

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

1ο Τμήμα (Α - Κ): Αμφιθέατρο 4, Νέα Κτίρια ΣΗΜΜΥ

Θεωρία Πιθανοτήτων & Στοχαστικές Ανεξίξεις - 6

5.11: Θόρυβος Στενής Ζώνης (Narrowband Noise)

5.12: Στοχαστικό Μοντέλο Διαύλου Κινητής Τηλεφωνίας (Stochastic Model of a Mobile Radio Channel)

5.13: Γραφική Περίληψη Συναρτήσεων Αυτοσυσχέτισης - Πυκνότητας Φάσματος Ισχύος

καθ. Βασίλης Μάγκλαρης
maglaris@netmode.ntua.gr
www.netmode.ntua.gr

Τρίτη 7/5/2019

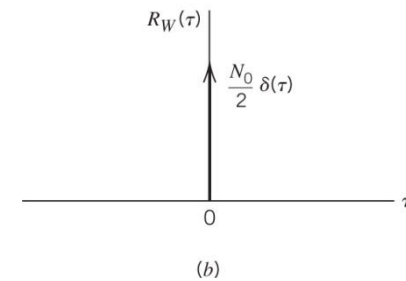
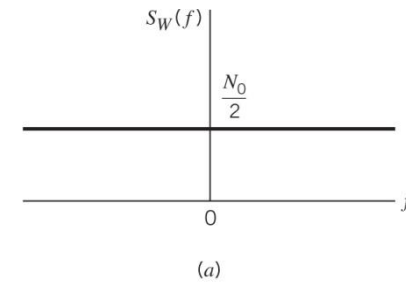
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.10 Θόρυβος (Noise) (6/10) (Επανάληψη)

Λευκός Θόρυβος - White Noise

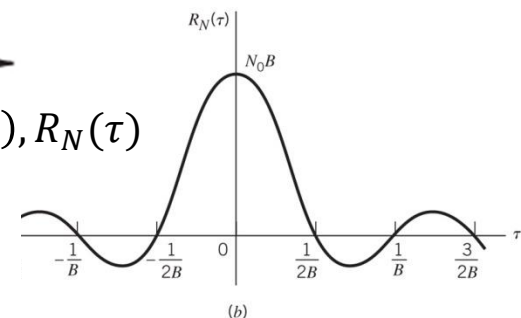
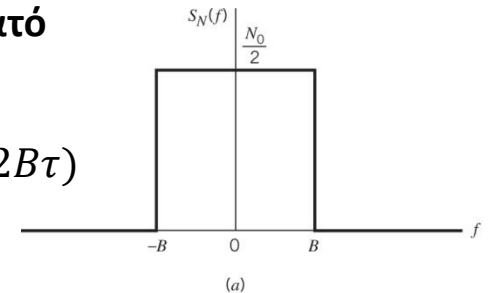
Στοχαστική Ανέλιξη $W(t)$ με ισοκατανομή της Ισχύος σε όλες τις συχνότητες με πυκνότητα $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$ (όπως το λευκό φως αναλύεται εξ ίσου σε όλα τα ορατά χρώματα). Η Αυτοσυσχέτιση δίνεται από $R_W(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$

- Δείγματα ελάχιστης χρονικής διαφοράς είναι **Αυτοσχετίστες Τυχαίες Μεταβλητές** και άρα ο Λευκός Θόρυβος είναι ακραία περίπτωση τυχαιότητας
- Αν ο Λευκός Θόρυβος είναι και Στοχαστική Ανέλιξη **Gauss**, τότε όλα τα δείγματα αποτελούν **Ανεξάρτητες Τυχαίες Μεταβλητές Gauss**
- Η μέση στιγμιαία ισχύς $E[W^2(t)] = R_W(0)$ έχει άπειρη τιμή και άρα δεν υπάρχει στη φύση. Επειδή οι δέκτες και οι δίαυλοι επικοινωνίας έχουν πεπερασμένες ζώνες διέλευσης, μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα χρήσιμο μοντέλο θορύβου

