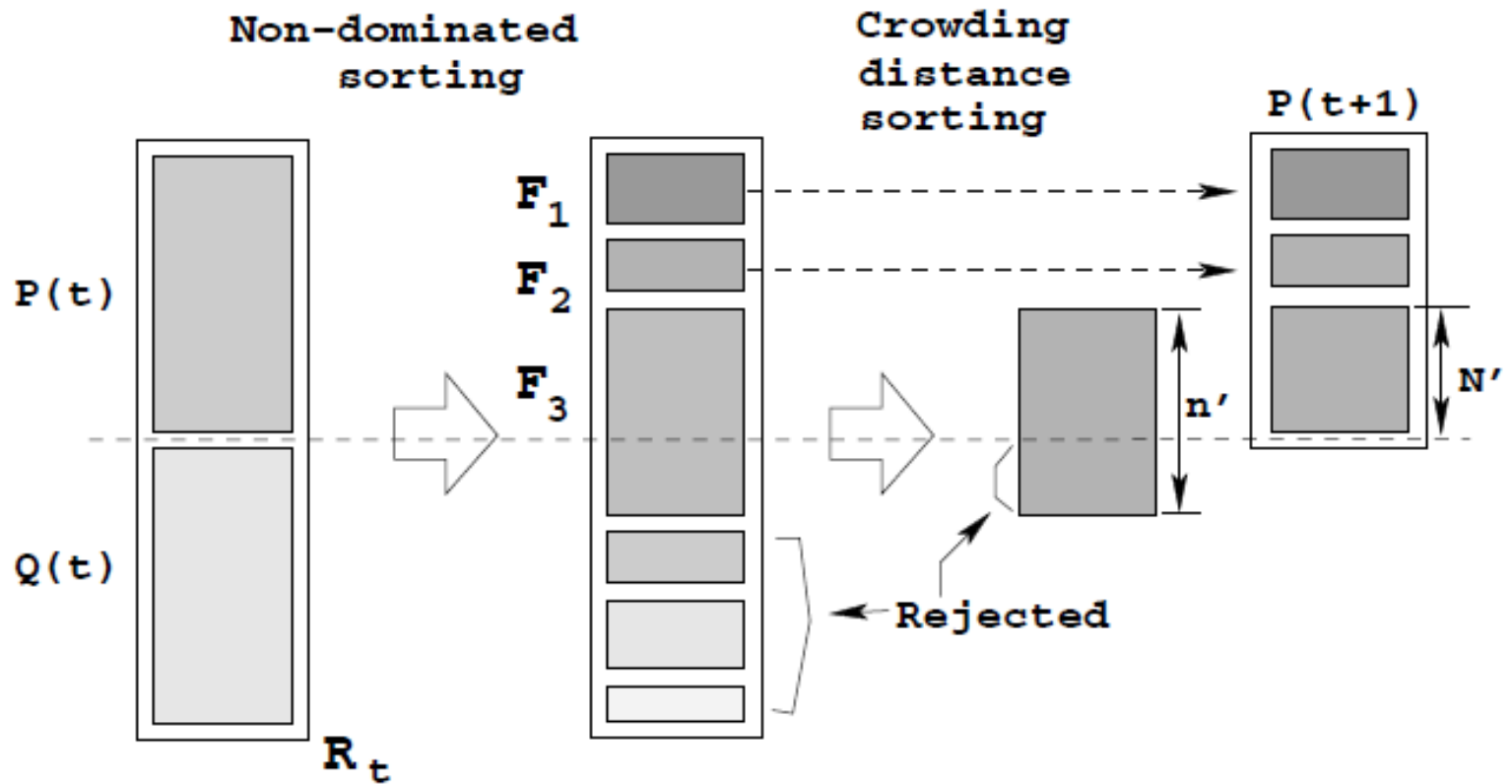


Το πρόβλημα της διασποράς (genetic diversity)

- Οι λύσεις εκτός από μη-κυριαρχούμενες πρέπει να μπορούν να **απεικονίζουν ικανοποιητικά** το Pareto front
- Άρα δεν έχουν νόημα 100 λύσεις στο ίδιο σημείο του χώρου (clustered) – είναι καλύτερα διασπαρμένες σε όλο το χώρο..



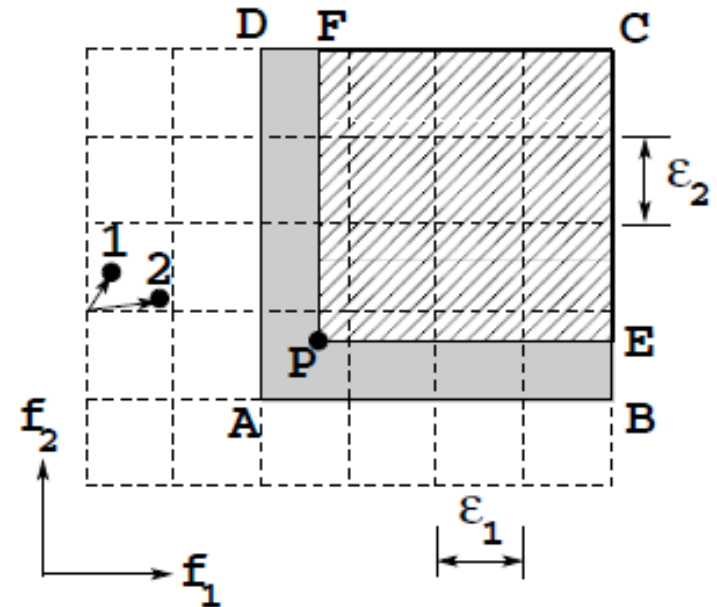
NSGAI



Epsilon Domination

(Laumanns , Deb et al., 2002)

- Διαφορετικός τρόπος να πετύχεις διασπορά λύσεων.
- Μόνο μια λύση (τυχαία ή την καλύτερη) σε κάθε κελί
- Προφανώς χάνονται κάποιες καλές λύσεις
- Έχεις όμως καλύτερη διασπορά
- Epsilon = μικρό...



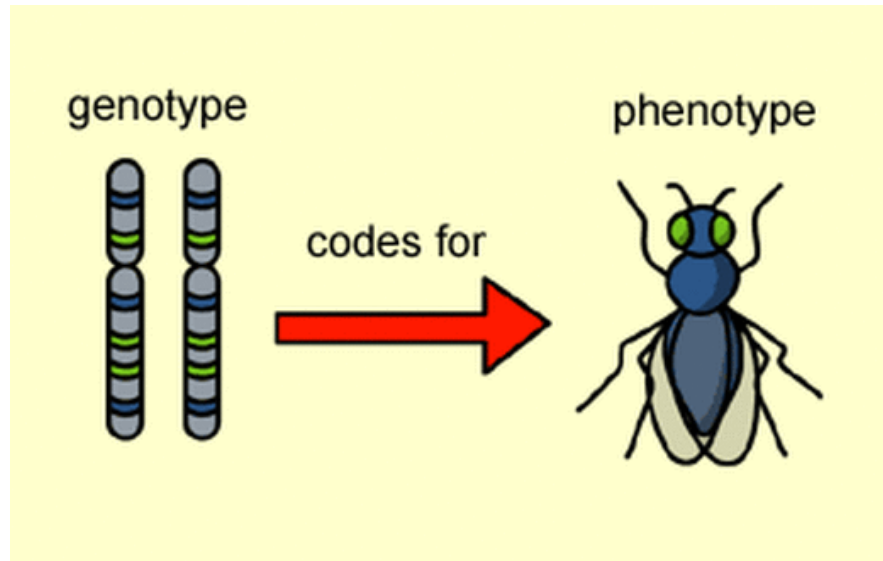
Κατανομή της ευρωστίας: Fitness Sharing

- Περιορίζει τον αριθμό ατόμων εντός της ίδιας περιοχής (niche), κατανέμοντας την ευρωστία τους
- Πρέπει να θέσουμε (υποκειμενικά) το μέγεθος της περιοχής σ_{share} είτε στον χώρο του **γενότυπου** είτε στου **φαινότυπου**
- Μετά τρέχουμε κανονικά τον ΓΑ
- **Τι πίεση** ασκεί μια τέτοια μεταβολή; (στο ρυθμό σύγκλισης; στο pareto;)

$$f'(i) = \frac{f(i)}{\sum_{j=1}^{\mu} sh(d(i, j))} \quad sh(d) = \begin{cases} 1 - d / \sigma & d < \sigma \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

μ : αριθμός ατόμων εντός της περιοχής, και $d(i, j)$ η **απόσταση** ανάμεσα στο άτομο και κάθε άλλο άτομο εντός περιοχής (με άλλα λόγια η **ομοιότητα** τους – **similarity** metrics?)

