

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

1ο Τμήμα (Α - Κ): Αμφιθέατρο 4, Νέα Κτίρια ΣΗΜΜΥ

Θεωρία Πιθανοτήτων & Στοχαστικές Ανελίξεις - 1

5.1: Εισαγωγή

5.2: Πιθανότητες

5.3: Τυχαίες Μεταβλητές

καθ. Βασίλης Μάγκλαρης

maglaris@netmode.ntua.gr

www.netmode.ntua.gr

Παρασκευή 22/3/2019

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.1 Εισαγωγή

Τυχαίο σήμα: Άγνοια δέκτη για ακριβή πληροφορία προς μετάδοση

Τυχαία παρεμβολή: Θόρυβος από παράλληλες μεταδόσεις, κλιματικές συνθήκες, ακτινοβολίες, θερμικό θόρυβο συσκευών

Μέθοδοι εκτίμησης στατιστικών χαρακτηριστικών: Προκύπτουν από την φύση του τυχαίου σήματος/παρεμβολής και αντίστοιχες μετρήσεις στο παρελθόν των σχετικών τυχαίων μεταβλητών (*random variables*) και ιδιοτήτων χρονικής εξέλιξης στοχαστικών ανελίξεων (*time series, stochastic processes*) των σημάτων και παρεμβολών

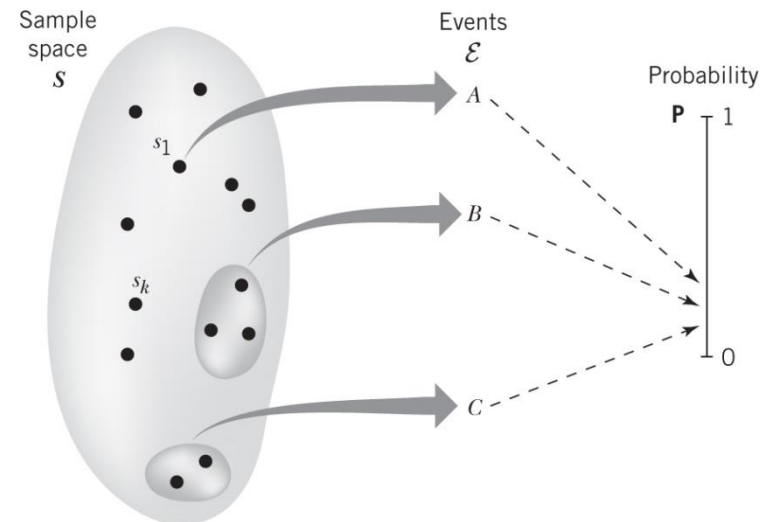
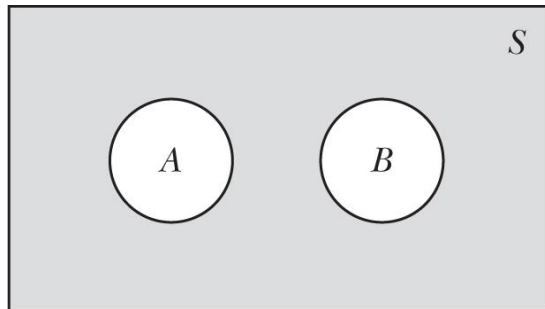
Πρόβλεψη με βάση στατιστικές ιδιότητες: Μέση τιμή (*mean*), διασπορά (*variance*), ιστόγραμμα κατανομής τυχαίας μεταβλητής (*histogram of random variable distribution*), συσχέτιση (*correlation*) και φασματική κατανομή (*power spectral density*) των μοντέλων στοχαστικών ανελίξεων

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.2 Πιθανότητες (1/3)

