

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

1ο Τμήμα (Α - Κ): Αμφιθέατρο 4, Νέα Κτίρια ΣΗΜΜΥ

Θεωρία Πιθανοτήτων & Στοχαστικές Ανελίξεις - 3

5.6: Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης (Correlation) & Συνδιασποράς (Covariance)

5.7: Μετάδοση Στοχαστικής Ανέλιξης μέσω Γραμμικού Φίλτρου

5.8: Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος (Power Spectral Density)

καθ. Βασίλης Μάγκλαρης

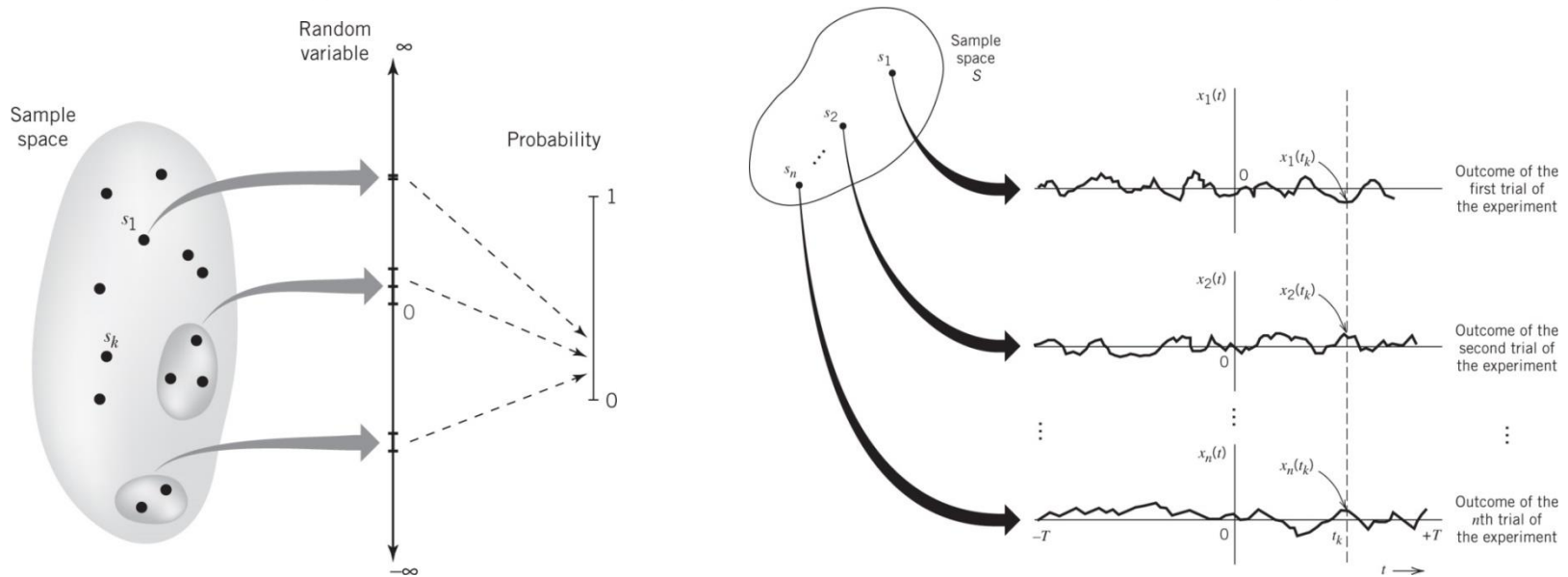
maglaris@netmode.ntua.gr

www.netmode.ntua.gr

Παρασκευή 29/3/2019 – Παρασκευή 5/4/2019

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.5 Στοχαστικές Ανελίξεις (Stochastic Processes) (επανάληψη)



Στοχαστική ή Τυχαία Διαδικασία - Ανέλιξη (Stochastic Process - SP ή Random Process)

Τυχαίο πείραμα με **Υλοποιήσεις** (Δείγματα) s_j **Χρονικές Συναρτήσεις** ή **Χρονοσειρές** (Time-Series), στοιχεία Δειγματικού Χώρου S

Παραδείγματα:

- Επικοινωνιακά σήματα σε χρονικό διάστημα παρατήρησης $[-T, T]$ του Δέκτη
- Τυχαίες παρεμβολές, Θόρυβος

Ορισμός: Η Στοχαστική Ανέλιξη (SP) $X(t)$ ορίζεται σαν ένα σύνολο χρονικών συναρτήσεων (κυματομορφών) που αντιστοιχούν σε τυχαίες υλοποιήσεις (δείγματα) ενός τυχαίου πειράματος