Γενότυπος - Φαινότυπος



$$X \longrightarrow f(x)$$

Για ομοιότητα στον φαινότυπο μιλήσαμε (ευκλείδεια απόσταση)

Ποιά απόσταση;

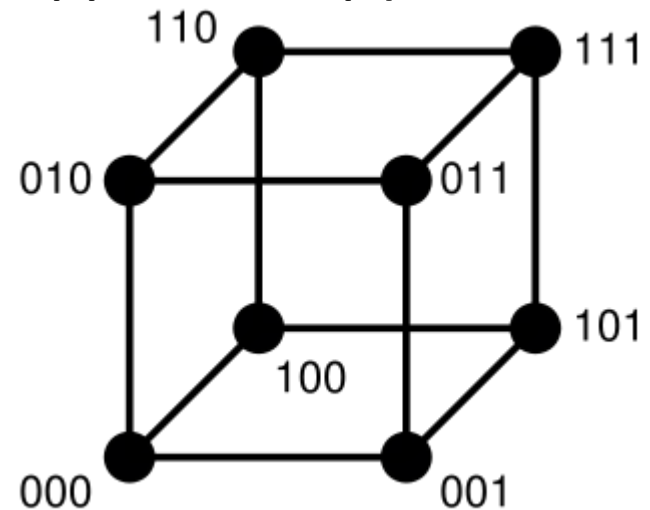
Αν προσδιορίζουμε ομοιότητα στο χώρο του **γενότυπου**; Πχ **1011101** με **1001001**

Χρησιμοποιούμε την απόσταση **Hamming** (Θεωρία Πληροφορίας)

Πόσες αλλαγές πρέπει να κάνω στη μία λύση για να γίνει η ίδια με την άλλη;

1011101 & **1001001** = 2.

2173896 & **2233796** = 3.

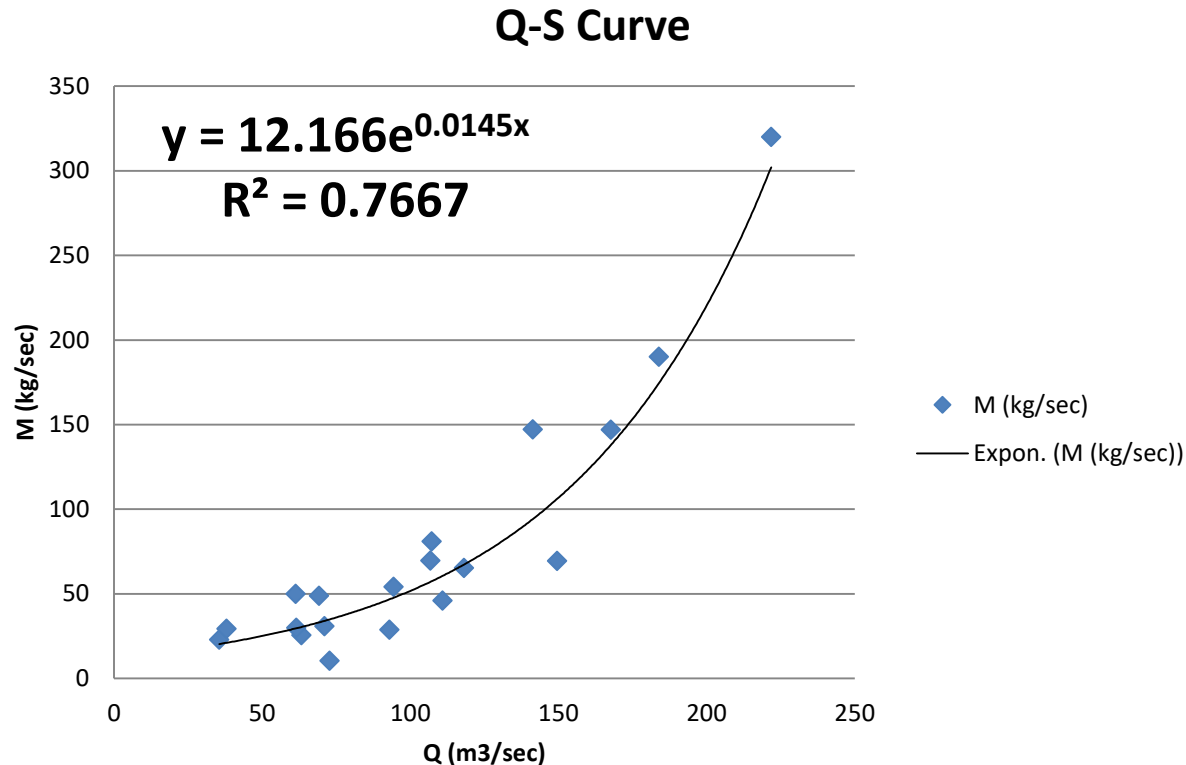


Άλλοι γενετικοί/εξελικτικοί
αλγόριθμοι...

Γενετικός Προγραμματισμός (Genetic Programming - GP)

- Εξέλιξη **μιας συνάρτησης** για την επίλυση ενός προβλήματος
- Δομικά στοιχεία:
 - **Πρωτογενείς συναρτήσεις** και δεδομένα εισόδου/εξόδου (εκπαιδευτικά δεδομένα)
 - **Στοχική Συνάρτηση**: σφάλμα εξόδου σε σύνολο εκπαιδευτικών δεδομένων
 - **Τελεστές**: Επιλογή (κλωνοποίηση), διασταύρωση, μετάλλαξη
- *Παράδειγμα: EPR (Giustolici and Savic, 2006)*

Για ποιό λόγο να θέλουμε να εξελίξουμε μια ... συνάρτηση!;



Παλινδρόμηση – ποία η μορφή της συνάρτησης;

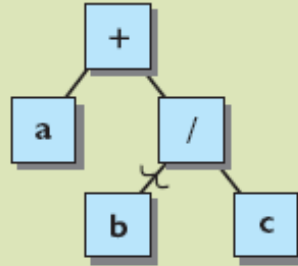
Παράδειγμα Γενετικού Προγραμματισμού

πχ. Κατασκευή συναρτήσεων για την επεξήγηση δεδομένων (προσαρμογή - data fitting)

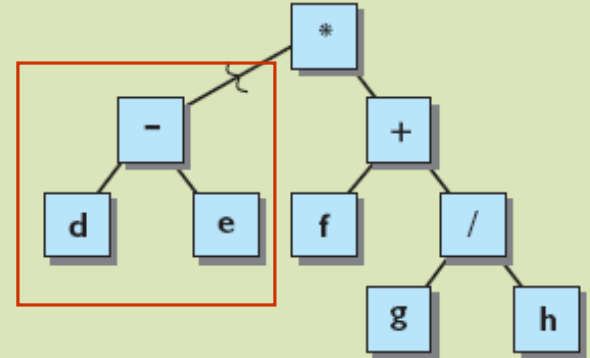
Ποιά η στοχική συνάρτηση εδώ;

$$E = 1 - \frac{\sum_{t=1}^T (\mathcal{Q}_0^t - \mathcal{Q}_m^t)^2}{\sum_{t=1}^T (\mathcal{Q}_0^t - \overline{\mathcal{Q}_0})^2}$$

