

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

1ο Τμήμα (Α - Κ): Αμφιθέατρο 4, Νέα Κτίρια ΣΗΜΜΥ

Διαμόρφωση Γωνίας (Angle Modulation) - 2

4.3: Διαμόρφωση Συχνότητας (Frequency Modulation – FM)

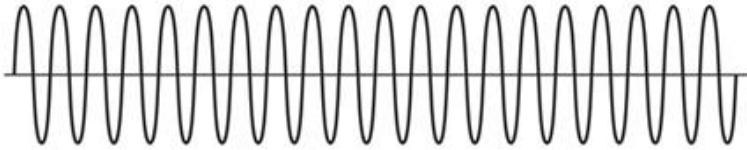
καθ. Βασίλης Μάγκλαρης
maglaris@netmode.ntua.gr
www.netmode.ntua.gr

Τρίτη 21/5/2019 – Παρασκευή 24/5/2019

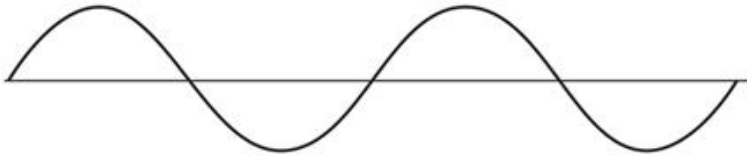
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

4.2 Βασικοί Ορισμοί Διαμόρφωσης Γωνίας (1/4) (Επανάληψη)

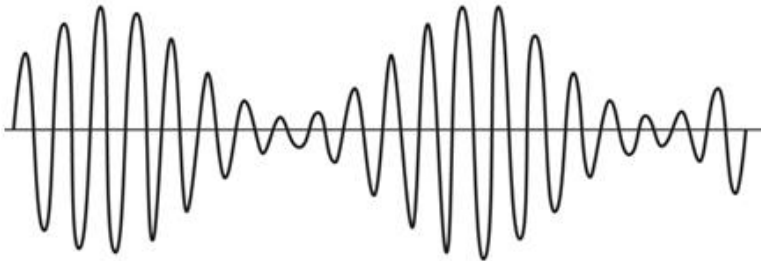
Carrier Wave $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$



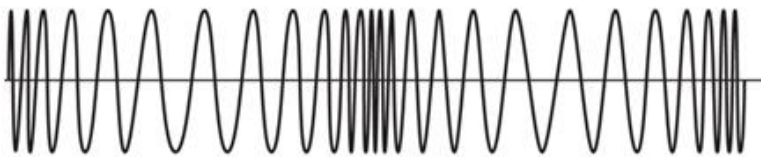
Modulating Signal $m(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$



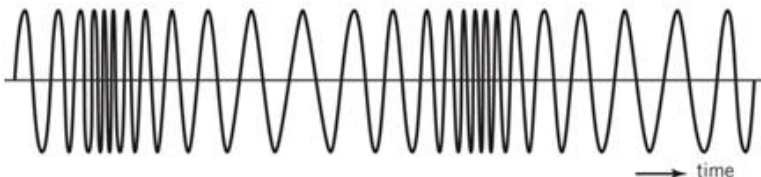
Amplitude Modulation - AM, DSB: $s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$



Phase Modulation - PM: $s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)]$



Frequency Modulation - FM: $s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau]$



Γενικά Χαρακτηριστικά

- Το αποτέλεσμα Διαμόρφωσης Γωνίας (Angle Modulation) είναι σήμα **phasor**

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)]$$

με **σταθερό πλάτος** A_c και γωνία $0 \leq \theta_i(t) \leq 2\pi$ radians που διαμορφώνεται από το $m(t)$

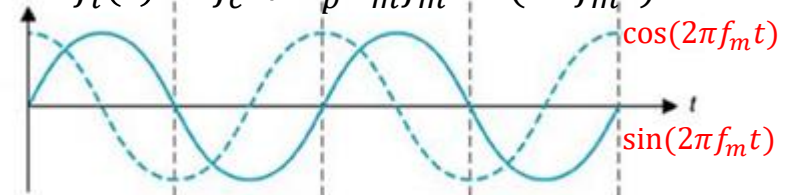
- Στιγμιαία Συχνότητα (Instantaneous Frequency):