- Υλοποιήσεις (δείγματα) του SP $\{X(t, s)\} \triangleq X(t): s_j \rightarrow X(t, s_j) \triangleq x_j(t), -T \leq t \leq T$
- Τιμές δειγμάτων s_j κατά τη χρονική στιγμή t_k : Τυχαίες Μεταβλητές (Random Variables, RV) $X(t_k, s_j)$

$$\{x_1(t_k), x_2(t_k), \dots, x_n(t_k)\} = \{X(t_k, s_1), X(t_k, s_2), \dots, X(t_k, s_n)\}$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.6: Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης (Correlation) & Συνδιασποράς (Covariance) (1/6)

Μέση Τιμή της $X(t)$ τη χρονική στιγμή t (**Ensemble Average**): $\mu_X(t) = \mathbf{E}[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx$

1st Order Stationarity (SP στατικό 1^{ης} τάξης): $F_{X(t_1)}(x) = F_{X(t_2)}(x) \quad \forall (t_1, t_2) \Rightarrow \mu_X(t) = \mu_X, \forall t$ και γενικά η ροπή $\mathbf{E}[X^n(t)]$ είναι ανεξάρτητη της χρονικής στιγμής t

Αυτοσυσχέτιση (Autocorrelation): $R_X(t_1, t_2) = \mathbf{E}[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$

Οι τυχαίες μεταβλητές - RVs $X(t_1), X(t_2)$ αφορούν στο ίδιο δείγμα (χρονοσειρά) της $X(t)$

2nd Order Stationarity (SP στατικό 2^{ης} τάξης): $F_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = F_{X(t_1+\Delta t), X(t_2+\Delta t)}(x_1, x_2),$
 $\forall (t_1, t_2, \Delta t) \Rightarrow R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau), \tau = (t_2 - t_1), \forall (t_1, t_2)$

Αυτοδιασπορά (Autocovariance): $C_X(t_1, t_2) = \mathbf{E}[(X(t_1) - \mu_X(t_1))(X(t_2) - \mu_X(t_2))]$

Wide-sense Stationarity (Στατική Στοχαστική Ανέλιξη με την **Ευρεία Έννοια**):

$$\mu_X(t) = \mu_X, \forall t, \quad R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau), \tau = (t_2 - t_1), \forall (t_1, t_2)$$

$$C_X(t_1, t_2) = \mathbf{E}[(X(t_1) - \mu_X)(X(t_2) - \mu_X)] = R_X(t_2 - t_1) - \mu_X^2$$

Strict-sense Stationarity (Στατική Στοχαστική Ανέλιξη με τη **Στενή Έννοια**):

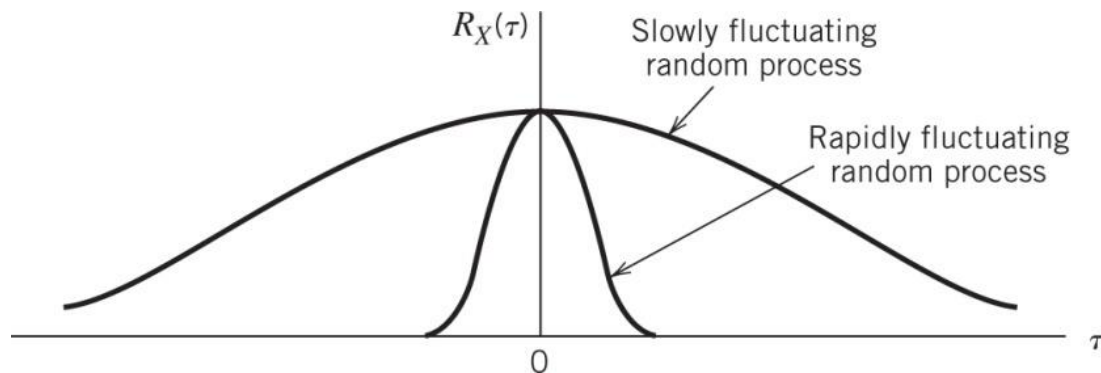
$$F_{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{X(t_1+\Delta t), X(t_2+\Delta t), \dots, X(t_n+\Delta t)}(x_1, x_2, \dots, x_n), \forall (n, t_1, t_2, \dots, t_n, \Delta t)$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.6: Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης (Correlation) & Συνδιασποράς (Covariance) (2/6)

Ιδιότητες Αυτοσυσχέτισης *Wide-sense Stationary SP*: $R_X(\tau) = \mathbf{E}[X(t + \tau)X(t)] = \mathbf{E}[X(t)X(t - \tau)]$

