



Εισαγωγή στην Πληροφορική και τον Προγραμματισμό Η/Υ

3^ο Μάθημα

Κωδικοποίηση & Αποκωδικοποίηση Αριθμών.
Θεσιακά και Μη Συστήματα Αρίθμησης

Λεωνίδας Αλεξόπουλος

Αν. Καθηγητής ΕΜΠ

E-mail: leo@mail.ntua.gr

Τηλ: 210 772-1666

Κωδικοποίηση & Αποκωδικοποίηση Αριθμών & Χαρακτήρων

- 1- Αποκωδικοποίηση – Κωδικοποίηση
- 2- Συστήματα Αρίθμησης – το Δυαδικό
- 3- Μετατροπή από το ένα σύστημα στο άλλο

Προγραμματισμός σε Η/Υ

Εφαρμογές

Γλώσσες Προγραμματισμού

Λειτουργικό Σύστημα

Γλώσσα Μηχανής

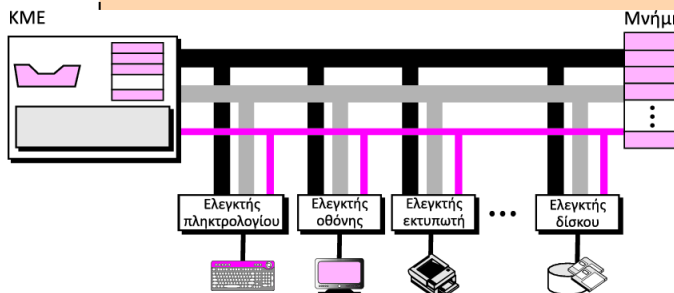
Μικρολειτουργίες
&
Μικροπρογραμματισμός

Ψηφιακή Λογική



```
1 function rowTotals = rowsum
2 % Add the values in each row and
3 % store them in a new array.
4
5 x = ones(2,10);
6 [n, m] = size(x);
7 rowTotals = zeros(1,n);
8 for j = 1:n
9     Press Shift+Enter to rename 5 instances of 'j' to 'j'
10 end
11
12 function colsum = addToSum
13 colsum = 0;
14 thisrow = x(1,:);
15 for i = 1:m
16     colsum = colsum + thisrow(i);
17 end
18 end
19
20 end
```

Assembly Language	Machine Code
add \$t1, \$t2, \$t3	04CB: 0000 0100 1100 1011
addi \$t2, \$t3, 60	16BC: 0001 0110 1011 1100
and \$t3, \$t1, \$t2	0299: 0000 0010 1001 1001
andi \$t3, \$t1, 5	22C5: 0010 0010 1100 0101
beq \$t1, \$t2, 4	3444: 0011 0100 0100 0100
bne \$t1, \$t2, 4	4444: 0100 0100 0100 0100
j 0x50	F032: 1111 0000 0011 0010
lw \$t1, 16(\$s1)	5A50: 0101 1010 0101 0000
nop	0005: 0000 0000 0000 0101
nor \$t3, \$t1, \$t2	029E: 0000 0010 1001 1110
or \$t3, \$t1, \$t2	029A: 0000 0010 1001 1010
ori \$t3, \$t1, 10	62CA: 0110 0010 1100 1010
ssl \$t2, \$t1, 2	0455: 0000 0100 0101 0101
srl \$t2, \$t1, 1	0457: 0000 0100 0101 0111
sw \$t1, 16(\$t0)	7050: 0111 0000 0101 0000
sub \$t2, \$t1, \$t0	0214: 0000 0010 0001 0100



$\begin{array}{c c c} x & y & x \vee y \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} x & y & x \wedge y \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} x & y & x \oplus y \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c c c} x & y & x \oplus y \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$
--	--	--	--

Figure 1. Truth tables

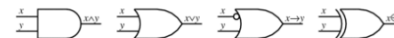


Figure 2. Logic gates

Κωδικοποίηση - Αποκωδικοποίηση



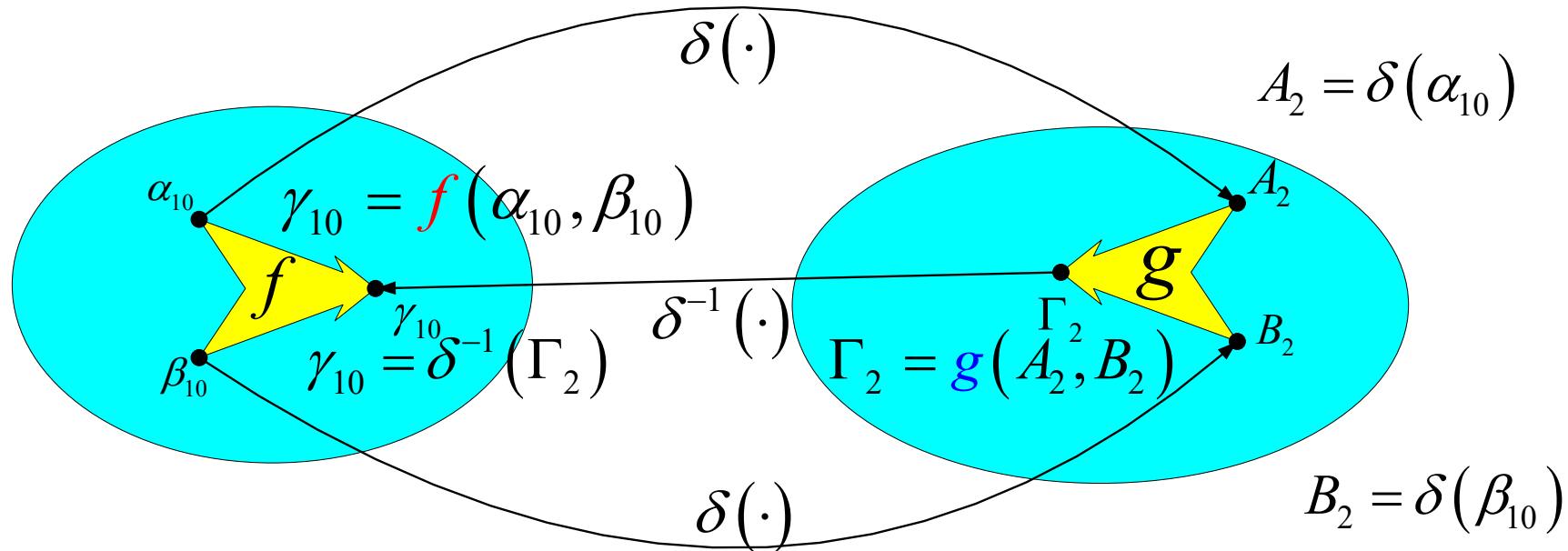
Κωδικοποίηση: Μετάβαση σε ηλεκτρονικά επεξεργάσιμη πληροφορία (π.χ. δυαδικό σύστημα)