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

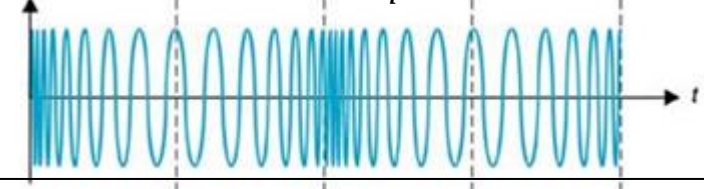
- Γωνιακή Ταχύτητα (Angular Velocity) του Phasor $s(t)$: $2\pi f_i(t)$ radians/sec

- Εφαρμογή σε PM με $m(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$:

$$f_i(t) = f_c + k_p A_m f_m \cos(2\pi f_m t)$$



$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p A_m \sin(2\pi f_m t)]$$



Σύγκριση Επίδοσης Angle Modulation με AM - DSB

Καλύτερη διάκριση σε παρεμβολές & θόρυβο αλλά μεγαλύτερες απαιτήσεις εύρους ζώνης (bandwidth)

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

4.2 Βασικοί Ορισμοί Διαμόρφωσης Γωνίας (2/4) (Επανάληψη)

Τρόποι Διαμόρφωσης Σήματος $m(t) \rightarrow s(t)$ σε Φέρον Σήμα $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) \rightarrow s(t)$

- Διαμόρφωση Πλάτους, **AM - DSB**:

$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$

- Διαμόρφωση Γωνίας – Angle Modulation

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)]$$

- Phase Modulation, **PM**:

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t) \Rightarrow s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)]$$

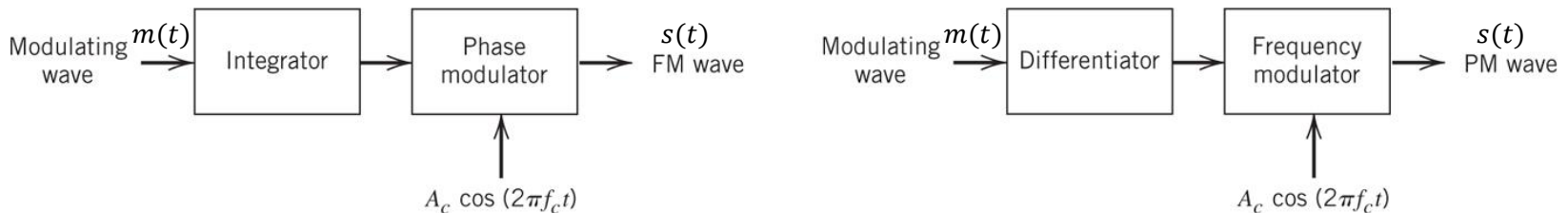
k_p : Ευαισθησία Φάσης (**Phase Sensitivity**), σε rad/volt αν $m(t)$ σε volt

- Frequency Modulation, **FM**:

$$f_i(t) = f_c + k_f m(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt}, \quad \theta_i(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \Rightarrow$$

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$

k_f : Ευαισθησία Συχνότητας (**Frequency Sensitivity**), σε hertz/volt αν $m(t)$ σε volt



(a) Σχέση Διαμόρφωσης Φάσης & Συχνότητας (b)

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

4.2 Βασικοί Ορισμοί Διαμόρφωσης Γωνίας (3/4) (Επανάληψη)

Ιδιότητες Σημάτων $s(t)$ Διαμορφωμένων κατά Γωνία

- Σταθερότητα Μέσης Ισχύος: $P_{av} = \frac{1}{2} A_c^2$ (ανεξάρτητα από k_p, k_f)
- Μη Γραμμικότητα: Έστω $m(t) = m_1(t) + m_2(t)$
 $s_1(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m_1(t)]$, $s_2(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m_2(t)]$
 $s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p (m_1(t) + m_2(t))] \neq s_1(t) + s_2(t)$
⇒ Συγκριτικά με Διαμόρφωση Πλάτους: Δυσκολότερη Φασματική Ανάλυση αλλά (έμμεσο αποτέλεσμα) μεγαλύτερη αντοχή σε παρεμβολές & θόρυβο
- Μη Κανονικότητα στην Αλλαγή Πρόσημου (*Zero-Crossing Irregularity*): Η αλλαγή πρόσημου περιέχει όλη την πληροφορία του διαμορφώνοντος σήματος $m(t)$ αν $f_c \gg B_m$ όπου B_m η ζώνη διέλευσης (bandwidth) του $m(t)$
- Δυσκολία Οπτικής Αναπαράστασης Σήματος Πληροφορίας $m(t)$ από τη μορφή της $s(t)$. Στη Διαμόρφωση Πλάτους (AM) με ποσοστό διαμόρφωσης $100 \times \max_t |k_a m(t)| < 100$, η $m(t)$ είναι η περιβάλλουσα του $s(t)$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