- $R_X(0) = \mathbf{E}[X^2(t)] > 0$
- $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$ (αρτιότητα της Αυτοσυσχέτισης)
- $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$ (η μέγιστη τιμή της Αυτοσυσχέτισης προκύπτει για $\tau = 0$) :
 $\mathbf{E}[(X(t + \tau) \pm X(t))^2] \geq 0, \quad \mathbf{E}[X^2(t + \tau)] \pm 2\mathbf{E}[X(t + \tau)X(t)] + \mathbf{E}[X^2(t)] = 2R_X(0) \pm 2R_X(\tau) \geq 0$
 $\Rightarrow R_X(0) \geq \pm R_X(\tau)$
- Η Αυτοσυσχέτιση δίνει μια μετρική του βαθμού εξάρτησης των τιμών της $X(t)$ σαν συνάρτηση της χρονικής τους απόστασης ή της επιρροής της $X(t)$ στην $X(t + \tau)$



5.6: Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης (Correlation) & Συνδιασποράς (Covariance) (3/6)

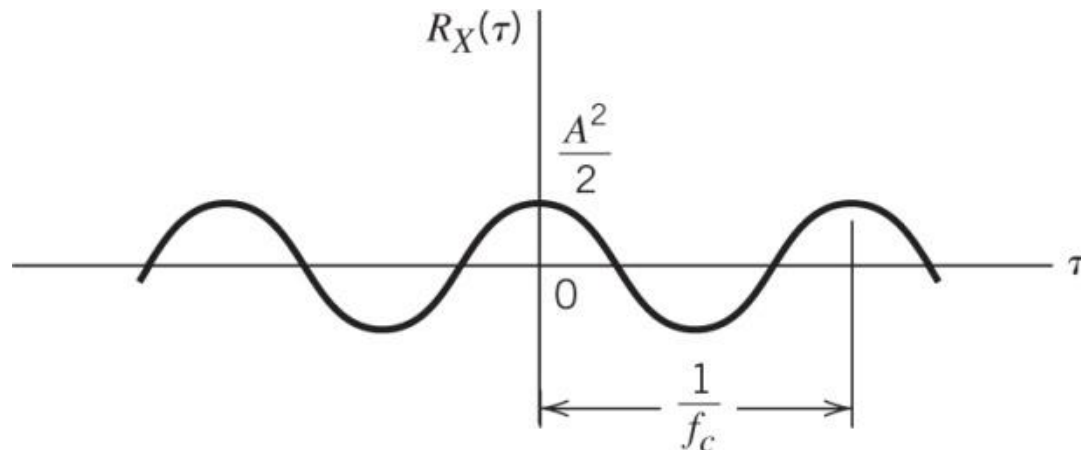
Παράδειγμα: Ημιτονοειδές Σήμα Τυχαίας Φάσης

$X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta)$ όπου A, f_c σταθερές και Θ RV ομοιόμορφα κατανομημένη στο $(-\pi, \pi)$

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \mathbf{E}[X(t + \tau)X(t)] = \mathbf{E}[A^2 \cos(2\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + \Theta) \cos(2\pi f_c t + \Theta)] \\ &= \frac{A^2}{2} \mathbf{E}[A^2 \cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\Theta)] + \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \\ &= \frac{A^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\theta) d\theta + \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) = 0 + \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau)$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.6: Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης (Correlation) & Συνδιασποράς (Covariance) (4/6)

Παράδειγμα: Τυχαίο Δυαδικό Σήμα

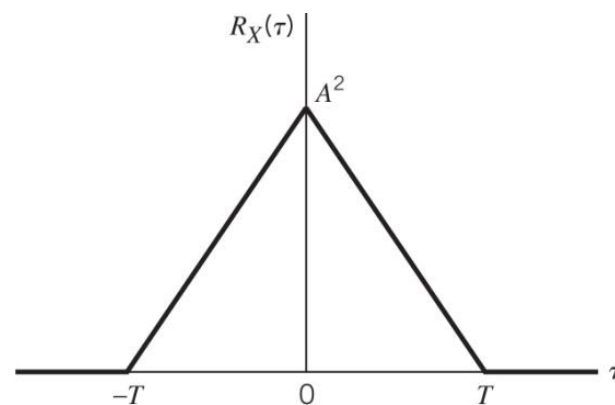
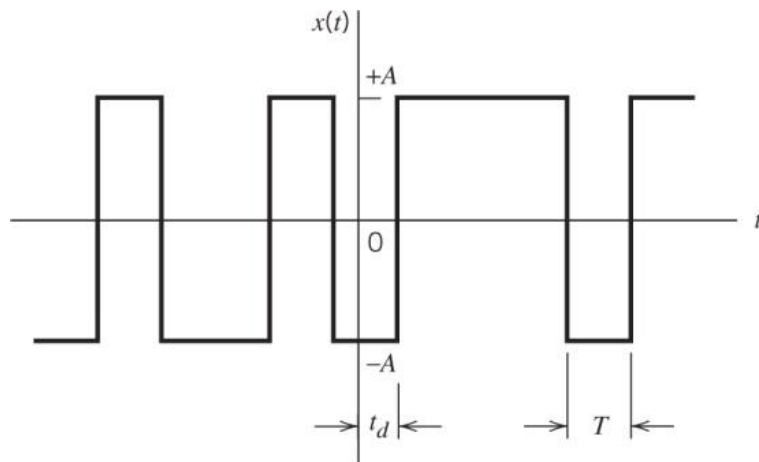
Ψηφιακή Ακολουθία (0,1) οδηγεί Στοχαστική Ανέλιξη $X(t)$ ορθογωνίων παλμών με τιμές $\pm A$ σε σταθερά διαστήματα T