Βασικοί Ορισμοί

- Τυχαίο πείραμα (*random experiment*) με πιθανά ενδεχόμενα (*outcomes*) που ανήκουν στο υπερσύνολο ενδεχομένων S
- Αντιστοίχιση ενδεχομένων σε διακριτά ή συνεχή **δείγματα** (*sample points*) s_k του **χώρου δειγμάτων** (*sample space*) $S, s_k \in S$
- **Συμβάν** (*event*): Υποσύνολο δειγμάτων $A = \{s_1, s_2, \dots\}, A \subseteq S$
- **Σχετική συχνότητα δείγματος ή συμβάντος** (*relative frequency*): Αριθμός εμφανίσεων m δείγματος s_k ή του υποσυνόλου δειγμάτων ενός συμβάντος A σε n επαναλήψεις του τυχαίου πειράματος
- **Μέτρο Πιθανότητας** (*probability measure*):
 - Συνάρτηση $A \rightarrow \mathbf{P}[A], 0 \leq \mathbf{P}[A] \leq 1$
 - **Στοιχειώδες γεγονός** (*elementary event*) αποτελούμενο από ένα απλό δείγμα $A = \{s_k\}, \mathbf{P}[A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$ (σχετική συχνότητα δείγματος s_k)
 - **Βέβαιο γεγονός** (*certain event*) $E = S, \mathbf{P}[S] = 1$
 - **Μηδενικό γεγονός** (*null event*) $E = \emptyset, \mathbf{P}[\emptyset] = 0$
 - **Αμοιβαία αποκλειόμενα γεγονότα** (*mutually exclusive events*) $A \subset S, B \subset S, A \cap B = \emptyset, \mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B]$

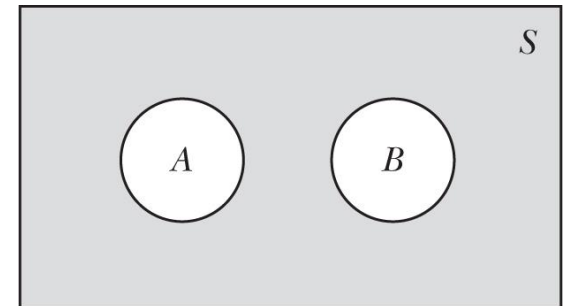
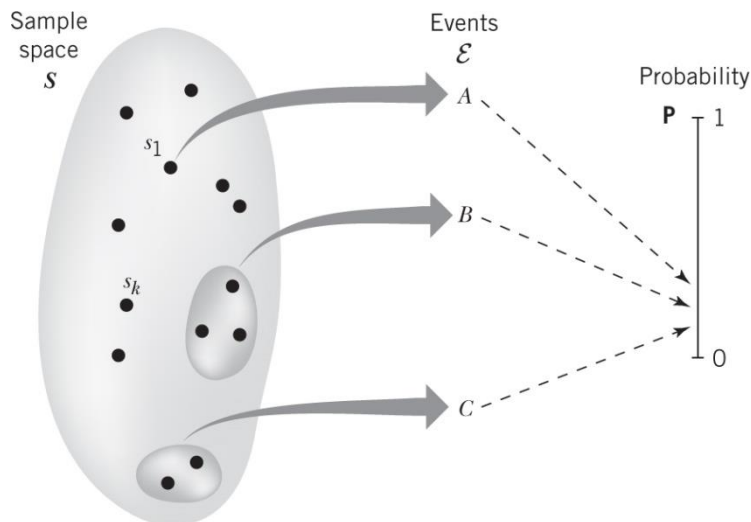


ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.2 Πιθανότητες (2/3)

Αξιωματικός Ορισμός (Kolmogorov)

- **Συμβάν** (*event*): Υποσύνολο δειγμάτων $A = \{s_1, s_2, \dots\}$, $A \subseteq S$, $s_k \in S$ (*sample space*)
- **Μέτρο Πιθανότητας** (*probability measure*): Συνάρτηση $A \rightarrow \mathbf{P}[A] \geq 0$ που ικανοποιεί τα τρία αξιώματα του Kolmogorov:
 1. $0 \leq \mathbf{P}[A] \leq 1$
 2. $\mathbf{P}[S] = 1$
 3. Αν $A \subset S, B \subset S$ και $A \cap B = \emptyset$ (*mutually exclusive events*) $\Rightarrow \mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B]$
- Συνεπαγόμενες ιδιότητες:
 1. $\mathbf{P}[\bar{A}] = 1 - \mathbf{P}[A]$, $\bar{A} \cup A = S$, $\bar{A} \cap A = \emptyset$
 2. $\mathbf{P}[A \cup B] = \mathbf{P}[A] + \mathbf{P}[B] - \mathbf{P}[A \cap B]$
 3. Αν $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = S$, $A_i \cap A_j = \emptyset \forall (i, j)$ τότε $\mathbf{P}[A_1] + \mathbf{P}[A_2] + \dots + \mathbf{P}[A_m] = 1$