Αποκωδικοποίηση: Μετάβαση σε φυσικά επεξεργάσιμη διαδικασία

Το Δυαδικό σύστημα επιτρέπει την ηλεκτρονική υλοποίηση

Boole : αν δύο αριθμοί κωδικοποιηθούν (μετατραπούν) στο **δυαδικό σύστημα** τότε η εκτέλεση μαθηματικών πράξεων (+ , * , - , ÷) ή η εξέταση (πιστοποίηση) λογικών σχέσεων (> , ≥ , < , ≤ , = , ...) μεταξύ τους, μπορούν να υλοποιηθούν με χρήση των βασικών λογικών τελεστών (**AND, OR, NOT**), και μόνο.

Κωδικοποίηση - Αποκωδικοποίηση



Ερώτημα: Γιατί πρέπει να μεταβούμε στο δυαδικό σύστημα και μετά να επιστρέψουμε πίσω ?

Απάντηση: Η ηλεκτρονική υλοποίηση των λογικών πράξεων είναι πολύ πιο εύκολη και αξιόπιστη απ' ότι αυτή των αριθμητικών πράξεων

αριθμητική πράξη $\rightarrow$ λογική συνάρτηση

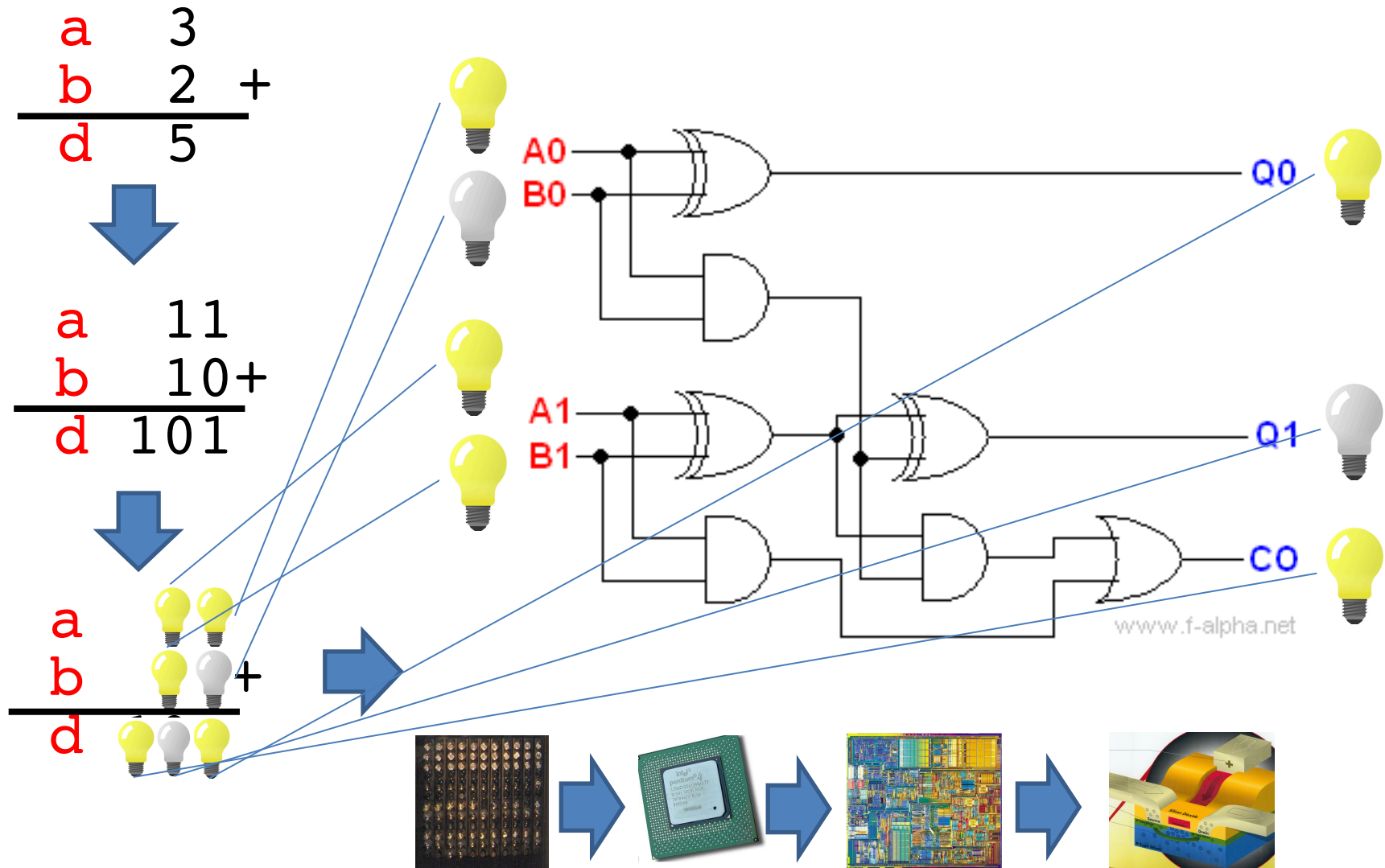
Πρόβλημα: Να ευρεθεί ο αριθμός $\gamma_{10} = f(\alpha_{10}, \beta_{10})$ όπου $\alpha_{10}, \beta_{10} \in \mathbb{R}$ (πραγματικοί αριθμοί εκφρασμένοι στο δεκαδικό σύστημα) και $f \in \{+, -, \cdot, \div\}$ μία αριθμητική πράξη.