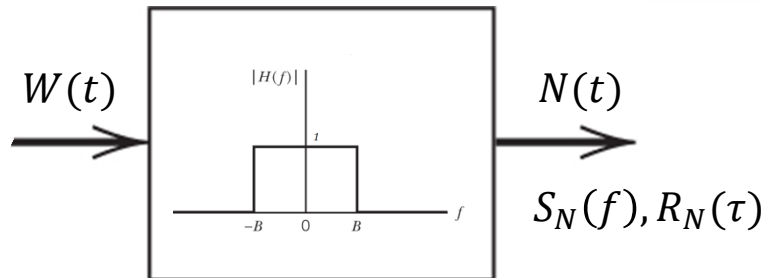


Παράδειγμα: Λευκός Θόρυβος Gauss Μηδενικής Μέσης Τιμής σε Βαθυπερατό Φίλτρο (LPF)

$$S_N(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & -B < f < B \\ 0, & |f| > B \end{cases} \text{ και } R_N(\tau) = \int_{-B}^B \frac{N_0}{2} \exp(2j\pi f\tau) df = N_0 B \text{sinc}(2B\tau)$$



Εφόσον η είσοδος $W(t)$ είναι Gauss, και η έξοδος $N(t)$ θα είναι Gauss με συσχέτιση $R_N(\tau) = 0$ για τιμές $\tau = \pm k/2B \Rightarrow$ δείγματα της εξόδου με ρυθμό $f_s = 2B$ θα είναι **Ανεξάρτητες Τυχαίες Μεταβλητές Gauss** με μηδενική μέση τιμή και διασπορά $N_0 B$



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

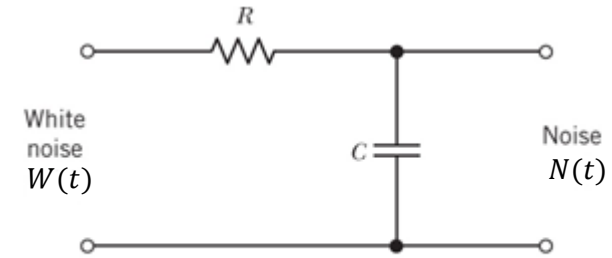
5.10 Θόρυβος (Noise) (7/10) (Επανάληψη)

Παράδειγμα: Λευκός Θόρυβος μέσω LPF Φίλτρου RC

Θεωρώ Λευκό Θόρυβο Gauss $W(t)$ μηδενικού μέσου $\mathbf{E}[W(t)] = 0$ και πυκνότητας φάσματος ισχύος $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$ που μέσω φίλτρου RC παράγει Θόρυβο $N(t)$

Συνάρτηση Μεταφοράς: $H(f) = \frac{1}{1+j2\pi fRC}$, $|H(f)|^2 = \frac{1}{1+(2\pi fRC)^2}$

Έξοδος: $S_N(f) = |H(f)|^2 S_W(f) = \frac{N_0/2}{1+(2\pi fRC)^2}$ και $R_N(\tau) = \frac{N_0}{4RC} \exp(-\frac{|\tau|}{RC})$