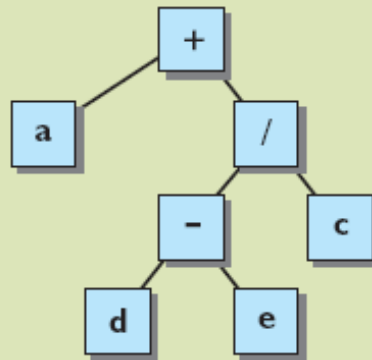
parent 1 [(a+b/c)]



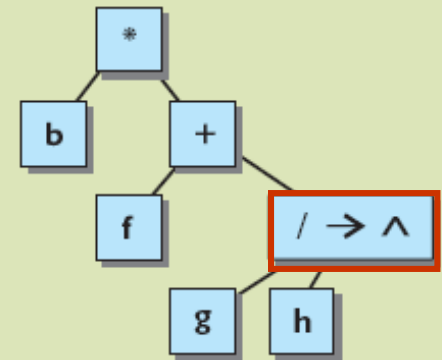
parent 2 [(d-e)*(f+(g/h))]



child 1 [a+((d-e)/c)]



child 2 [b*(f+(g^h))]



διασταύρωση

μετάλλαξη

Ολικοί ή τοπικοί αλγόριθμοι;

Μέθοδοι ολικής αναζήτησης

- **Γενική περιγραφή:** Εξελικτικές, κατά κανόνα, τεχνικές, που χρησιμοποιούν συνδυασμούς προσδιοριστικών και στοχαστικών κανόνων αναζήτησης.
- **Πλεονέκτημα:** Ευελιξία διερεύνησης μη κυρτών χώρων, μη χρήση παραγώγων, δυνατότητα απεγκλωβισμού από τοπικά ακρότατα.
- **Μειονέκτημα:** Αργή σύγκλιση, ασάφεια ορισμού των αλγοριθμικών παραμέτρων, μη εγγυημένη εύρεση του ολικού ακροτάτου

Μέθοδοι τοπικής αναζήτησης

- **Γενική περιγραφή:** Προσδιοριστικές τεχνικές βήμα προς βήμα αναζήτησης, στην κατεύθυνση βελτίωσης της τιμής της συνάρτησης.
- **Πλεονέκτημα:** Γρήγορος και εγγυημένος εντοπισμός του τοπικού ακροτάτου, στην περιοχή έλξης του οποίου βρίσκεται το σημείο εκκίνησης του αλγορίθμου.
- **Μειονέκτημα:** Εγκλωβισμός σε τοπικά ακρότατα, κακή συμπεριφορά σε μη κυρτές επιφάνειες απόκρισης.

Υβριδικά Σχήματα

- Διάφοροι συνδυασμοί:
 - Χρησιμοποιούν το τελικό πληθυσμό λύσεων ως σημείο εκκίνησης για τοπική αναζήτηση
 - Διαμόρφωση στοχαστικών εξελικτικών σχημάτων, που για τη γέννηση νέων λύσεων χρησιμοποιούν υπολογιστικές διαδικασίες των μεθόδων τοπικής αναζήτησης, για αύξηση της ταχύτητας σύγκλισης.

Παραδείγματα Υβριδικών Αλγορίθμων

- **Υβριδικοί εξελικτικοί αλγόριθμοι:** Για την επιτάχυνση της διαδικασίας αναζήτησης εφαρμόζουν, αντί του τελεστή διασταύρωσης, πρότυπα των μεθόδων άμεσης αναζήτησης (πχ. προς το τέλος της αναζήτησης)
- **Εξελικτικοί αλγόριθμοι με έλεγχο διασποράς:** Επέμβαση στη διαδικασία επιλογής, που ευνοεί την επιβίωση απομακρυσμένων λύσεων (προς όφελος της διατήρησης **μεγαλύτερης διασποράς** στον πληθυσμό, και συνεπώς πιο εκτενούς διερεύνησης του εφικτού χώρου), σε σχέση με λύσεις που συσσωρεύονται γύρω από τοπικά ακρότατα.
- **Εξελικτικοί αλγόριθμοι με ανόπτηση:** Ως σχήμα εξέλιξης, χρησιμοποιείται οι γενετικοί τελεστές με τα στοιχεία τους (πχ. πιθανότητα μετάλλαξης) να εξαρτώνται από την τρέχουσα «θερμοκρασία».

«Βέλτιστη» μέθοδος βελτιστοποίησης;

- Η «ολικά βέλτιστη» μέθοδος βελτιστοποίησης θα πρέπει να συνδυάζει τα δύο ακόλουθα θεμελιώδη χαρακτηριστικά επίδοσης (Duan *et al.*, 1992):
 - **αποτελεσματικότητα** (effectiveness), δηλαδή υψηλή αξιοπιστία εντοπισμού (ή προσέγγισης) του ολικού ακροτάτου της συνάρτησης.
 - **αποδοτικότητα** (efficiency), δηλαδή υψηλή ταχύτητα σύγκλισης (εγγυημένος εντοπισμός του ολικού ακροτάτου, με εύλογο πλήθος δοκιμών).
- Τα χαρακτηριστικά αυτά είναι **αντικρουόμενα** (π.χ. η **εξονυχιστική αναζήτηση** σε πλέγμα πυκνής διακριτοποίησης προσεγγίζει το ολικό βέλτιστο με ακρίβεια, αλλά και απαιτεί ανέφικτα υψηλό υπολογιστικό φόρτο, ενώ οι γρήγορες τεχνικές άμεσης αναζήτησης (hill climbing) εγκλωβίζονται εύκολα σε τοπικά ακρότατα).
- Η επίδοση ενός αλγορίθμου ελέγχεται μόνο **πειραματικά**.
- Τα **εξελικτικά υβριδικά σχήματα** βελτιστοποίησης υπερτερούν, στις περισσότερες κατηγορίες προβλημάτων βελτιστοποίησης της πράξης.

Matlab Toolbox

[x fval] = ga(fitnessfun, nvars, options) where

fitnessfun is the fitness function.

nvars is the number of independent variables for the fitness function.

options is a structure containing options for the genetic algorithm. If you do not pass in this argument, ga uses its default options.

Αποτελέσματα:

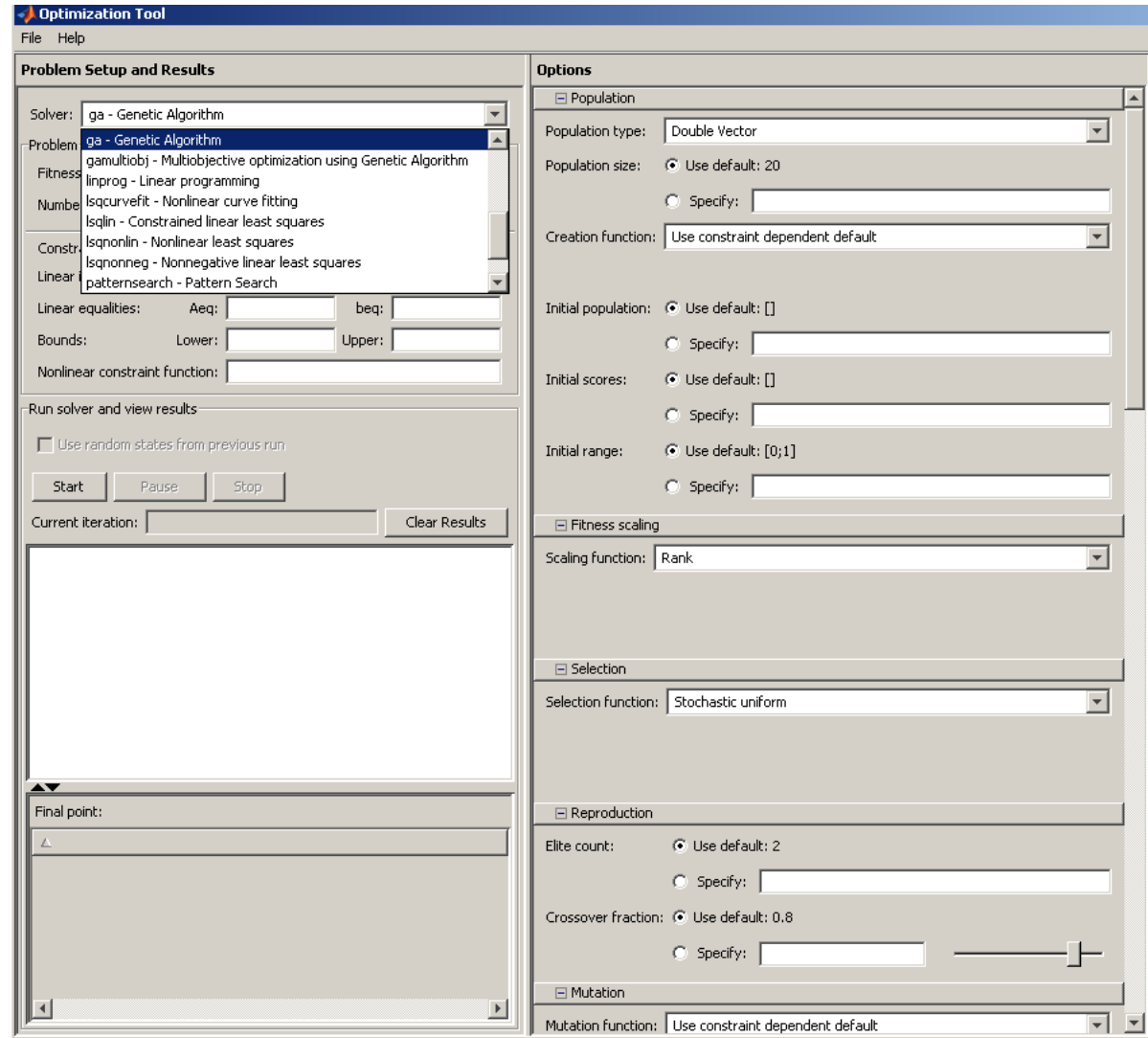
x — Point at which the final value is attained.

fval — Final value of the fitness function.

’Η μέσω toolbox: **optimtool**

Fitness function — The objective function you want to minimize. Enter the fitness function as `fitnessfun.m` ie. an M-file that computes the fitness function.

Number of Variables — The number of variables in the given fitness function should be given.



POPULATION

In this case population type, population size and creation function may be selected.

The initial population and initial score may be specified, if not, the 'Ga tool' creates them. The initial range should be given.

FITNESS SCALING

The fitness scaling should be any of the following

- a. Rank
- b. Proportional
- c. Top
- d. Shift Linear
- e. Custom

SELECTION

☐ Selection

Selection function:

- Stochastic uniform
- Remainder
- Uniform
- Roulette
- Tournament
- Custom

☐ + Reproduction

☐ + Mutation

REPRODUCTION

☐ Reproduction

Elite count:

Crossover fraction: 

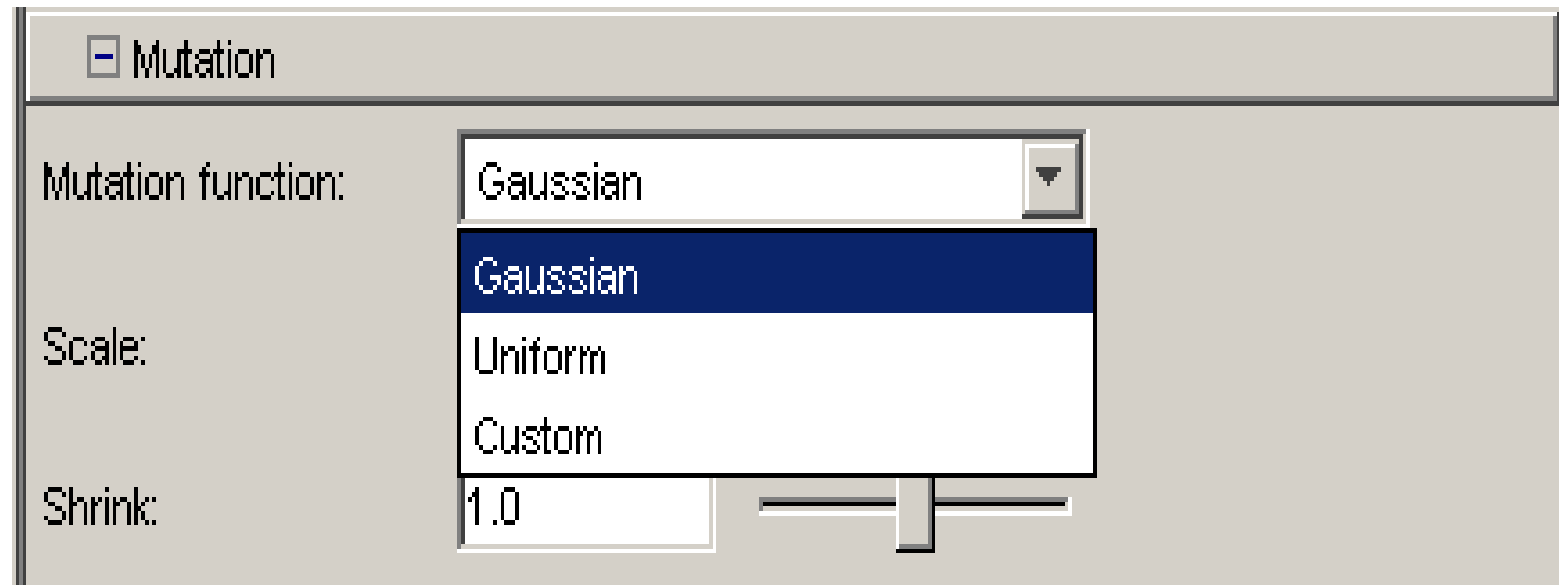
MUTATION

☐ Mutation

Mutation function: Gaussian

Scale: Gaussian
Uniform
Custom

Shrink: 1.0



CROSSOVER

☐ Crossover

Crossover function:

- ☒ Migration
- ☒ Hybrid function
- ☒ Stopping criteria
- ☐ Custom function

Scattered
Single point
Two point
Intermediate
Heuristic
Custom

HYBRID FUNCTION

[-] Hybrid function	
Hybrid function:	None None fminsearch patternsearch fminunc
[+] Stopping criteria	
[+] Output function	

STOPPING CONDITION

☐ Stopping criteria	
Generations:	100
Time limit:	Inf
Fitness limit:	-Inf
Stall generations:	50
Stall time limit:	20

RUNNING AND SIMULATION

Run solver

☐ Use random states from previous run

Start **Pause** **Stop**

Current generation:

Status and results:

◀ ▶

Final point:

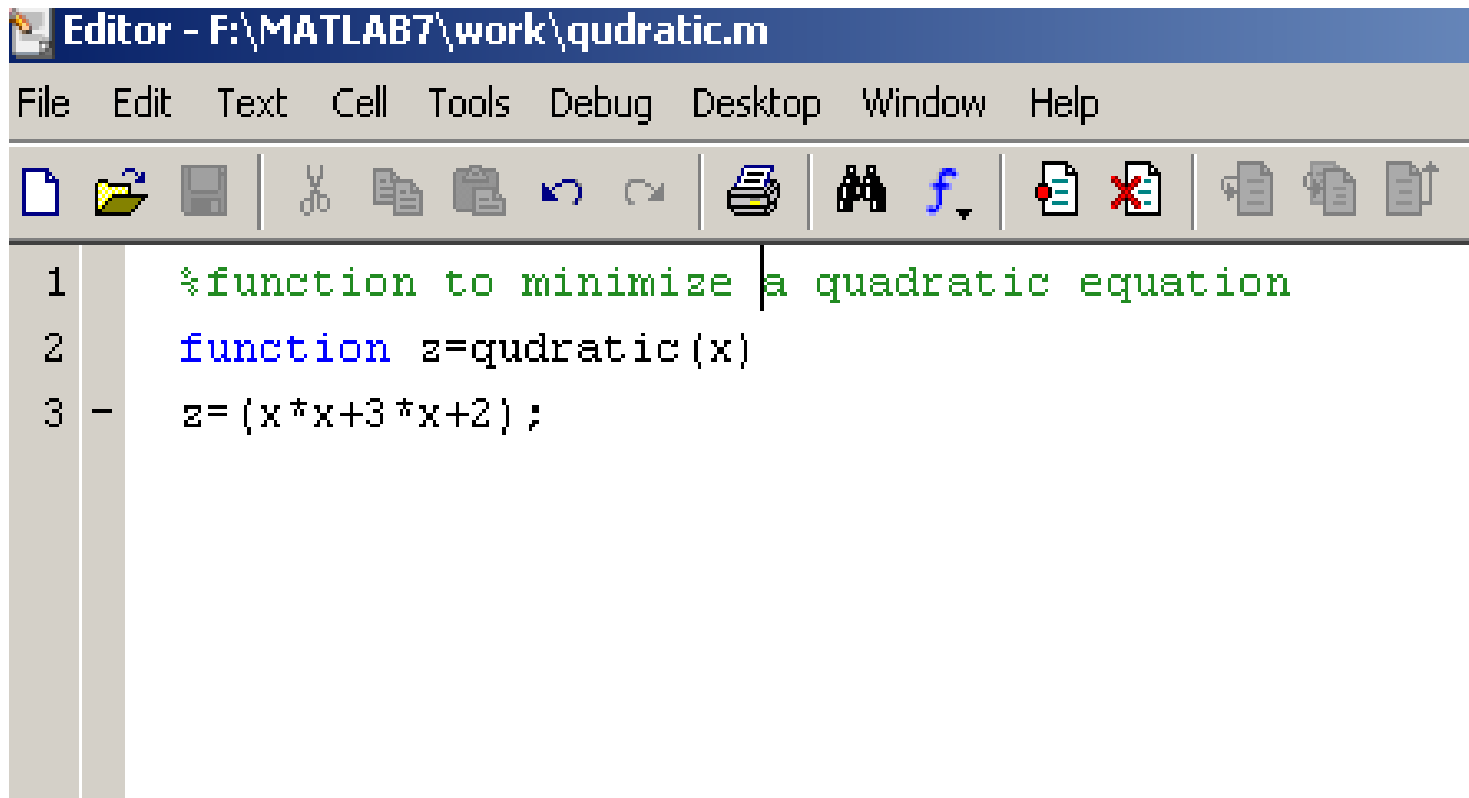
◀ ▶

Export to Workspace...

◀ ▶

Παράδειγμα

$f(x) = x^2 + 3x + 2$ ως function σε m-file



```
Editor - F:\MATLAB7\work\quadratic.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons: New, Open, Save, Cut, Copy, Paste, Undo, Redo, Print, Find, Run, etc.]
1 %function to minimize a quadratic equation
2 function z=quadratic(x)
3 - z=(x*x+3*x+2);
```

Genetic Algorithm Tool

File Help

Fitness function: @quadratic

Number of variables: 1

Plots

Plot interval: 1

☒ Best fitness ☐ Best individual ☐ Distance
☐ Expectation ☐ Genealogy ☐ Range
☐ Score diversity ☐ Scores ☐ Selection
☐ Stopping
☐ Custom function:

Run solver

☐ Use random states from previous run

Start Pause Stop

Current generation: 50

Status and results:

```
GA running.  
GA terminated.  
Fitness function value: -0.2499560899692960  
Optimization terminated: maximum number of
```

Options: >>

☐ Population

Population type: Double Vector

Population size: 20

Creation function: Uniform

Initial population: []

Initial scores: []

Initial range: [-6;0]

☐ Fitness scaling

☐ Selection

☐ Reproduction

☐ Mutation

☐ Crossover

☐ Migration

☐ Hybrid function

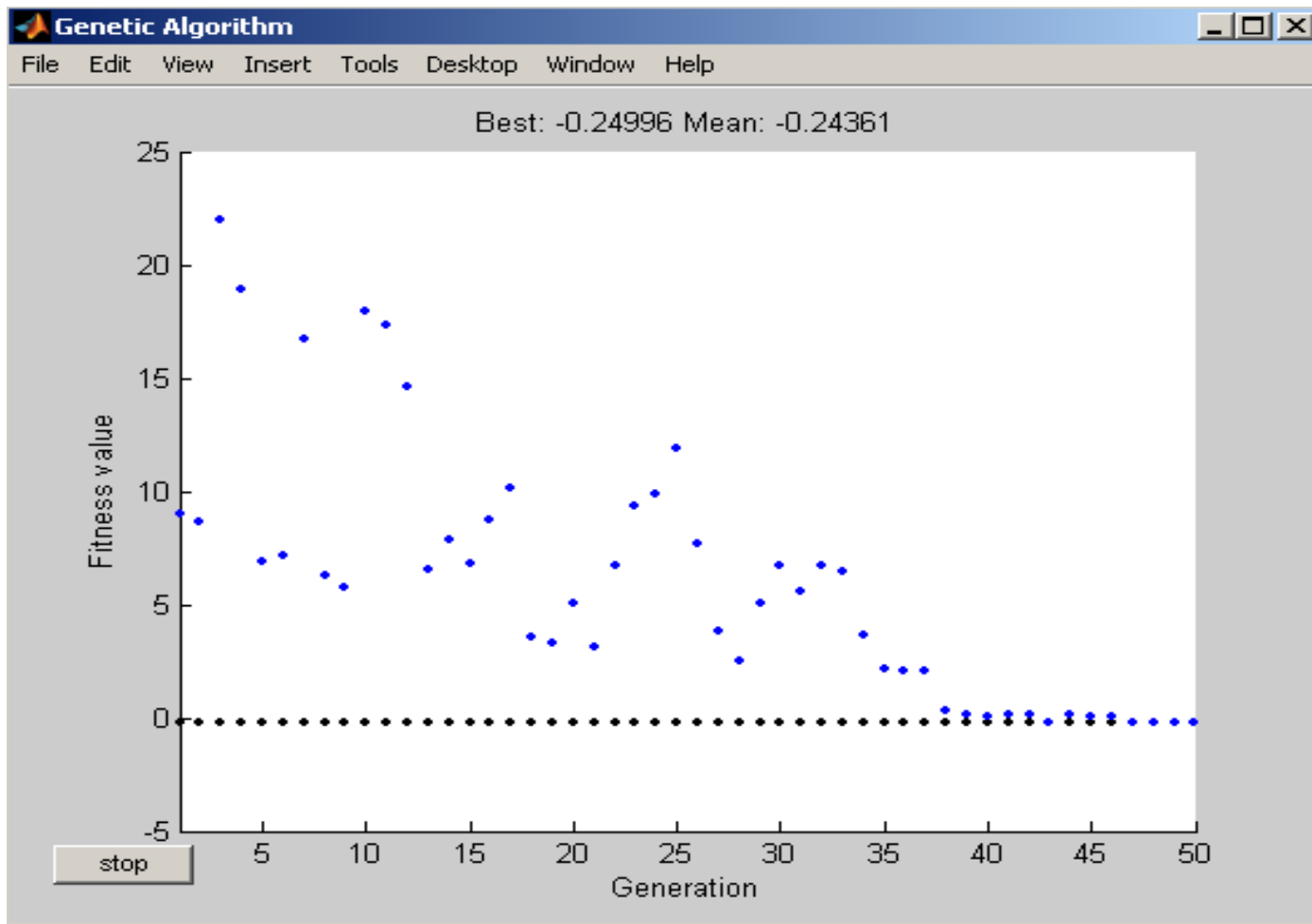
☐ Stopping criteria

☐ Output function

☐ Display to command window

☐ Vectorize

Πάντα πρόβλημα ελαχιστοποίησης



Status and results:

GA running.
GA terminated.
Fitness function value: -0.2499560899692960
Optimization terminated: maximum number of

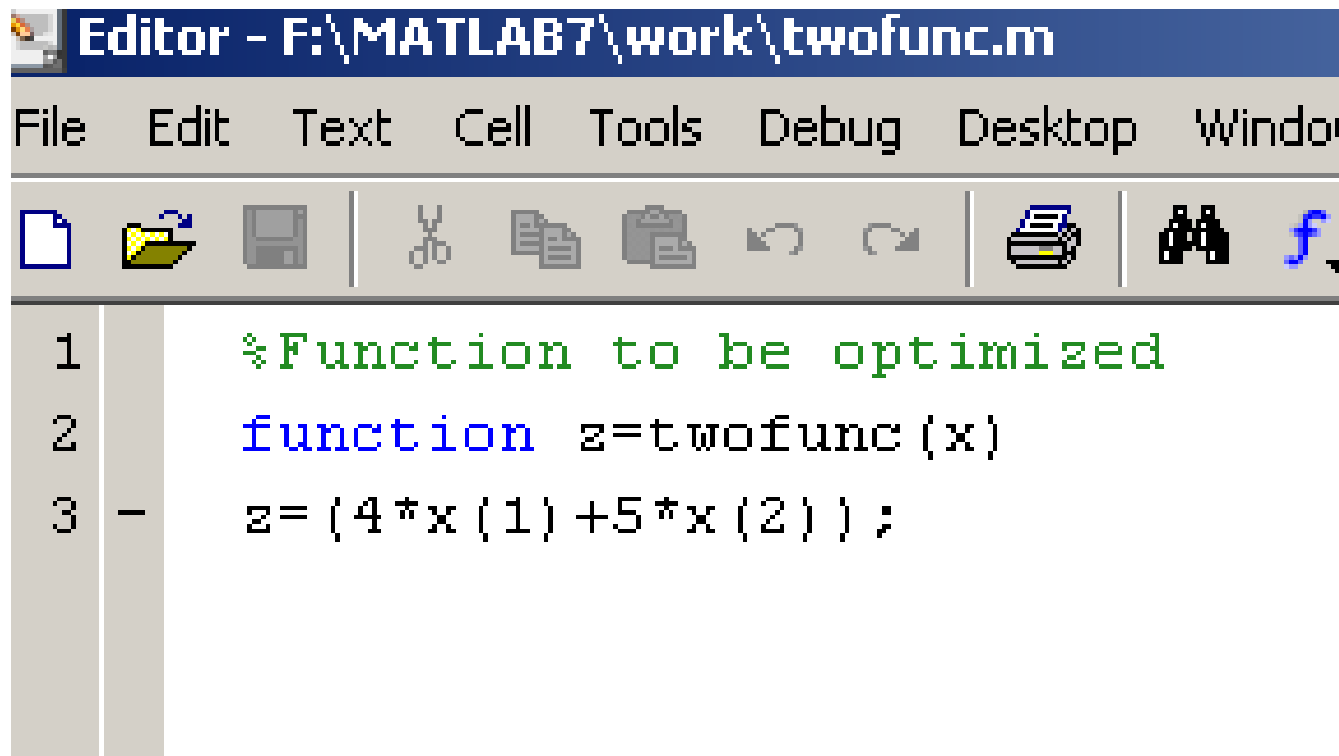
Final point:

1
-1.50663

Export to Workspace...

Παράδειγμα

$f(x_1, x_2) = 4x_1 + 5x_2$ σε m-file σαν function



The image shows a screenshot of the MATLAB Editor window. The title bar reads "Editor - F:\MATLAB7\work\twofunc.m". The menu bar includes "File", "Edit", "Text", "Cell", "Tools", "Debug", "Desktop", and "Window". The toolbar contains icons for file operations (New, Open, Save, Print) and editing (Cut, Copy, Paste, Undo, Redo). The code editor displays the following MATLAB code:

```
1      %Function to be optimized
2      function z=twofunc(x)
3      -  z = (4*x(1) + 5*x(2)) ;
```

Fitness function:

@twofunc

Number of variables:

2

Plots

Plot interval:

1

- | | | |
|--|---|------------------------------------|
| ☒ Best fitness | ☒ Best individual | ☐ Distance |
| ☐ Expectation | ☐ Genealogy | ☐ Range |
| ☐ Score diversity | ☐ Scores | ☐ Selection |
| ☐ Stopping | | |
| ☐ Custom function: <input type="text"/> | | |

Run solver

- ☐
- Use random states from previous run

Start

Pause

Stop

Current generation:

50

Status and results:

```
-----  
GA running.  
GA terminated.  
Fitness function value: 1.9350994539468735  
Optimization terminated: maximum number of
```

Final point:

Options:

>>

☐ Population

Population type:

Double Vector

Population size:

20

Creation function:

Uniform

Initial population:

[]

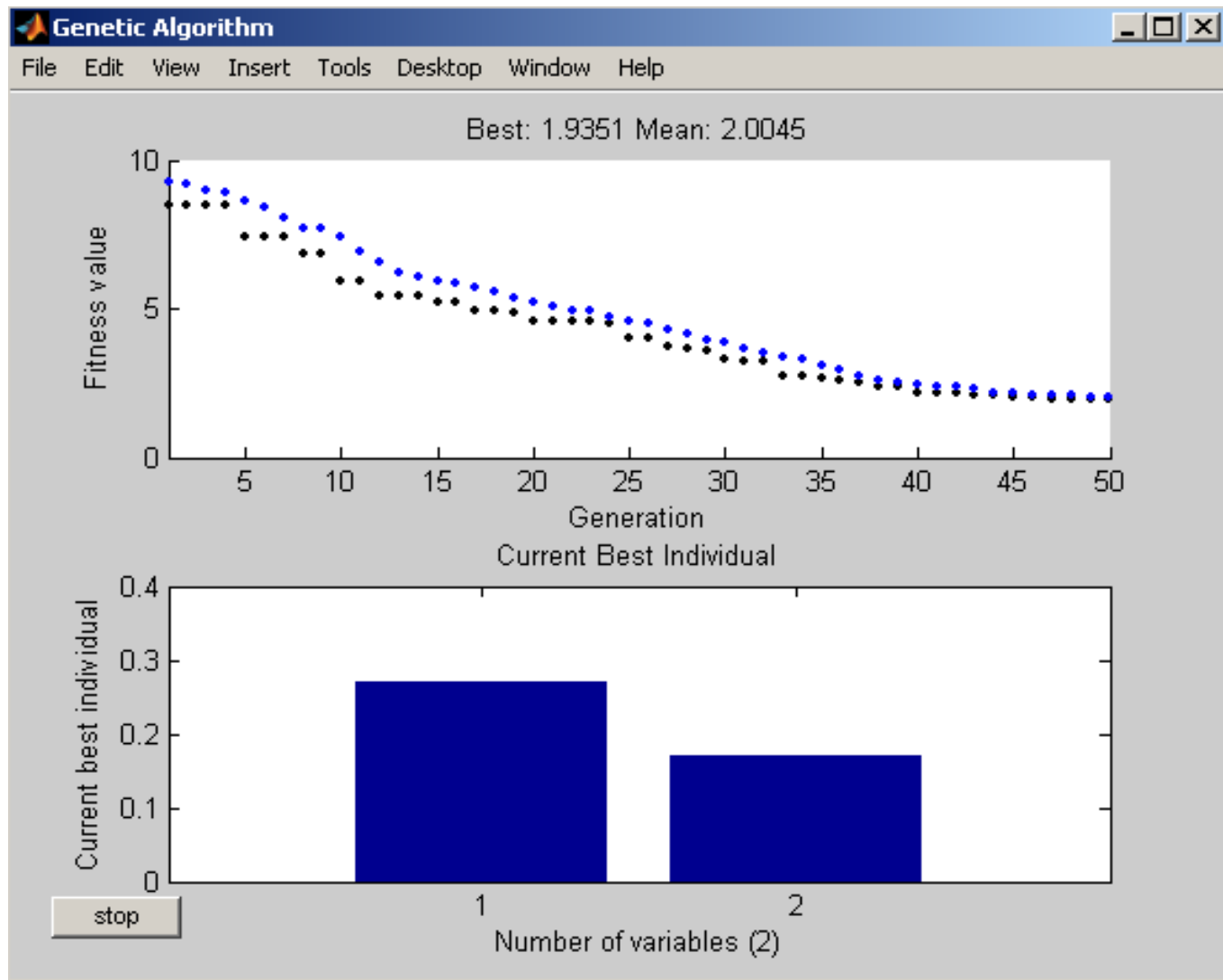
Initial scores:

[]

Initial range:

[1;1.1]

☒ Fitness scaling☒ Selection☒ Reproduction☒ Mutation☒ Crossover☒ Migration☒ Hybrid function☒ Stopping criteria☒ Output function☒ Display to command window☒ Vectorize



Status and results:

GA running.
GA terminated.
Fitness function value: 1.9350994539468735
Optimization terminated: maximum number of

Final point:

1	2
0.27096	0.17025

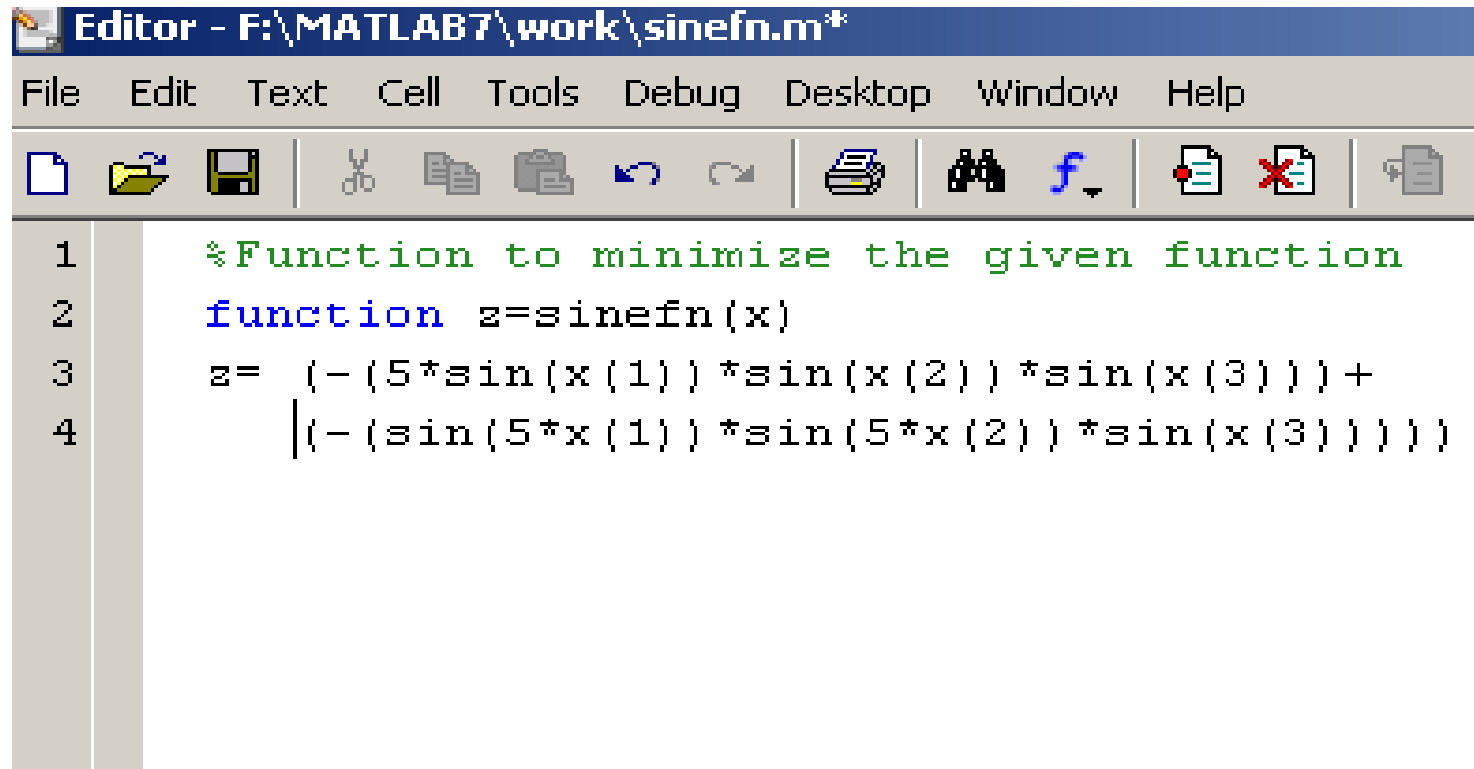
Export to Workspace...



Παράδειγμα

$$f(x_1, x_2, x_3) = -5\sin(x_1)\sin(x_2)\sin(x_3) - \sin(5x_1)\sin(5x_2)\sin(x_3)$$

με $0 \leq x_i \leq \pi$, for $1 \leq i \leq 3$.



```
Editor - F:\MATLAB7\work\sinefn.m*
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons]
1 %Function to minimize the given function
2 function z=sinefn(x)
3 z= -(5*sin(x(1))*sin(x(2))*sin(x(3)))+
4 |(-(sin(5*x(1))*sin(5*x(2))*sin(x(3))))
```

Fitness function: @sinefn

Number of variables: 3

Plots

Plot interval: 1

- | | | |
|--|--|------------------------------------|
| ☒ Best fitness | ☐ Best individual | ☐ Distance |
| ☐ Expectation | ☐ Genealogy | ☐ Range |
| ☐ Score diversity | ☐ Scores | ☐ Selection |
| ☐ Stopping | | |
| ☐ Custom function: | | |

Run solver

- ☐
- Use random states from previous run

Start

Pause

Stop

Current generation: 100

Status and results:

```
-----  
GA running.  
GA terminated.  
Fitness function value: -5.974668311008141  
Optimization terminated: maximum number of
```

Final point:

Options:

Population

Population type: Double Vector

Population size: 20

Creation function: Uniform

Initial population: []

Initial scores: []

Initial range: [0 ; 3.142857]