Διαδικασία Επίλυσης:

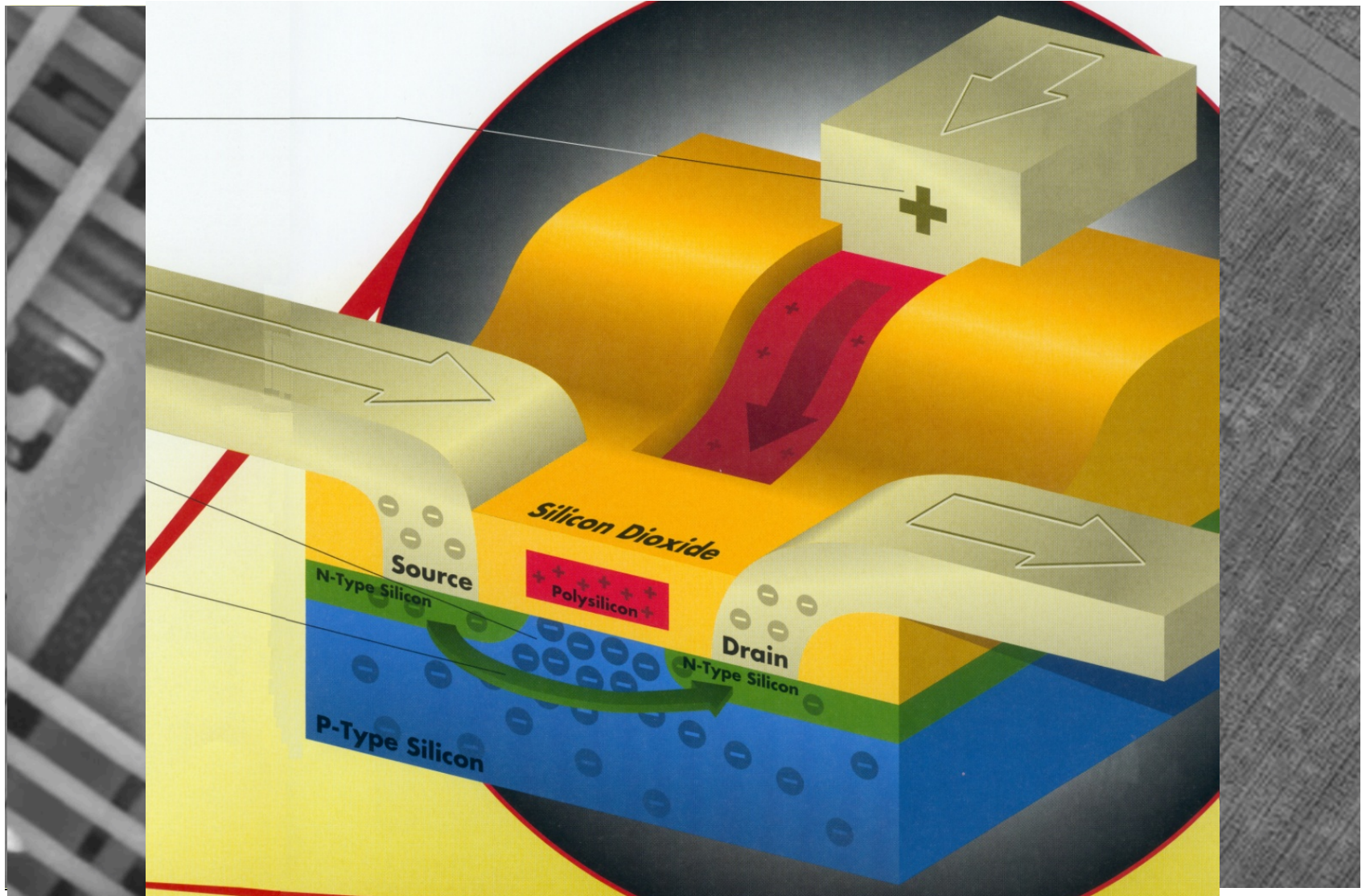
- Εύρεση των δυαδικών αριθμών που αντιστοιχούν στα δεδομένα
$$\begin{cases} A_2 = \delta(\alpha_{10}) \\ B_2 = \delta(\beta_{10}) \end{cases}$$
- Υλοποίηση της αριθμητικής πράξης f μέσω ενός αλγορίθμου g λογικών συναρτήσεων
- Εύρεση του δυαδικού αποτελέσματος $\Gamma_2 = g(A_2, B_2)$
- Εύρεση του δεκαδικού αντιστοίχου $\gamma_{10} = \delta^{-1}(\Gamma_2)$ του αποτελέσματος

αριθμητική πράξη → λογική συνάρτηση

π.χ. Πρόσθεση



αριθμητική πράξη → λογική συνάρτηση
π.χ. Πρόσθεση



Θεσιακά συστήματα Αρίθμησης

- Παρατηρήστε ότι

$$78532.26 = (78532.26)_{10} =$$

$$= 7 * 10^4 + 8 * 10^3 + 5 * 10^2 + 3 * 10^1 + 2 * 10^0 + 2 * 10^{-1} + 6 * 10^{-2}$$