5.2 Πιθανότητες (3/3)

Πιθανότητα υπό Συνθήκη

- Πιθανότητα B **υπό την συνθήκη** A : $P[B|A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$

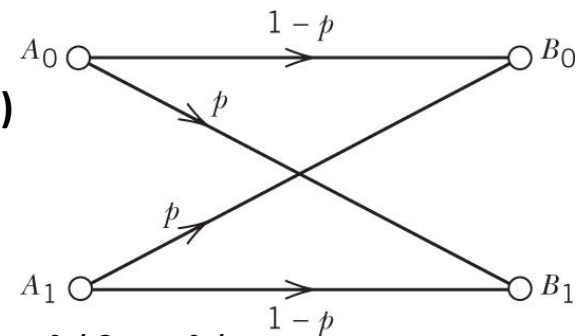
$$\text{και } P[A \cap B] = P[B|A]P[A] = P[A|B]P[B]$$

- $P[B|A] = \frac{P[A|B]P[B]}{P[A]}$ Κανόνας **Bayes**

- Αν $P[B|A] = P[B]$ τότε τα γεγονότα A και B είναι στατιστικά **ανεξάρτητα** (*independent*) και $P[A \cap B] = P[A]P[B]$

- Αν οι συνθήκες A_i είναι γεγονότα ξένα μεταξύ τους και καλύπτουν τον χώρο $S = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ τότε $P[B] = \sum_{i=1}^m P[B|A_i]P[A_i]$ (Νόμος **Συνολικής Πιθανότητας**)

Δυαδικός συμμετρικός δίαυλος (Memoryless Binary Symmetric Channel)



- Ο πομπός στέλνει σειριακά και χωρίς μνήμη δυαδικά ψηφία 0,1 (γεγονότα A_0, A_1) με εκ των προτέρων πιθανότητες (*a priori probabilities*) $P[A_0] = p_0, P[A_1] = p_1 = 1 - p_0$
- Ο δέκτης ερμηνεύει λήψεις ψηφίων 0,1 (γεγονότα B_0, B_1) με πιθανότητα λάθους λόγω παραμορφώσεων του διαύλου ίση με $P[B_1|A_0] = P[B_0|A_1] = p$
- Οι πιθανότητες ορθής μετάδοσης είναι $P[B_0|A_0] = P[B_1|A_1] = 1 - p$
- Η πιθανότητα λήψης ψηφίου 0 είναι $P[B_0] = P[B_0|A_0]P[A_0] + P[B_0|A_1]P[A_1] = (1 - p)p_0 + pp_1$
- Ομοίως $P[B_1] = P[B_1|A_0]P[A_0] + P[B_1|A_1]P[A_1] = pp_0 + (1 - p)p_1$
- Από τον κανόνα του Bayes προκύπτουν οι εκ των υστέρων πιθανότητες (*a posteriori probabilities*) ορθής μετάδοσης όταν ο δέκτης ερμηνεύει 0 ή 1 (γεγονότα B_0, B_1) είναι:

$$P[A_0|B_0] = \frac{P[B_0|A_0]P[A_0]}{P[B_0]} = \frac{(1 - p)p_0}{(1 - p)p_0 + pp_1}, \quad P[A_1|B_1] = \frac{P[B_1|A_1]P[A_1]}{P[B_1]} = \frac{(1 - p)p_1}{pp_0 + (1 - p)p_1}$$

Αν $P[A_0] = p_0 \rightarrow 1$ (ο δέκτης ξέρει πως ο πομπός στέλνει συνήθως 0), $P[A_0|B_0] \rightarrow 1, P[A_1|B_0] \rightarrow 0 \forall p$

5.3 Τυχαίες Μεταβλητές (1/3)

Ορισμοί

Τυχαία Μεταβλητή (Random Variable - RV): Αντιστοίχιση (συνάρτηση) ενδεχομένων $s_k \in S$ σε πραγματικούς αριθμούς (παραμέτρου) x : $X(s_k) = x \in (-\infty, \infty)$

Γεγονότα $A \subseteq S$ απεικονίζονται σε σύνολα διακριτών σημείων ή/και σε συνεχή υποδιαστήματα της παραμέτρου x με στοιχεία τις τυχαίες μεταβλητές $X(s)$ ή X των ενδεχομένων $s \in A$