4.2 Βασικοί Ορισμοί Διαμόρφωσης Γωνίας (4/4) (Επανάληψη)

Παράδειγμα: Zero-Crossings, $m(t) = \begin{cases} at, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$$f_c = \frac{1}{4} \text{ Hz}, a = 1 \text{ volt/s}$$

PM με Ευαισθησία $k_p = \frac{\pi}{2} \text{ rad/volt}$

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + k_p m(t)] = \begin{cases} A_c \cos[2\pi f_c t + k_p at], & t \geq 0 \\ A_c \cos(2\pi f_c t), & t < 0 \end{cases}$$

Η $s(t)$ μηδενίζεται για $t \geq 0$ σε χρόνους t_n (zero-crossings) όταν

$$2\pi f_c t_n + k_p at_n = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ ή }$$

$$t_n = \frac{\frac{1}{2} + n}{2f_c + \frac{k_p a}{\pi}} = \frac{1}{2} + n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(zero-crossings με **σταθερές συχνότητες** $f_c = \frac{1}{4} \text{ Hz}$ για $t < 0$ και $f_c + k_p \frac{a}{2\pi} = \frac{1}{2} \text{ Hz}$ για $t \geq 0$)

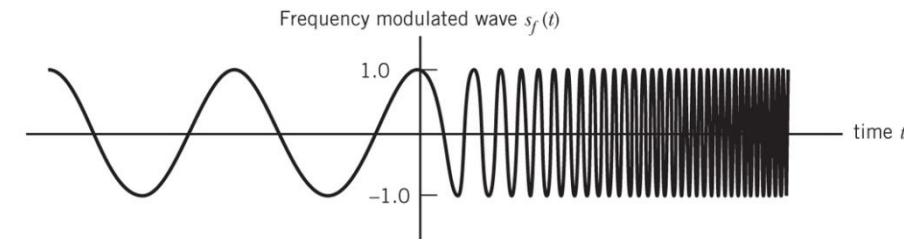
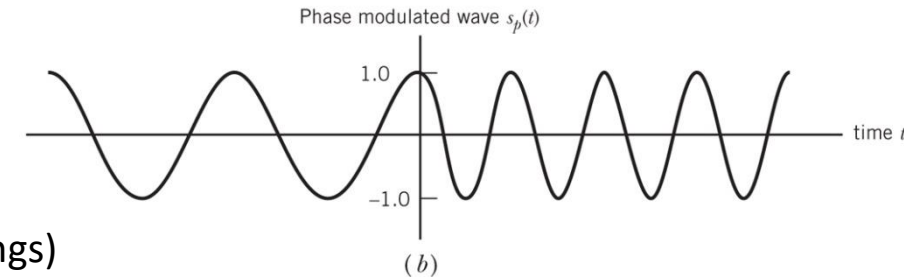
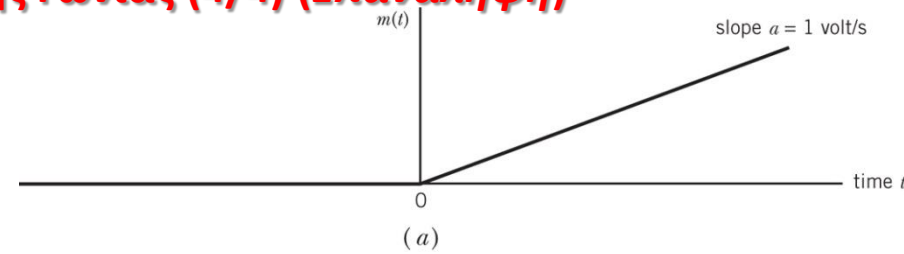
FM με Ευαισθησία $k_f = 1 \text{ Hz/volt}$

$$s(t) = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right] = \begin{cases} A_c \cos[2\pi f_c t + \pi k_f at^2], & t \geq 0 \\ A_c \cos(2\pi f_c t), & t < 0 \end{cases}$$