- Αυτό γενικεύεται ως

$$\left({}^{n-1}D {}^{n-2}D \dots {}^1D {}^0D . {}^{-1}D {}^{-2}D \dots {}^{-m}D \right)_B =$$

$$= {}^{n-1}D * B^{n-1} + \dots + {}^0D * B^0 + {}^{-1}D * B^{-1} + \dots + {}^{-m}D * B^{-m}$$

όπου **D** : Digits = ψηφία, **B** : Base = βάση

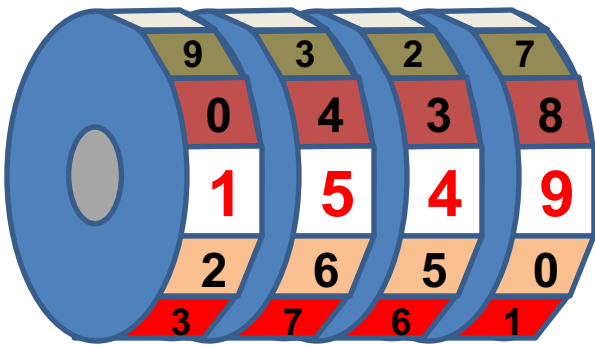
MSD (Most Significant Digit)

ΤΑΞΗ ΨΗΦΙΟΥ

LSD (Least Significant Digit)

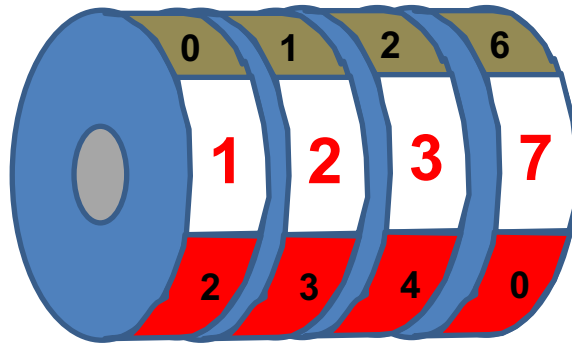
Θεσιακά συστήματα Αρίθμησης

Δεκαδικό



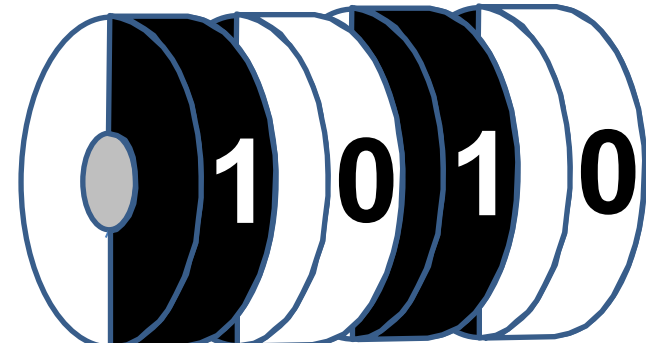
D : Digits = ψηφία
B : Base = βάση :10
Δεκάδα
1,2,3,4,5,6,7,8,9,0

Οκταδικό



D : Digits = ψηφία: 4
B : Base = βάση :8
Οκτάδα
1,2,3,4,5,6,7,0

Δυαδικό



D : Digits = ψηφία: 4
B : Base = βάση :2
Δυάδα
0,1

Θεσιακά συστήματα Αρίθμησης

- **Δεκαδικό** ($B=10$, $D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$)

ΤΑΞΕΙΣ: 0D :Μονάδες (10^0), 1D :10δες (10^1), 100δες..

- **Δυαδικό** ($B=2$, $D=\{0,1\}$)

ΤΑΞΕΙΣ: 0D :Μονάδες (2^0), 1D :2δες (2^1), 4άδες(2^2)...

- **Οκταδικό** ($B=8$, $D=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$)

ΤΑΞΕΙΣ: 0D :Μονάδες (8^0), 1D :8δες (8^1), 64αδες(8^2)

- **Δεκαεξαδικό** ($B=16$,
 $D=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F\}$)

– ΤΑΞΕΙΣ: 0D :Μονάδες (16^0), 1D :16δες (2^1), 256δες (16^2)...

*Υπάρχουν και συστήματα που δεν ακολουθούν τον θεσιακό κανόνα.

Περίληψη των τεσσάρων θεσιακών συστημάτων

Σύστημα	Βάση	Σύμβολα	Παραδείγματα
Δεκαδικό	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	2345,56
Δυαδικό	2	0, 1	(1001,11) ₂
Οκταδικό	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7	(156,23) ₈
Δεκαεξαδικό	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F	(A2C,A1) ₁₆

Σύγκριση αριθμών στα τέσσερα συστήματα

Δεκαδικό	Δυαδικό	Οκταδικό	Δεκαεξαδικό
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

*There are 10 types of people in the world:
Those who understand binary, and those who don't*

Άλλα Συστήματα Αρίθμησης

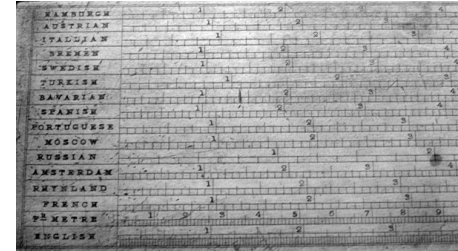
Υπάρχουν αριθμητικά συστήματα που δεν ακολουθούν την έννοια της τάξης ψηφίου

Ρωμαϊκή Αρίθμηση

Math A Tube (MathATube.com)