Τα (0,1) αντιστοιχούν σε **ανεξάρτητες** δοκιμές Bernoulli με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{2}$

Οι μεταβάσεις ξεκινούν με τυχαία αρχική καθυστέρηση t_d , ομοιόμορφα κατανομημένη μεταξύ $[0, T]$:

$$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t_d \leq T \\ 0, & |t_d| > T \end{cases}$$

... 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 1 ...



- Εφόσον οι παλμοί παίρνουν τις τιμές $\pm A$ με ίσες πιθανότητες, $\mathbf{E}[X(t)] = \frac{A}{2} - \frac{A}{2} = 0$
- Αν $|\tau| > T$ τότε οι $X(t), X(t + \tau)$ μπορεί να ανήκουν σε διαφορετικούς ανεξάρτητους παλμούς $\pm A$:
 $R_X(t, t + \tau) = \mathbf{E}[X(t)X(t + \tau)] = \mathbf{E}[X(t)]\mathbf{E}[X(t + \tau)] = 0, |\tau| > T$
- Αν $|\tau| \leq T$ τότε οι $X(t), X(t + \tau)$ μπορεί να ανήκουν στην ίδιο παλμό και να δίνουν γινόμενο A^2 εφόσον $t_d < T - |\tau|$, αλλιώς ανήκουν σε διαδοχικούς ανεξάρτητους παλμούς με γινόμενο 0:

$$\mathbf{E}[X(t)X(t + \tau)|t_d] = \begin{cases} A^2, & t_d < T - |\tau| \\ 0, & t_d \geq T - |\tau| \end{cases} \text{ και } R_X(t, t + \tau) = \int_0^{T-|\tau|} A^2 f_{T_d}(t_d) dt_d = A^2(1 - \frac{|\tau|}{T}), |\tau| \leq T$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.6: Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης (Correlation) & Συνδιασποράς (Covariance) (5/6)

Συναρτήσεις Αλληλοσυσχέτισης (Cross-correlation Functions)

$X(t), R_X(t, u)$ και $Y(t), R_Y(t, u)$: $R_{XY}(t, u) = \mathbf{E}[X(t)Y(u)]$

Αν οι $X(t), Y(t)$ στατικές με την ευρεία έννοια και συνδυαστικά (jointly) στατικές με την ευρεία έννοια:

$$R_{XY}(t, u) = R_{XY}(t - u) = R_{XY}(\tau)$$

Ιδιότητα: $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$ (δεν ισχύουν κατ' ανάγκη οι ιδιότητες αρτιότητας και μέγιστου για $\tau = 0$)

Παράδειγμα: Ορθογωνικά Διαμορφωμένες Ανελίζεις (Quadrature-Modulated Processes) σε Φέρουσα f_c

$$X_1(t) = X(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

$$X_2(t) = X(t) \sin(2\pi f_c t + \Theta)$$

όπου Θ ομοιόμορφα κατανομημένη RV στο $(0, 2\pi)$: $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$, $0 \leq \theta < 2\pi$ και ανεξάρτητη του $X(t)$

Έχουμε $R_{1,2}(\tau) = \mathbf{E}[X_1(t)X_2(t - \tau)] = \mathbf{E}[X(t)X(t - \tau) \cos(2\pi f_c t + \Theta) \sin(2\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + \Theta)]$ και

$$R_{1,2}(\tau) = \frac{1}{2} R_X(\tau) \mathbf{E}[\sin(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + 2\Theta) - \sin(2\pi f_c \tau)]$$

$$= \frac{1}{2} R_X(\tau) \left\{ \int_0^{2\pi} \sin(4\pi f_c t - 2\pi f_c \tau + 2\theta) \frac{1}{2\pi} d\theta - \sin(2\pi f_c \tau) \right\} = -\frac{1}{2} R_X(\tau) \sin(2\pi f_c \tau)$$