Η $s(t)$ μηδενίζεται για $t \geq 0$ σε χρόνους t_n (zero-crossings) όταν

$$2\pi f_c t_n + \pi k_f at_n^2 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \text{ ή } t_n = \frac{1}{ak_f} \left(-f_c + \sqrt{f_c^2 + ak_f \left(\frac{1}{2} + n \right)} \right) = \frac{1}{4} (-1 + \sqrt{9 + 16n})$$

Για $t \geq 0$ η στιγμιαία συχνότητα $f_i(t) = \frac{d[2\pi f_c t + \pi k_f at^2]}{dt} = 2\pi k_f at + 2\pi f_c$ **αυξάνεται γραμμικά ως προς t**



4.3 Διαμόρφωση Συχνότητας – FM (1/6)

Διαμόρφωση FM Ημιτονοειδούς Σήματος

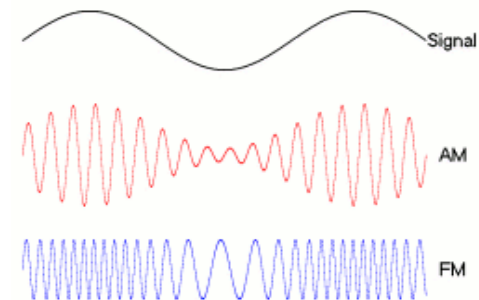
Σήμα πληροφορίας $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ διαμορφώνει *carrier* $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$ στο σήμα FM:

$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] = A_c \cos \left[2\pi \int_0^t f_i(\tau) d\tau \right] = A_c \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \right]$$
$$= A_c \cdot \cos \left[2\pi f_c t + \frac{k_f A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \right]$$

$$\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \frac{k_f A_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t), \quad k_f: \text{Frequency Sensitivity}$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\theta_i(t)}{dt} = f_c + k_f m(t) = f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t)$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Frequency_modulation



Ορίζουμε:

- $\Delta f \triangleq k_f A_m$ (Απόκλιση Συχνότητας, *Frequency Deviation*)
- $\beta \triangleq \frac{\Delta f}{f_m}$ (Δείκτης Διαμόρφωσης, *Modulation Index*)

Οπότε: $\theta_i(t) = 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)$, $f_i(t) = f_c + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$

$$0 \ll f_c - \Delta f < f_i(t) \leq f_c + \Delta f \Rightarrow \Delta f = \beta f_m \ll f_c, \quad \beta \ll \frac{f_c}{f_m}$$

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] = A_c \cos(2\pi f_c t) \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)]$$

Αν $\beta = \frac{\Delta f}{f_m} \ll 1$ rad (μικρές διακυμάνσεις συχνότητας Δf περί την f_c): **Narrow-band FM, NBFM** (FM Στενής Ζώνης) π.χ. χαμηλού κόστους αμφίδρομες ραδιοζεύξεις, Amateur Radio...

Για μεγαλύτερες τιμές του β (0.5, ..., 15): **Wide-band FM, WBFM** (FM Ευρείας Ζώνης) π.χ. ραδιοφωνικές εκπομπές υψηλής πιστότητας (Edwin H. Armstrong, 1933), στερεοφωνική ραδιοφωνία, ήχος τηλεοπτικών εκπομπών...

4.3 Διαμόρφωση Συχνότητας – FM (2/6)

Διαμόρφωση Narrow-band FM (NBFM) Ημιτονοειδούς Σήματος

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)]$$

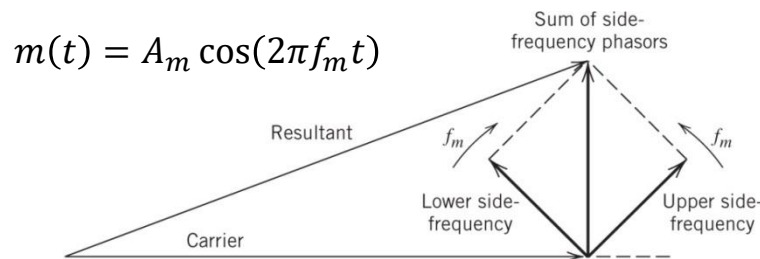
Αν $\beta \ll 1 \Rightarrow \cos[\beta \sin(2\pi f_m t)] \cong 1, \quad \sin[\beta \sin(2\pi f_m t)] \cong \beta \sin(2\pi f_m t)$ και

$$s(t) \cong A_c \cos(2\pi f_c t) - \beta A_c \sin(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_m t)$$

$$s(t) \cong A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \beta A_c \{\cos[2\pi(f_c + f_m)t] - \cos[2\pi(f_c - f_m)t]\}$$