Roman Numerals

I	1	XXI	21	XLI	41	LXI	61	LXXXI	81
II	2	XXII	22	XLII	42	LXII	62	LXXXII	82
III	3	XXIII	23	XLIII	43	LXIII	63	LXXXIII	83
IV	4	XXIV	24	XLIV	44	LXIV	64	LXXXIV	84
V	5	XXV	25	XLV	45	LXV	65	LXXXV	85
VI	6	XXVI	26	XLVI	46	LXVI	66	LXXXVI	86
VII	7	XXVII	27	XLVII	47	LXVII	67	LXXXVII	87
VIII	8	XXVIII	28	XLVIII	48	LXVIII	68	LXXXVIII	88
IX	9	XXIX	29	XLIX	49	LXIX	69	LXXXIX	89
X	10	XXX	30	L	50	LXX	70	XC	90
XI	11	XXXI	31	LI	51	LXXI	71	XCI	91
XII	12	XXXII	32	LII	52	LXXII	72	XCII	92
XIII	13	XXXIII	33	LIII	53	LXXIII	73	XCIII	93
XIV	14	XXXIV	34	LIV	54	LXXIV	74	XCIV	94
XV	15	XXXV	35	LV	55	LXXV	75	XCV	95
XVI	16	XXXVI	36	LVI	56	LXXVI	76	XCVI	96
XVII	17	XXXVII	37	LVII	57	LXXVII	77	XCVII	97
XVIII	18	XXXVIII	38	LVIII	58	LXXVIII	78	XCVIII	98
XIX	19	XXXIX	39	LIX	59	LXXIX	79	XCIX	99
XX	20	XL	40	LX	60	LXXX	80	C	100
								D	500
								M	1000



[https://en.wikipedia.org/wiki/Foot_\(unit\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Foot_(unit))

Εμπειρικά μετρητικά Συστήματα π.χ.

1 inch x 12 = 1 foot

1 foot x 3 = 1 yard

1 yard x 1760 = 1 mile

Πόσο είναι 1/100 του foot?

.vs.

Πόσο είναι 1/100 του μέτρου?

Συστήματα Αρίθμησης: Αποκωδικοποίηση

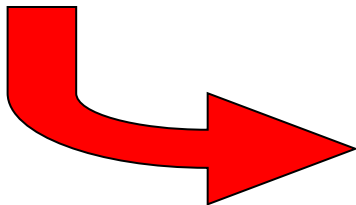
- **Δεκαδικό** σύστημα ($B=10, D = \{0, \dots, 9\}$) : οπότε
$$3496_{10} = 3 * 10^3 + 4 * 10^2 + 9 * 10^1 + 6 * 10^0$$
- **Δυαδικό** σύστημα ($B=2, D = \{0, 1\}$) : οπότε

$$1010_2 =$$

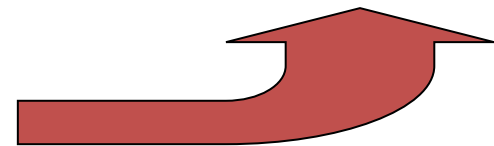
$$= 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 =$$

$$= 8 + 0 + 2 + 0 =$$

$$= 10_{10}$$



Αποκωδικοποίηση



Παραδείγματα Αποκωδικοποίησης

Παράδειγμα #1

$$(1001)_2 = (?)_{10}$$

$$1*8+0+0+1=9$$

- **Δεκαδικό σύστημα** ($B=10, D=\{0, \dots, 9\}$) : οπότε

$$3496_{10} = 3*10^3 + 4*10^2 + 9*10^1 + 6*10^0$$

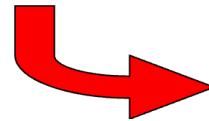
- **Δυαδικό σύστημα** ($B=2, D=\{0, 1\}$) : οπότε

$$1010_2 =$$

$$= 1*2^3 + 0*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 =$$

$$= 8 + 0 + 2 + 0 =$$

$$= 10_{10}$$



Αποκωδικοποίηση



Παραδείγματα Αποκωδικοποίησης

- **Δεκαδικό** σύστημα ($B=10, D=\{0, \dots, 9\}$) : οπότε
$$3496_{10} = 3 * 10^3 + 4 * 10^2 + 9 * 10^1 + 6 * 10^0$$
- **Δυαδικό** σύστημα ($B=2, D=\{0, 1\}$) : οπότε

$$\begin{aligned} 1010_2 &= \\ &= 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = \\ &= 8 + 0 + 2 + 0 = \\ &= 10_{10} \end{aligned}$$

Παράδειγμα #2

$$(107)_8 = (?)_{10}$$

$$7 * 8^0 + 0 * 8^1 + 1 * 8^2 =$$



Παραδείγματα Αποκωδικοποίησης

- **Δεκαδικό σύστημα** ($B=10, D=\{0, \dots, 9\}$) : οπότε
 $3496_{10} = 3 * 10^3 + 4 * 10^2 + 9 * 10^1 + 6 * 10^0$
- **Δυαδικό σύστημα** ($B=2, D=\{0, 1\}$) : οπότε

$$\begin{aligned} 1010_2 &= \\ &= 1 * 2^3 + 0 * 2^2 + 1 * 2^1 + 0 * 2^0 = \\ &= 8 + 0 + 2 + 0 = \\ &= 10_{10} \end{aligned}$$