Συνάρτηση Αθροιστικής Κατανομής (Cumulative Distribution Function, CDF) $F_X(x) = \mathbf{P}[X \leq x]$

- Για $-\infty < x < \infty$, $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- Μονότονη μη φθίνουσα συνάρτηση της παραμέτρου x : $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ αν $x_1 < x_2$
- Ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$

Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας (Probability Density Function, PDF) Αν η CDF παραγωγίσιμη:

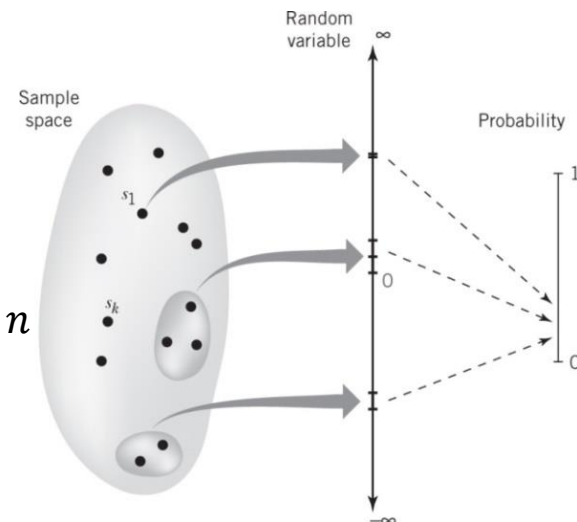
$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x), \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy$$

- Ισχύει $\mathbf{P}[x_1 < X \leq x_2] = \mathbf{P}[X \leq x_2] - \mathbf{P}[X \leq x_1] = F_X(x_2) - F_X(x_1)$ και εφόσον ορίζεται η PDF $\mathbf{P}[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(y) dy$
- Αν ορίζεται η PDF, $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$

Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας ~ Κανονικοποιημένο Ιστόγραμμα

(Probability Mass Function ~ Normalized Histogram)

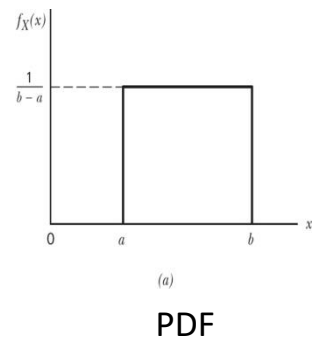
- Σε περίπτωση **διακριτών** ενδεχομένων s_k , k ακέραιος αριθμός: $\mathbf{P}[X = x_k] \triangleq \mathbf{P}_k$, και $F_X(x) = \mathbf{P}[X \leq x] = \sum_{k=-\infty}^n \mathbf{P}_k$ για όλα τα $k \leq n$ που ικανοποιούν την ανισότητα $x_k \leq x$
- Σε περίπτωση **συνεχών** ενδεχομένων: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \mathbf{P}[x - \Delta x < X \leq x] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{f_X(x) \Delta x\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{F_X(x) - F_X(x - \Delta x)\} = 0$



5.3 Τυχαίες Μεταβλητές (2/3)

Ομοιόμορφη Κατανομή (Uniform Distribution)

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b \\ 0, & x > b \end{cases}$$



Πολλές Τυχαίες Μεταβλητές

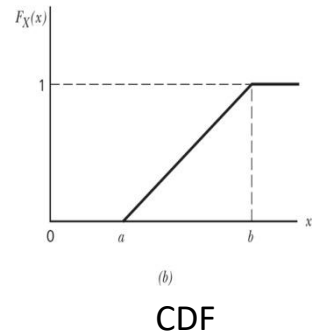
Joint CDF: $F_{X,Y}(x, y) = \mathbf{P}[X \leq x, Y \leq y], (-\infty < X \leq x, -\infty < Y \leq y)$

Joint PDF: $f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} \geq 0$ εφόσον ορίζονται

$$\text{οπότε } \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 1$$

Για Ανεξάρτητες Τυχαίες Μεταβλητές: $F_{X,Y}(x, y) = \mathbf{P}[X \leq x] \mathbf{P}[Y \leq y] = F_X(x) F_Y(y)$

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) \text{ εφόσον ορίζονται}$$