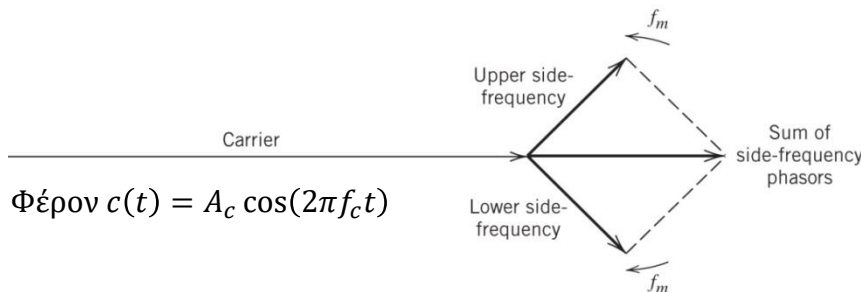
Αντίστοιχα στη διαμόρφωση AM: $s_{AM}(t) = A_c [1 + \mu \cos(2\pi f_m t)] \cos(2\pi f_c t) \Rightarrow$

$$s_{AM}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{1}{2} \mu A_c \{\cos[2\pi(f_c + f_m)t] + \cos[2\pi(f_c - f_m)t]\}$$



Φέρον $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

(a) Διαμόρφωση NBFM



Φέρον $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$

(b) Διαμόρφωση AM

Τα σήματα $s(t)$ Narrow-band FM και $s_{AM}(t)$ έχουν παρόμοιες απαιτήσεις ζώνης διέλευσης $\approx 2f_m$ περί την f_c

Διαγράμματα Phasors:

Διαμόρφωση Narrow-band FM

- Resultant phasor του $s(t)$ με πλάτος $\approx A_c$
- Διαφορά φάσης phasors των $s(t), c(t)$

Διαμόρφωση AM

- Resultant phasor του $s_{AM}(t)$ με πλάτος $\neq A_c$
- Ταύτιση φάσης phasors των $s(t), c(t)$

4.3 Διαμόρφωση Συχνότητας – FM (3/6)

Γενική Ανάλυση FM (NBFM – WBFM) Ημιτονοειδούς Σήματος

Έστω $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$, $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$, $f_c \gg f_m \Rightarrow$

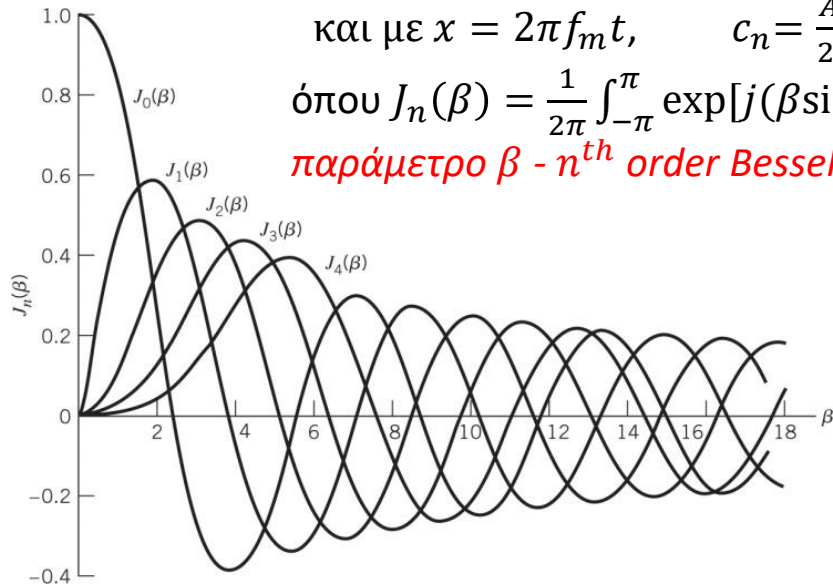
$$s(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] = A_c \cdot \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)] = A_c \cdot \operatorname{Re}\{\exp[j2\pi f_c t + j\beta \sin(2\pi f_m t)]\}$$