$R_{1,2}(0) = \mathbf{E}[X_1(t)X_2(t)] = 0$ ή οι $X_1(t)$ και $X_2(t)$ είναι ορθογώνιες κατά την ίδια χρονική στιγμή t

$$\cos(x) \sin(y) = \frac{1}{2} [\sin(x + y) - \sin(x - y)]$$

5.6: Μέση Τιμή, Συναρτήσεις Συσχέτισης (Correlation) & Συνδιασποράς (Covariance) (6/6)

Εργοδικότητα ως προς την Μέση Τιμή (*Mean-Ergodic Stochastic Process*)

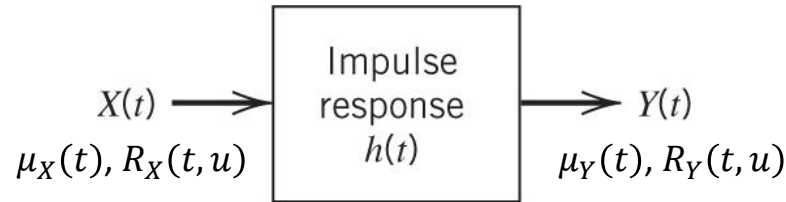
Η τιμή της $X(t)$ για την στιγμή $t = t_k$ αποτελεί τυχαία μεταβλητή $X(t_k) \rightarrow x_i(t_k)$ με μέσο όρο $\mu_X(t_k) = \mathbf{E}[X(t_k)]$ που υπολογίζεται ως **ensemble average** των **εμφανίσεων** $x_i(t_k)$ της $X(t)$ μετρούμενων στο χρόνο t_k : $\mathbf{E}[X(t_k)] = \mu_X(t_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_k)$

Ανέλιξη **στατική με την ευρεία έννοια** είναι **εργοδική ως προς την μέση τιμή** (**Mean-Ergodic**) αν η μ_X συγκλίνει με τον χρονικό μέσο (**time average**) μοναδικής εμφάνισης της $X(t)$:

$$\mathbf{E}[X(t)] = \mu_X(t) = \mu_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.7: Μετάδοση Στοχαστικής Ανέλιξης μέσω Γραμμικού Φίλτρου



$$\mu_Y(t) = \mathbf{E}[Y(t)] = \mathbf{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)X(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mathbf{E}[X(t-\tau)]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\mu_X(t-\tau)d\tau$$

αν $\mathbf{E}[X(t)] < \infty \quad \forall t$

Αν η $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια:

$$\mu_Y(t) = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)d\tau = \mu_X H(0)$$

και

$$R_Y(t, u) = \mathbf{E}[Y(t)Y(u)] = \mathbf{E}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)X(t-\tau_1)d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_2)X(u-\tau_2)d\tau_2\right] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)\mathbf{E}[X(t-\tau_1)X(u-\tau_2)]d\tau_1d\tau_2 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(t-\tau_1, u-\tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad \text{αν } \mathbf{E}[X^2(t)] < \infty \quad \forall t$$

Αν η $X(t)$ είναι στατική με την ευρεία έννοια, τότε:

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1)h(\tau_2)R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2)d\tau_1d\tau_2$$

και η $Y(t)$ είναι επίσης στατική με την ευρεία έννοια

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.8 Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος (Power Spectral Density) (1/7)

Ορισμός

Για Στοχαστική Ανέλιξη $X(t)$ Wide-Sense Stationary (**WSS**) με Μέσο Όρο μ_X και Αυτοσυσχέτιση $R_X(\tau)$ ορίζεται η σχέση **Wiener-Khinchin** σαν το ζεύγος μετασχηματισμών Fourier: Αυτοσυσχέτιση (**Autocorrelation**) $R_X(\tau) \leftrightarrow S_X(f)$ Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος (**Power Spectral Density**)

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau, \quad R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \exp(j2\pi f\tau) df$$

Ιδιότητες:

- $S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau$, εμβαδόν κάτω από την $R_X(\tau)$
- $E[X^2(t)] = R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$, εμβαδόν κάτω από την $S_X(f)$ (μέση στιγμιαία ισχύς στοχαστικού σήματος)
- $S_X(-f) = S_X(f) : R_X(\tau)$ άρτια πραγματική συνάρτηση $\Rightarrow R_X(\tau) = R_X(-\tau) \leftrightarrow S_X(-f) = S_X(f)$

και από τον τύπο του Euler $\exp(jx) = \cos(x) + j\sin(x) \Rightarrow$

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau, \quad R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) \cos(2\pi f\tau) df$$