Οριακές – Marginal CDF, PDF: $F_X(x) = F_{X,Y}(x, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} [\int_{-\infty}^x f_{X,Y}(\xi, \eta) d\xi] d\eta, f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, \eta) d\eta$

Υπό Συνθήκη – Conditional PDF: $f_Y(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)}$ εφόσον $f_X(x) > 0, \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y|x) dx = 1$

Αν οι X, Y είναι ανεξάρτητες R.V. $f_Y(y|x) = f_Y(y)$ και $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

Ολοκλήρωμα Stieltjes:

$$\mathbf{P}[x_1 < X \leq x_2] = F_X(x_2) - F_X(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, x_1 = (n_1 \Delta x), x_2 = (n_2 \Delta x)} \left\{ \sum_{n=n_1}^{n_2-1} [F_X((n+1)\Delta x) - F_X(n\Delta x)] \right\}$$

$$\text{και } \mathbf{P}[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} dF_X(y) \text{ (Ολοκλήρωμα Stieltjes)}$$

Αν ορίζεται η $f_X(x)$, $dF_X(x) = df_X(x)dx = \mathbf{P}[x < X \leq x + dx]$ οπότε $\mathbf{P}[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(y) dy$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.3 Τυχαίες Μεταβλητές (3/3)

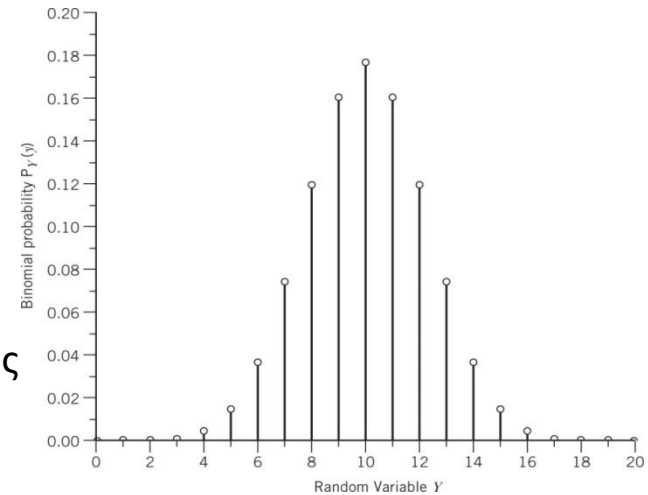
Διωνυμική Τυχαία Μεταβλητή (Binomial R.V.)

Θεωρούμε τυχαίο πείραμα N ανεξαρτήτων επαναλαμβανόμενων δοκιμών **Bernoulli Trials** π.χ. ρίψεις νομισμάτων με δύο ενδεχόμενα: H (**H**eads, κορώνα) και T (**T**ails, γράμματα).

Έστω X_n τυχαία μεταβλητή με δύο δυνατές τιμές στα ενδεχόμενα $H \rightarrow 1$ και $T \rightarrow 0$ κατά την δοκιμή n , $n = 1, 2, \dots, N$

$$P[H] = p, P[T] = 1 - p$$

Διωνυμική Τυχαία Μεταβλητή (Binomial R.V.): $Y = \sum_{n=1}^N X_n$ (αριθμός από ενδεχόμενα H σε N ανεξάρτητες δοκιμές **Bernoulli**)



Συνάρτηση Μάζας Πιθανότητας
Διωνυμικής Κατανομής, $N = 20, p = 0.5$

Πιθανότητα καταγραφής γεγονότος με $Y = y$ ενδεχόμενα **H**eads και $N - y$ ενδεχόμενα **T**ails σε N ανεξάρτητες δοκιμές **Bernoulli** με συγκεκριμένη σειρά εμφάνισης: $p^y(1 - p)^{N-y}$

Αριθμός συνδυασμών y **H**eads, $(N - y)$ **T**ails ανεξάρτητα από σειρά εμφάνισης: $\binom{N}{y} = \frac{N!}{y!(N-y)!}$

Πιθανότητα εμφάνισης y **H**eads σε N ανεξάρτητες δοκιμές **Bernoulli**:

$$P[y] = \binom{N}{y} p^y (1 - p)^{N-y}$$

Η y ακολουθεί τη **Διωνυμική Κατανομή, Binomial Distribution**