- Η $s(t)$ δεν είναι περιοδική εκτός αν η f_c είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της f_m
- Αν $f_c \gg f_m$ μπορούμε (κατ' αναλογία με την ανάλυση σημάτων band-pass) να χρησιμοποιήσουμε τη μιγαδική περιβάλλουσα (**complex envelope**) $\tilde{s}(t)$ που είναι σήμα low-pass, ανεξάρτητο από το φέρον f_c :
 $\tilde{s}(t) = A_c \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t)]$ και $s(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{s}(t) \exp(j2\pi f_c t)\} = A_c \cdot \operatorname{Re}\{\exp[j2\pi f_c t + j\beta \sin(2\pi f_m t)]\}$
- Η $\tilde{s}(t)$ είναι περιοδική με περίοδο $1/f_m$ και άρα περιγράφεται σαν Σειρά Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_m t), \quad c_n = f_m \int_{-1/(2f_m)}^{1/(2f_m)} \tilde{s}(t) \exp(-j2\pi n f_m t) dt \\ &= f_m A_c \int_{-1/(2f_m)}^{1/(2f_m)} \exp[j\beta \sin(2\pi f_m t) - j2\pi n f_m t] dt \end{aligned}$$

$$\text{και με } x = 2\pi f_m t, \quad c_n = \frac{A_c}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[j(\beta \sin x - nx)] dx \triangleq A_c J_n(\beta)$$

όπου $J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp[j(\beta \sin x - nx)] dx$ (**συνάρτηση Bessel τάξης n 1^{ου} βαθμού με παράμετρο β - n^{th} order Bessel Function of the first kind with argument β**)



$$\tilde{s}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp(j2\pi n f_m t)$$

$$\begin{aligned} s(t) &= \operatorname{Re}[\tilde{s}(t) \exp(j2\pi f_c t)] \\ &= A_c \cdot \operatorname{Re}[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \exp[j2\pi(f_c + n f_m)t]] \end{aligned}$$

και τελικά:

$$s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + n f_m)t]$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

4.3 Διαμόρφωση Συχνότητας – FM (4/6)

Γενική Φασματική Ανάλυση FM (NBFM, WBFM) Ημιτονοειδούς Σήματος

$$s(t) \leftrightarrow S(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - n f_m) + \delta(f + f_c + n f_m)]$$

- Το εύρος ζώνης εξαρτάται κατά προσέγγιση από τα μεγέθη $J_n(\beta)$
- Για κάθε β και n , $J_n(\beta) = (-1)^n J_{-n}(\beta) \Rightarrow$ άπειρες συνιστώσες Fourier: Το φάσμα σημάτων **FM** περιλαμβάνει τη συνιστώσα φέροντος f_c και άπειρες πλευρικές συνιστώσες συμμετρικές ως προς f_c σε αποστάσεις $\pm f_m, \pm 2f_m, \pm 3f_m \dots$
- Για $\beta \ll 1$: $J_0(\beta) \cong 1$, $J_1(\beta) \cong \frac{\beta}{2}$, $J_n(\beta) \cong 0$ για $n > 1$: Το φάσμα σημάτων **NBFM** περιλαμβάνει τη συνιστώσα φέροντος f_c και δύο σημαντικές πλευρικές συνιστώσες σε αποστάσεις $\pm f_m$ από την f_c
- Οι σημαντικές πλευρικές συνιστώσες αυξάνονται όσο αυξάνεται ο δείκτης β (προς το **WBFM**)
- Η μέση ισχύς σήματος FM P_{FM} είναι ίση με την ισχύ $\frac{1}{2} A_c^2$ του φέροντος $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$:
Επειδή $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$ και $P_{FM} = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = \frac{1}{2} A_c^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = \frac{1}{2} A_c^2$

Εμπειρικός Κανόνας Carson (Carson's Rule)

Μετάδοση **Μονοτονικού Σήματος** $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$ με διαμόρφωση **FM** σε **Φέρον** $c(t) = A_c \cos(2\pi f_c t)$, $f_c \gg f_m$ **Απόκλιση Συχνότητας** $\Delta f \triangleq k_f A_m$ και **Δείκτη Διαμόρφωσης** $\beta \triangleq \frac{\Delta f}{f_m}$ απαιτεί προσεγγιστικά εύρος ζώνης B_T γύρω από την f_c :

$$B_T \cong 2\Delta f + 2f_m = 2\Delta f \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