- $S_X(f) \geq 0 \quad \forall f$: Η $S_X(f)$ είναι η κατανομή ανά συχνότητα f της στιγμιαίας ισχύος $E[X^2(t)]$ στοχαστικού σήματος $X(t)$ και άρα μη αρνητική (δείτε περισσότερα στη 15^η διαφάνεια)

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

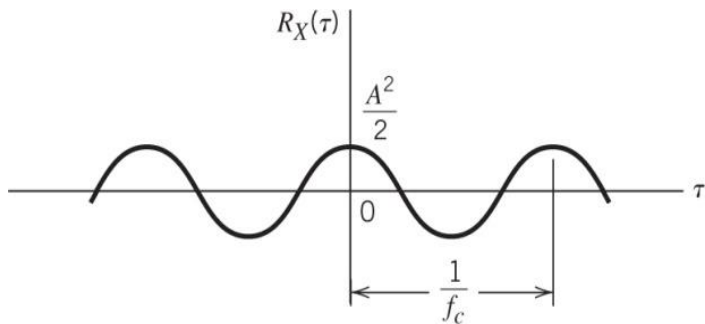
5.8 Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος (Power Spectral Density) (2/7)

Παράδειγμα: Ημιτονοειδές Σήμα Τυχαίας Φάσης (συνέχεια)

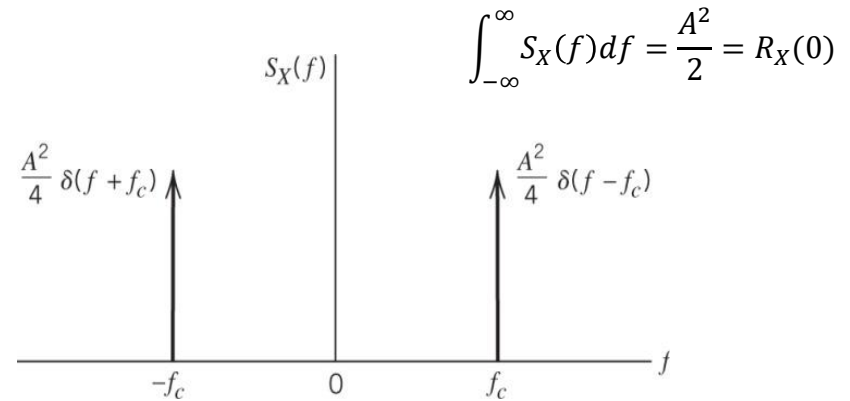
$X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta)$ όπου A, f_c σταθερές και Θ RV ομοιόμορφα κατανοημένη στο $(-\pi, \pi)$

$$R_X(\tau) = \mathbf{E}[X(t + \tau)X(t)] = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) \text{ και}$$

$$S_X(f) = \frac{A^2}{4} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)]$$

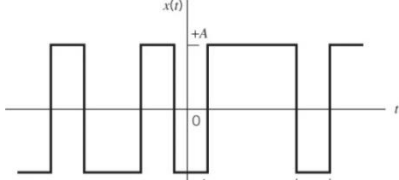


$\Leftrightarrow$



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.8 Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος (Power Spectral Density) (3/7)



Παράδειγμα: Τυχαίο Δυαδικό Σήμα (*συνέχεια*)

Ψηφιακή Ακολουθία (0,1) οδηγεί Στοχαστική Ανέλιξη $X(t)$ παλμών με τιμές $\pm A$ σε σταθερά διαστήματα T . Τα (0,1) αντιστοιχούν σε *ανεξάρτητες* δοκιμές Bernoulli με ίσες πιθανότητες $\frac{1}{2}$.

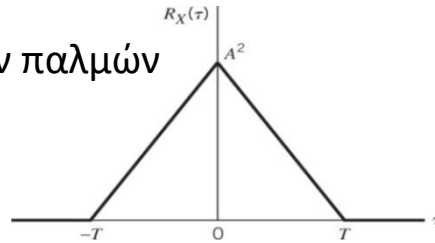
Οι μεταβάσεις ξεκινούν με τυχαία αρχική καθυστέρηση t_d , ομοιόμορφα κατανομημένη στο $[0, T]$:

$$f_{T_d}(t_d) = \begin{cases} \frac{1}{T}, & 0 \leq t_d \leq T \\ 0, & |t_d| > T \end{cases}$$