 Αποκωδικοποίηση

Παράδειγμα #3

$$(AC1)_{16} = (2753)_{10}$$

$$10 * 256 + 12 * 16 + 1 * 1 = 2753$$

Συστήματα Αρίθμησης: Κωδικοποίηση

$$(50)_{10} = (\quad ? \quad)_2$$

$$(14)_{10} = (\quad ? \quad)_2$$

$$(35)_{10} = (\quad ? \quad)_2$$

$$(35)_{10} = (\quad ? \quad)_{16}$$

Συστήματα Αρίθμησης: Κωδικοποίηση

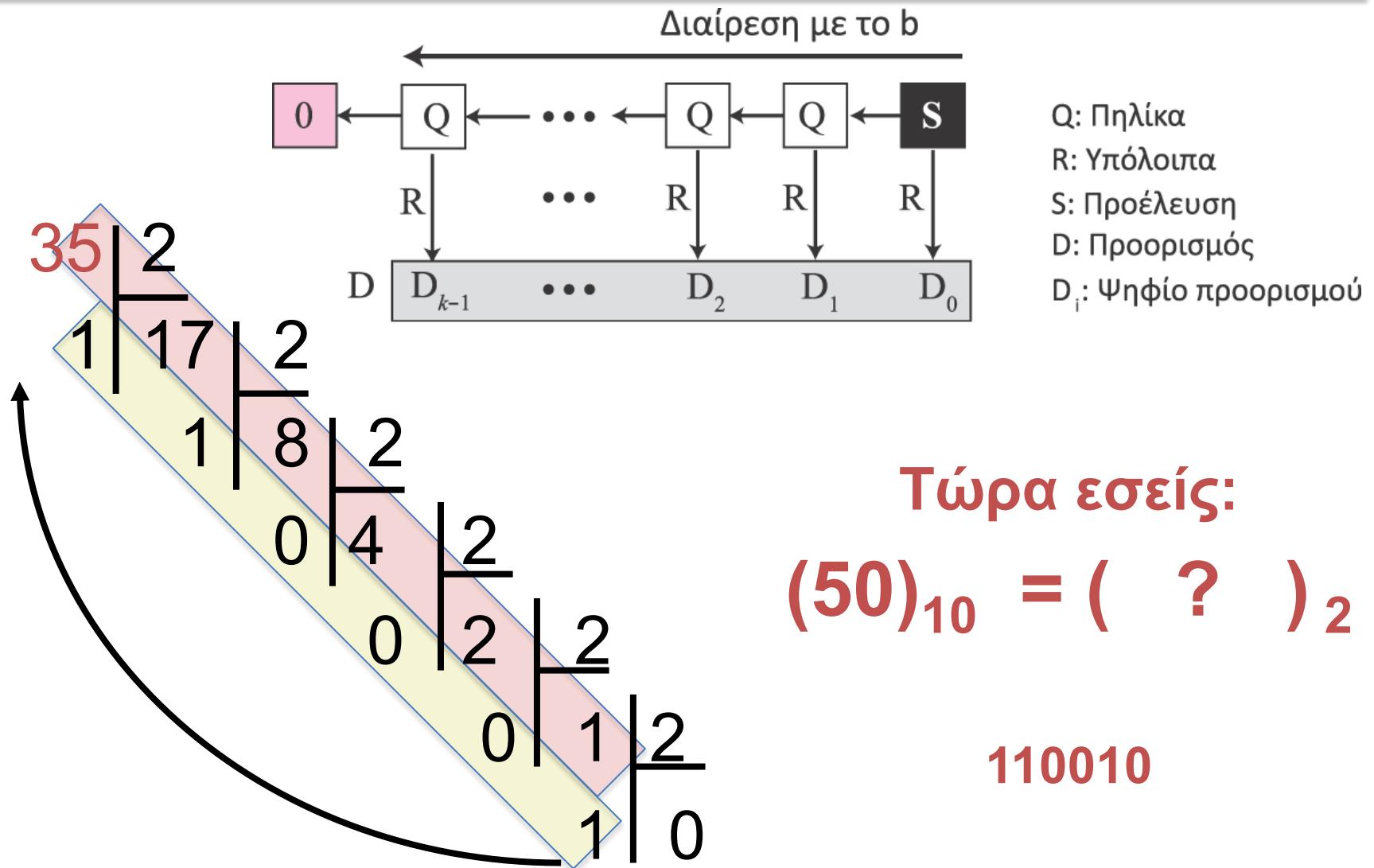
- Μετατροπή του **δεκαδικού**

$$\begin{array}{r} 35_{10} \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 17} \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 8} \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 4} \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 2} \overline{) 2} \\ 0 \overline{) 1} \overline{) 2} \\ 1 \overline{) 0} \end{array}$$