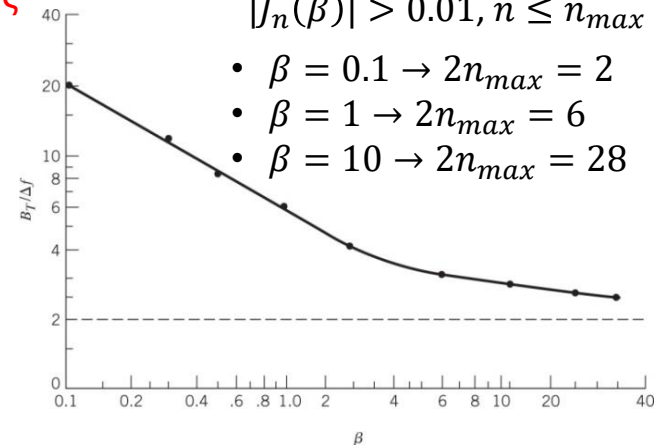
- Για **NBFM** $B_T \cong 2f_m + \varepsilon$
- Για **WBFM** $B_T \cong 2\Delta f + \varepsilon \cong 2n_{max} f_m$ όπου $2n_{max}$ ο αριθμός των σημαντικών πλευρικών συνιστωσών

WBFM - Προσέγγιση 1%

$$B_T \cong 2n_{max} f_m$$

$$|J_n(\beta)| > 0.01, n \leq n_{max}$$

- $\beta = 0.1 \rightarrow 2n_{max} = 2$
- $\beta = 1 \rightarrow 2n_{max} = 6$
- $\beta = 10 \rightarrow 2n_{max} = 28$



4.3 Διαμόρφωση Συχνότητας – FM (5/6)

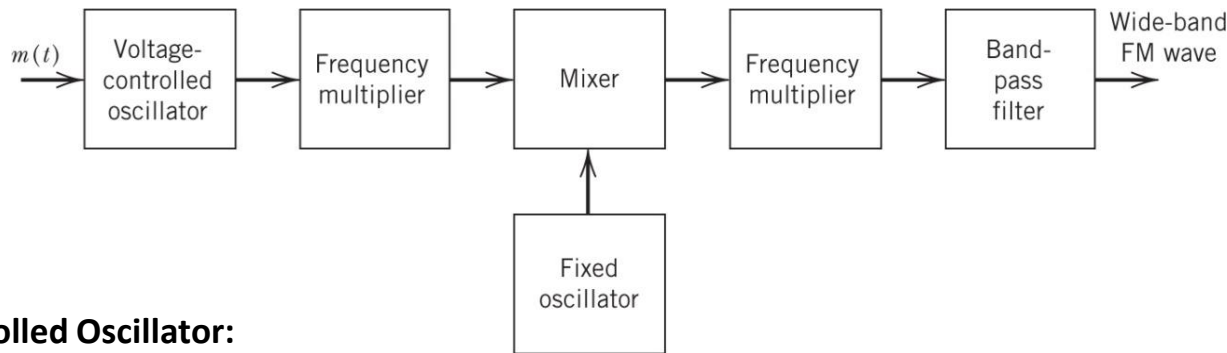
Δημιουργία Σημάτων FM: Direct Modulator

Χρήση **Voltage Controlled Oscillator** που παράγει εναλλασσόμενο σήμα με σταθερό πλάτος και μεταβλητή συχνότητα $f_i(t) = f_c + k_f m(t)$ διαμορφωμένη από το σήμα $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$:

$$f_i(t) = f_c + k_f A_m \cdot \cos(2\pi f_m t) = f_c + \Delta f \cdot \cos(2\pi f_m t) \text{ και}$$

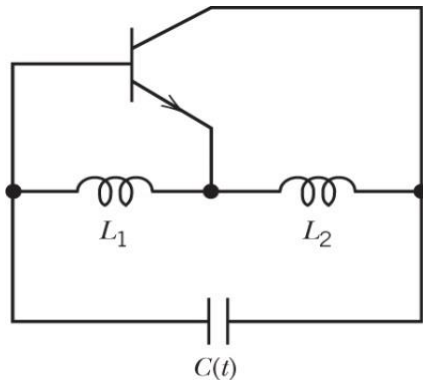
$$s(t) = A_c \cdot \cos[\theta_i(t)] = A_c \cdot \cos \left[2\pi \int_0^t f_i(\tau) d\tau \right] = A_c \cdot \cos \left[2\pi f_c t + \frac{\Delta f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \right]$$