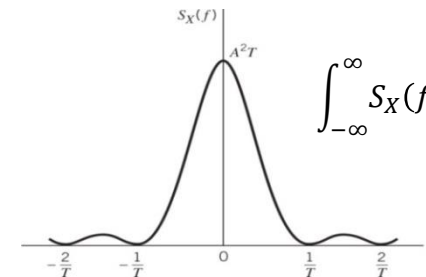
$$\mathbf{E}[X(t)X(t+\tau)|t_d] = \begin{cases} A^2, & t_d < T - |\tau| \\ 0, & t_d \geq T - |\tau| \end{cases} \text{ και } R_X(t, t+\tau) = \int_0^{T-|\tau|} A^2 f_{T_d}(t_d) dt_d = A^2(1 - \frac{|\tau|}{T}), |\tau| \leq T$$

$$R_X(\tau) \leftrightarrow S_X(f) = \int_{-T}^T A^2(1 - \frac{|\tau|}{T}) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = A^2 T \text{sinc}^2(fT)$$

$R_X(\tau)$: Συνέλιξη ορθογωνίων παλμών



$\leftrightarrow$



$$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = A^2 = R_X(0)$$

Η ενέργεια ορθογώνιου παλμού $E = A^2 T = \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df$ (**Θεώρημα Rayleigh**):

$$g(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases} \leftrightarrow G(f) = AT \text{sinc}(fT)$$

κατανέμεται στο **χρόνο** σύμφωνα με την **στιγμιαία ισχύ** $|g(t)|^2 = A^2, -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$, και σε **συχνότητες** σύμφωνα με την **Energy Spectral Density** $\varepsilon_g(f) = |G(f)|^2 = A^2 T^2 \text{sinc}^2(fT) \Rightarrow$

Power Spectral Density ακολουθίας παλμών: $S_X(f) = A^2 T \text{sinc}^2(fT) = \frac{\varepsilon_g(f)}{T} = \frac{\text{Energy Spectral Density Παλμού}}{\text{Διάρκεια Παλμού}}$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.8 Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος (Power Spectral Density) (4/7)

Παράδειγμα: Μείξη (Πολλαπλασιασμός) Στοχαστικής Ανέλιξης με Ανεξάρτητη Ημιτονοειδή Ανέλιξη

$$Y(t) = X(t) \cos(2\pi f_c t + \Theta)$$

όπου $X(t)$ **WSS** και Θ ανεξάρτητη RV ομοιόμορφα κατανομημένη στο $(0, 2\pi)$

$$\begin{aligned} R_Y(\tau) &= \mathbf{E}[Y(t + \tau)Y(t)] = \mathbf{E}[X(t + \tau)X(t)]\mathbf{E}[\cos(2\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + \Theta) \cos(2\pi f_c t + \Theta)] \\ &= \frac{1}{2} R_X(\tau) \mathbf{E}[\cos(2\pi f_c t) + \cos(4\pi f_c t + 2\pi f_c \tau + 2\Theta)] = \frac{1}{2} R_X(\tau) \cos(2\pi f_c \tau) \end{aligned}$$

$$S_Y(f) = \frac{1}{4} [S_X(f - f_c) + S_X(f + f_c)]$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.8 Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος (Power Spectral Density) (5/7)

Σχέση Εισόδου – Εξόδου Power Spectral Densities σε Γραμμικά Σταθερά Φίλτρα $h(t) \leftrightarrow H(f)$

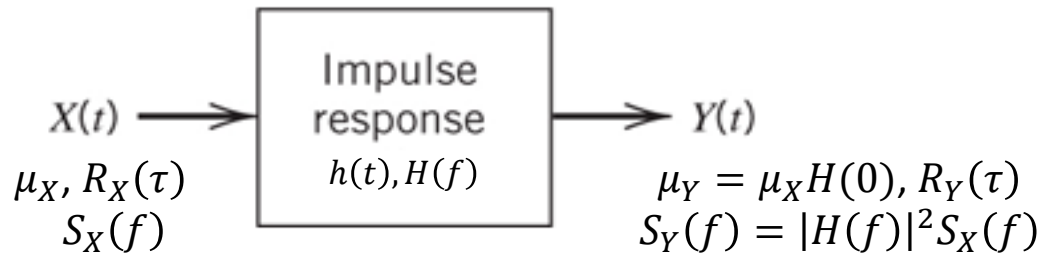
$$Y(t) = X(t) * h(t) \text{ όπου } X(t), Y(t) \text{ WSS}$$

$$S_Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_Y(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau - \tau_1 + \tau_2) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau_1 d\tau_2 d\tau$$

$$\text{Με } \tau_0 = \tau - \tau_1 + \tau_2 \text{ έχω } S_Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau_1) h(\tau_2) R_X(\tau_0) \exp[-j2\pi f(\tau_0 + \tau_1 - \tau_2)] d\tau_0 d\tau_2 d\tau_1 \Rightarrow$$

$$S_Y(f) = H(f) H^*(f) S_X(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

$$\text{και } \mathbf{E}[Y^2(t)] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f) df \text{ μέση στιγμιαία ισχύς στοχαστικού σήματος } Y(t)$$