Κωδικοποίηση

στον **δυαδικό** $(100011)_2$

Συστήματα Αρίθμησης: Κωδικοποίηση

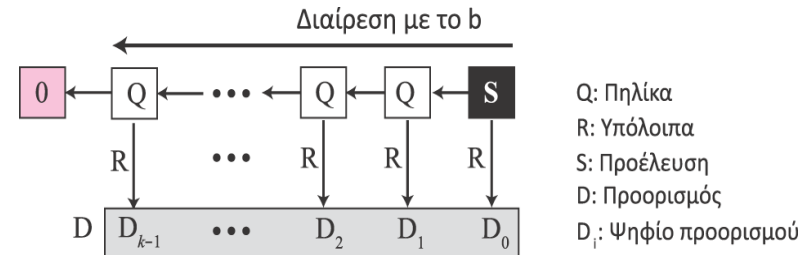
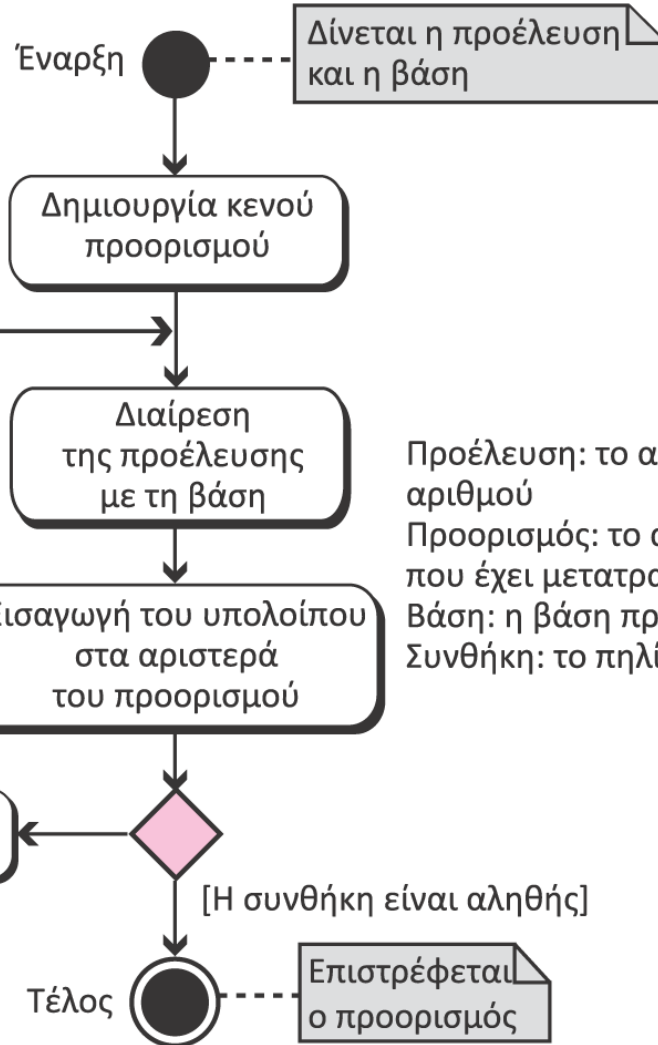


Τώρα εσείς:
 $(50)_{10} = (\quad ? \quad)_2$

110010

στον **δυαδικό** $(100011)_2$

Συστήματα Αρίθμησης: Κωδικοποίηση



Προέλευση: το ακέραιο μέρος ενός δεκαδικού αριθμού
Προορισμός: το ακέραιο μέρος του αριθμού που έχει μετατραπεί
Βάση: η βάση προορισμού
Συνθήκη: το πηλίκο είναι μηδέν

Άλλα Συστήματα Αρίθμησης: **Οκταδικό**

- **Γιατί και άλλα συστήματα αρίθμησης ?**
- Όταν γράφουμε ένα πρόγραμμα το οποίο δεν είναι σε γλώσσα υψηλού επιπέδου (π.χ. C), αλλά χαμηλού (π.χ. Assembly), τότε όταν γράφουμε ορισμένες σταθερές, διευθύνσεις, κλπ σε δυαδική μορφή, λόγω του μεγάλου πλήθους ψηφίων, μπορεί να γίνει λάθος στην εισαγωγή των δεδομένων. Έτσι προκύπτει η ανάγκη δημιουργίας ενός «συμπαγούς» τρόπου εισαγωγής δεδομένων, που ικανοποιείται με τη χρήση των συστημάτων οκταδικού ή δεκαεξαδικού.
- **Οκταδικό σύστημα** ($B=8, D \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$) : οπότε

οκταδικό σε δεκαδικό: $(1234)_8 = 1 * 8^3 + 2 * 8^2 + 3 * 8^1 + 4 * 8^0 = (668)_{10}$

δεκαδικό σε οκταδικό: $668_{10} \left| \begin{array}{l} 8 \\ 28 \overline{) 83} \overline{) 8} \\ 4 \quad 3 \overline{) 10} \overline{) 8} \\ \quad 2 \overline{) 1} \overline{) 8} \\ \quad \quad 1 \overline{) 0} \end{array} \right. \Rightarrow (668)_{10} = (1234)_8$

οκταδικό σε δυαδικό

$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right)_8$
 $\left(\overbrace{(00)}^1 \overbrace{10}^2 \overbrace{100}^3 \overbrace{11100}^4 \right)_8$

δυαδικό σε οκταδικό

$\underbrace{1000}_{(4)} \underbrace{101}_{(2)} \underbrace{1101}_{(6)} \underbrace{101}_{(5)}_8$

Άλλα Συστήματα Αρίθμησης: **το** **Δεκαεξαδικό**

- Δεκαεξαδικό σύστημα ($B=16, D \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$):
οπότε

10 11 12 13 14 15

δεκαεξαδικό σε δεκαδικό : $(126)_{16} = 1 * 16^2 + 2 * 16^1 + 6 * 16^0 = (294)_{10}$

δεκαδικό σε δεκαεξαδικό : 3429_{10}

$\Rightarrow (3429)_{10} = (D65)_{16}$

δεκαεξαδικό σε δυαδικό

8 A C 3
1000 1010 1100 0011

δυαδικό σε δεκαεξαδικό

10 1011 1101 0110
2 B D 6

- Στις σύγχρονες εφαρμογές Η/Υ χρησιμοποιείται κυρίως το **δεκαεξαδικό** σύστημα, γιατί μπορούμε να εκφράσουμε δυαδικούς αριθμούς μεγάλου μήκους με λιγότερα ψηφία και, κατά συνέπεια, με μικρότερη πιθανότητα σφάλματος.