Διάγραμμα Διαμορφωτή WBFM



Voltage Controlled Oscillator:

Ταλαντωτής Hartley



$C(t) = C_0 + \Delta C \cdot \cos(2\pi f_m t)$: Πυκνωτής μεταβαλλόμενος από τάση, **Varactor**

Η συχνότητα ταλάντωσης του Ταλαντωτή Hartley $f_i(t)$ είναι:

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi \sqrt{(L_1 + L_2)C(t)}} = f_0 \left[1 + \frac{\Delta C}{C_0} \cos(2\pi f_m t) \right]^{-1/2}$$

$$\cong f_0 \left[1 - \frac{\Delta C}{C_0} \cos(2\pi f_m t) \right] = f_0 + \Delta f \cos(2\pi f_m t)$$

αν $\Delta C \ll C_0$ και εφόσον $\frac{\Delta C}{C_0} = -\frac{\Delta f}{f_0}$

όπου f_0 είναι η αδιαμόρφωτη συχνότητα ταλάντωσης: $f_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{(L_1 + L_2)C_0}}$

4.3 Διαμόρφωση Συχνότητας – FM (6/6)

Αποδιαμόρφωση Σημάτων FM: Direct Demodulator

Χρήση Διευκρινιστή Συχνότητας, **Frequency Discriminator**: Συνδυασμός Κυκλωμάτων Κλίσης (**Slope Circuits**) $H_1(f)$, $H_2(f)$ και Φωρατών Περιβάλλουσας (**Envelope Detectors**)

• Αν B_T είναι η ζώνη διέλευσης του καναλιού FM γύρω από την f_c , η band-pass συνάρτηση μεταφοράς $H_1(f)$ του **Κυκλώματος Κλίσης** (**Slope Circuit**) είναι

$$H_1(f) = \begin{cases} j2\pi a \left(f - f_c + \frac{B_T}{2} \right), & f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq f_c + \frac{B_T}{2} \\ j2\pi a \left(f + f_c - \frac{B_T}{2} \right), & f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq -f_c + \frac{B_T}{2} \\ 0, & \text{για κάθε άλλη } f \end{cases}$$

• Η band-pass $H_1(f)$ και η μιγαδική της low-pass $\tilde{H}_1(f)$ συνδέονται ως $\tilde{H}_1(f - f_c) = 2H_1(f)$, $f > 0$

• Η $H_2(f)$ ορίζει το **Συμπληρωματικό Κύκλωμα Κλίσης** (**Complementary Slope Circuit**): $\tilde{H}_2(f) = \tilde{H}_1(-f)$

$$s(t) = A_c \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau]$$

$$\text{Επειδή } f_c \gg B_T \Rightarrow \tilde{s}(t) = A_c \exp[j2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau] \leftrightarrow \tilde{S}(f)$$

$$\tilde{S}_1(f) = \frac{1}{2} \tilde{H}_1(f) \tilde{S}(f) = \begin{cases} j2\pi a \left(f + \frac{B_T}{2} \right) \tilde{S}(f), & -\frac{B_T}{2} \leq f \leq \frac{B_T}{2} \\ 0, & |f| > \frac{B_T}{2} \end{cases}$$

$$\tilde{s}_1(t) = a \left[\frac{d\tilde{s}(t)}{dt} + j\pi B_T \tilde{s}(t) \right] = j\pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right] \exp[j2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau] \quad (\text{Differentiator}) \Rightarrow$$

$$s_1(t) = \text{Re}[\tilde{s}_1(t) \exp(j2\pi f_c t)] = \pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right] \cos \left[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau + \pi/2 \right]$$

$$\text{• Αν } \left| \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right| < 1 \quad \forall t, \text{ ο } \text{Envelope-Detector} \text{ θα δώσει } |\tilde{s}_1(t)| = \pi B_T a A_c \left[1 + \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right]$$

$$\text{• Ομοίως } |\tilde{s}_2(t)| = \pi B_T a A_c \left[1 - \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right] \text{ και το Baseband signal είναι } |\tilde{s}_1(t)| - |\tilde{s}_2(t)| = 4\pi k_f a A_c m(t)$$