+ Fitness scaling

+ Selection

+ Reproduction

+ Mutation

+ Crossover

+ Migration

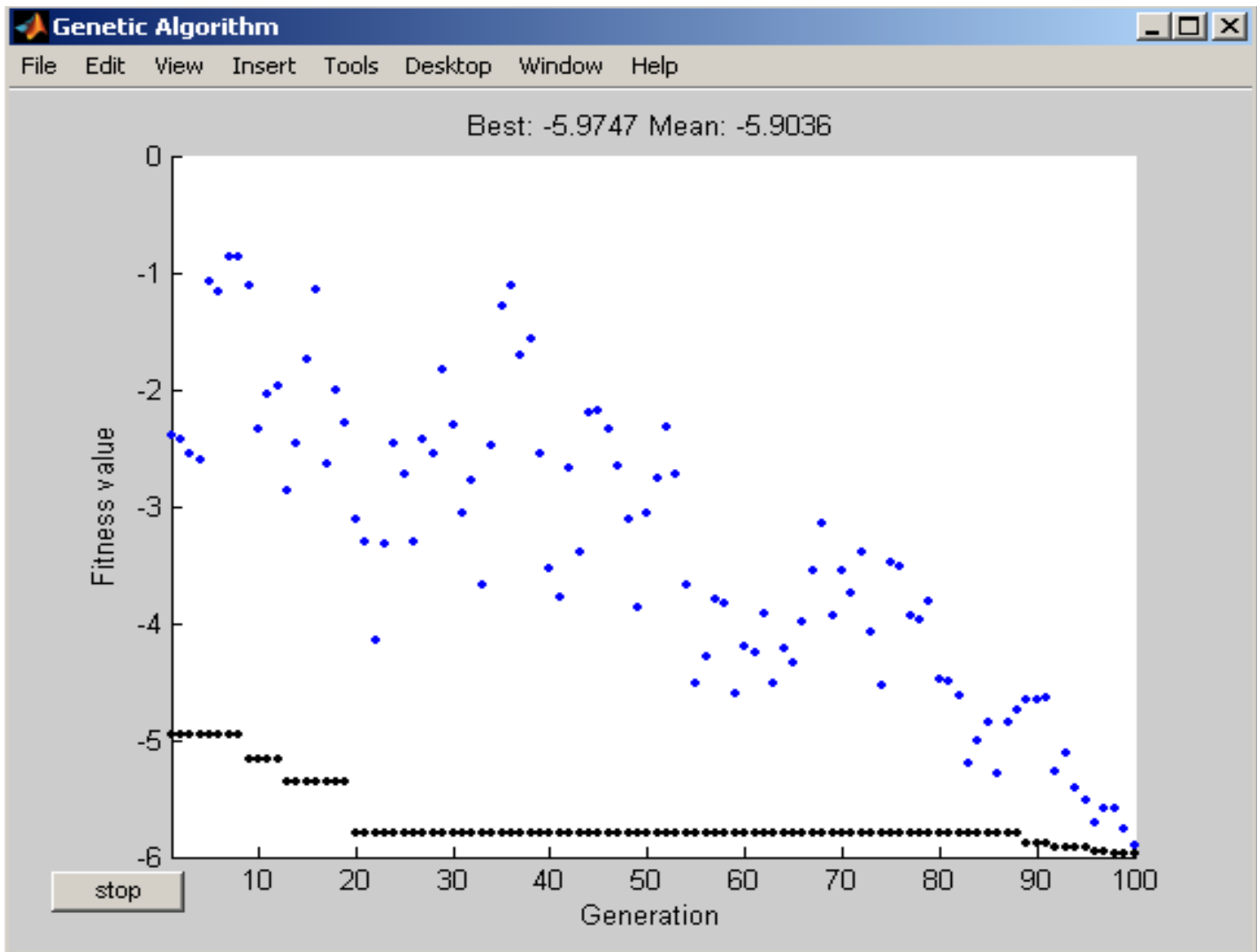
+ Hybrid function

+ Stopping criteria

+ Output function

+ Display to command window

+ Vectorize



Status and results:

GA running.
GA terminated.
Fitness function value: -5.974668311008141
Optimization terminated: maximum number of

Final point:

1	2	3
1.59966	1.56776	1.63597

Export to Workspace...

Matlab (Πολυκριτηριακή Βελτιστοποίηση)

- $\min F(x) = [\text{objective1}(x); \text{objective2}(x)]$
- where
 - $\text{objective1}(x) = (x+2)^2 - 10$
 - $\text{objective2}(x) = (x-2)^2 + 20$
 - And $-8 < x < 8$

Δημιουργούμε την αντικειμενική

```
function y = simple_multiobjective(x)
```

```
y(1) = (x+2)^2 - 10;
```

```
y(2) = (x-2)^2 + 20;
```

Command Line:

```
FitnessFunction = @simple_multiobjective;
```

```
numberOfVariables = 1; [x,fval] =
```

```
gamultiobj(FitnessFunction,numberOfVariables);
```

Παράδειγμα

```
function y=test(x)
```

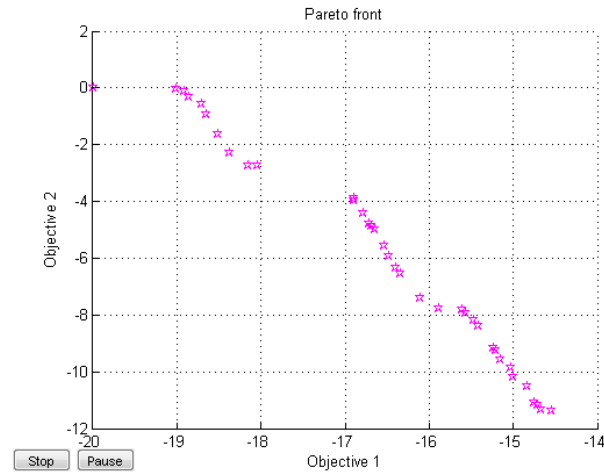
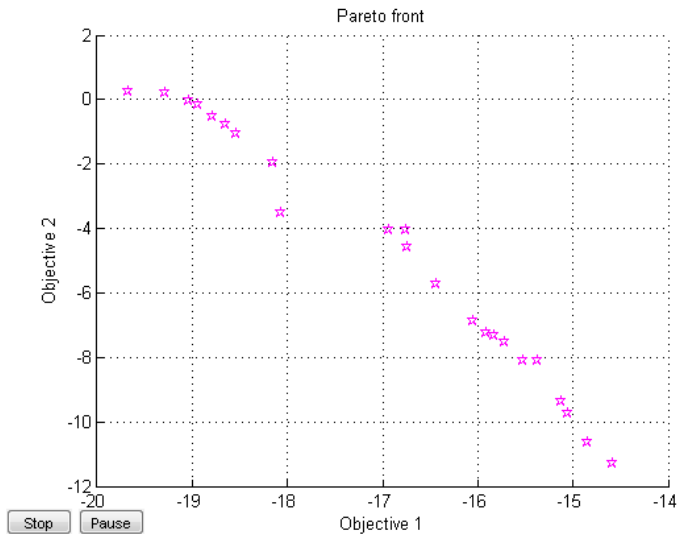
```
y1=x^2+3*x+2;
```

```
y2=x^3-5;
```

```
y=[y1,y2];
```

@kur_multiobjective

- $-5 \leq x(i) \leq 5, i = 1, 2, 3$
(3 variables, bounds -5 to 5)



Population, hybrid, stall

Βιβλιογραφία

- Wendy Williams: Genetic Algorithms: A Tutorial
- Λυκοθανάσης, Σ. Τμήμα Μηχανικών Η/Υ και Πληροφορικής, Παν/μιο Πάτρας (http://edu.eap.gr/pli/pli31/docs/GAs_introduction.pdf)
- Z. Michalewicz. *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Springer, Berlin, Germany (1992)
- Coello Coello, C.A. 2002. "Introduction to Evolutionary Multiobjective Optimization." www.cs.cinvestuv.mx/~EVOCINV/download/class1-emoo-eng.pdf
- Fonseca, C.M. and P.J. Fleming. 1993. Genetic Algorithms for Multiobjective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization. *Genetic Algorithms: Proceedings of the Fifth International Conference*. S. Forrest, ed. San Mateo, CA, July 1993.