Άλλα Συστήματα Αρίθμησης: το Δεκαεξαδικό

Windows

An error has occurred. To continue:

Press Enter to return to Windows, or

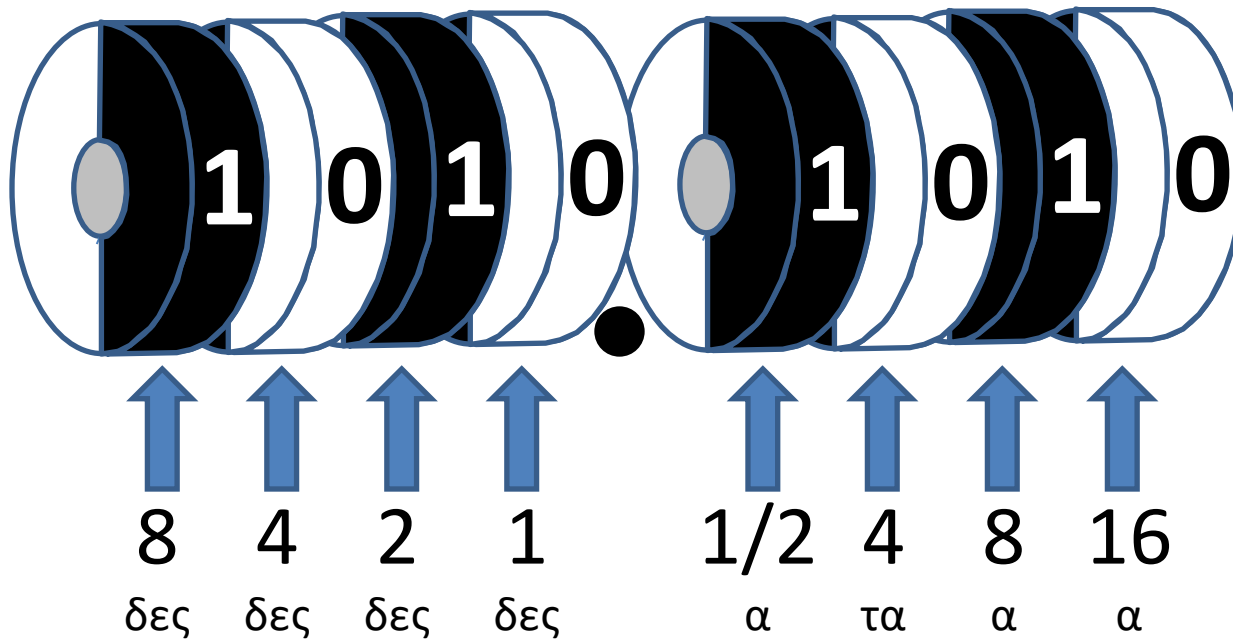
Press CTRL+ALT+DEL to restart your computer. If you do this,
you will lose any unsaved information in all open applications.

Error: 0E : 016F : BFF9B3D4

Press any key to continue _

Κλασματικοί Αριθμοί στο Δυαδικό

Δυαδικό **1010.1010**



Κλασματικοί Αριθμοί στο Δυαδικό

Αποκωδικοποίηση : Δεδομένου ότι

$$\left({}^{n-1}D \ {}^{n-2}D \ \dots \ {}^1D \ {}^0D \ . \ {}^{-1}D \ {}^{-2}D \ \dots \ {}^{-m}D \right)_B = \\ = {}^{n-1}D * B^{n-1} + \dots + {}^0D * B^0 + {}^{-1}D * B^{-1} + \dots + {}^{-m}D * B^{-m}$$

προφανώς $0.00101_2 = 0*2^{-1} + 0*2^{-2} + 1*2^{-3} + 0*2^{-4} + 1*2^{-5} = 0.15625_{10}$

Κωδικοποίηση : Αντιστρόφως, αν έχουμε τον αριθμό 0.158_{10} τότε

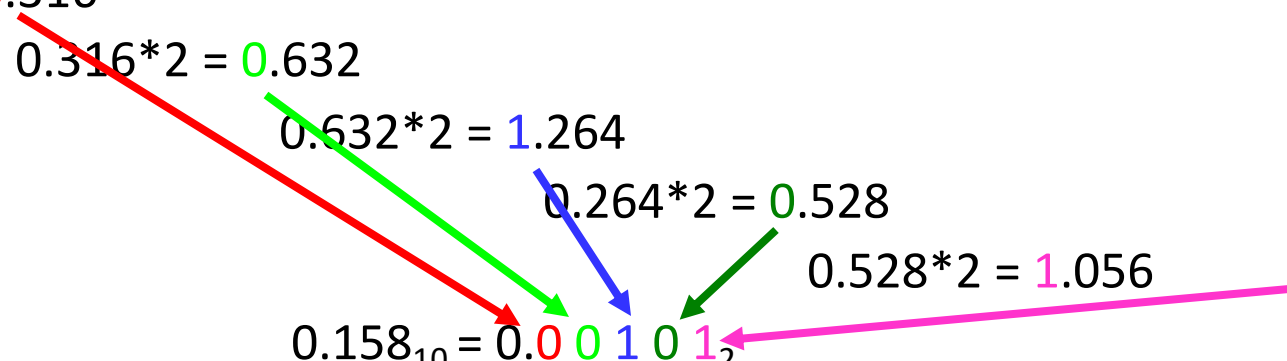
$$0.158 * 2 = 0.316$$

$$0.316 * 2 = 0.632$$

$$0.632 * 2 = 1.264$$

$$0.264 * 2 = 0.528$$

$$0.528 * 2 = 1.056$$

$$0.158_{10} = 0.\textcolor{red}{0}\textcolor{green}{0}\textcolor{blue}{1}\textcolor{green}{0}\textcolor{magenta}{1}_2$$


Παραδείγματα

Αποκωδικοποίηση:

$$10.011_2 \rightarrow D.DDD_{10} ?$$

Παραδείγματα

Κωδικοποίηση :

$2.8_{10} \rightarrow DD.DDD_2 ?$
 $\rightarrow DD.DDDD_2 ?$
 $\rightarrow DD.DDDDD_2 ?$
 $\rightarrow DD.DDDDDD_2 ?$

Πόσο περισσεύει?

Τελος