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.8 Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος (Power Spectral Density) (6/7)

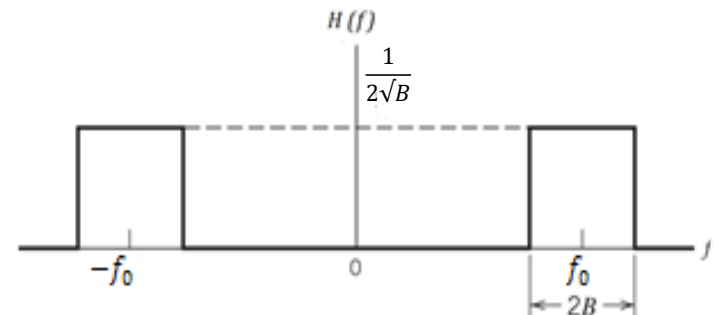
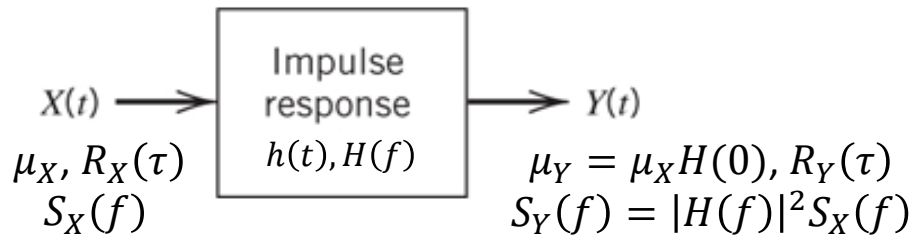
Εντοπισμός Φάσματος Ισχύος Ανέλιξης WSS σε Συχνότητα f_0

Το $X(t)$ περνάει από **Band-Pass Filter** ενέργειας $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \left(\frac{1}{2\sqrt{B}}\right)^2 (2B + 2B) = 1$

$X(t) \rightarrow Y(t)$, $S_Y(f) = \frac{1}{4B} S_X(f)$ για $f_0 - B \leq |f| \leq f_0 + B$ και $S_Y(f) = 0$ για κάθε άλλη τιμή της f

Για B πολύ μικρό απομονώνουμε την στιγμιαία ισχύ $S_Y(f_0) = S_X(f_0)$ στη συχνότητα f_0 :

$E[Y^2(t)] = R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 S_X(f) df \rightarrow S_X(f_0) \geq 0$ για αυθαίρετη συχνότητα f_0 (απόδειξη ιδιότητας μη αρνητικής τιμής της Πυκνότητας Φάσματος Ισχύος, από την 10^η διαφάνεια)



5.8 Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος (Power Spectral Density) (7/7)

Παράδειγμα: Περιοδικό Φίλτρο Κτένι (*Comb Filter*)

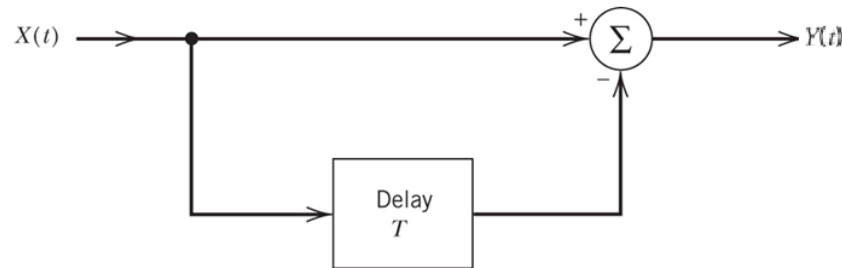
Αποτελείται από γραμμή καθυστέρησης (*delay line*) και διάταξη αθροιστή (*summing device*):

$$H(f) = 1 - \exp(-2j\pi fT) = 1 - \cos(2\pi fT) + j\sin(2\pi fT)$$

$$|H(f)|^2 = 2[1 - \cos(2\pi fT)] = 4 \sin^2(\pi fT)$$

Για $f \ll \frac{1}{T}$:

$\sin(2\pi fT) \cong 2\pi fT, \cos(\pi fT) \cong 1 \Rightarrow H(f) \cong j2\pi fT$ που αντιστοιχεί σε **παράγωγο** στο πεδίο του χρόνου
και $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f) = 4 \sin^2(\pi fT) S_X(f) \cong 4\pi^2 f^2 T^2 S_X(f)$



(a)