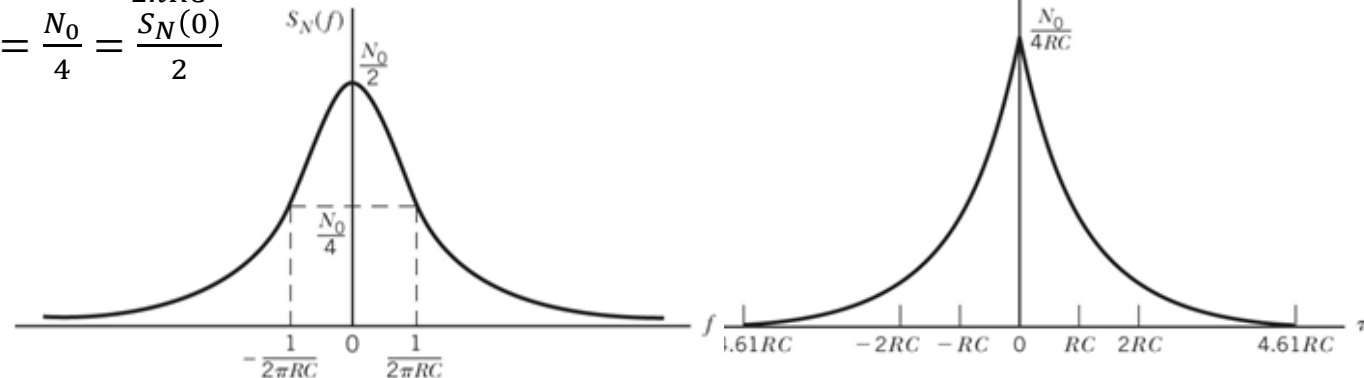
Για $\tau_0 = 2\pi RC \cong 4.61RC$, $R_N(\tau_0) = 1\%$ της μεγίστης τιμής

$R_N(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) df = \mathbf{E}[N^2(t)] = \frac{N_0}{4RC}$ που αντιστοιχεί στη μέση ισχύ του

θορύβου $N(t)$. Ο χρόνος $\tau_0 = 2\pi RC$ μπορεί να θεωρηθεί σαν το χρονικό διάστημα μετά την παρέλευση του οποίου εκμηδενίζεται (προσεγγιστικά) η όποια συσχέτιση του σήματος. Τα σχετικά δείγματα με ρυθμό δειγματοληψίας $f_s \leq 1/\tau_0 \cong 1/(4.61RC)$ θα απέχουν κατά διαστήματα μεγαλύτερα του τ_0 και θα είναι κατά προσέγγιση ασυσχέτιστες τυχαίες μεταβλητές Gauss, άρα ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Παρατήρηση: Οι συχνότητες $|f| \leq \frac{1}{2\pi RC}$ ορίζουν το εύρος συχνοτήτων μισής

ισχύος ή -3 db: $S_N\left(\frac{1}{2\pi RC}\right) = \frac{N_0}{4} = \frac{S_N(0)}{2}$



5.10 Θόρυβος (Noise) (8/10) (Επανάληψη)

Παράδειγμα: Ημιτονοειδές Σήμα τυχαίας φάσης Θ με Παρεμβολή Λευκού Θορύβου Gauss $w(t)$
 $X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta) + w(t)$ όπου $f_\Theta(\theta) = \frac{1}{2\pi}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ και $E[w(t)] = 0$, $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$

Θεωρώντας πως η φάση Θ είναι ανεξάρτητη από την παρεμβολή $w(t)$ προκύπτει πως η αυτοσυσχέτιση του $X(t)$ δίδεται από το άθροισμα

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos(2\pi f_c \tau) + \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$$

Πειραματική Υλοποίηση σε Matlab:

- $f_c = 0.002$ Hz, $\theta = -\frac{\pi}{2}$, $\frac{A^2}{2} = \frac{N_0}{2} = 1$
- $0 \leq t \leq 1000$ sec

Δύο Τρόποι Πειραματικών Μετρήσεων:

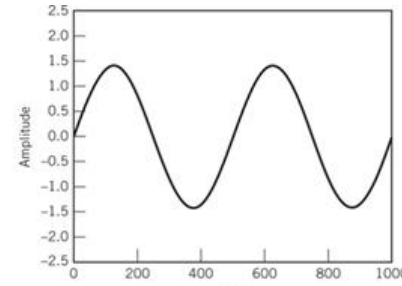
- **Ensemble Average:**

$$R_X(\tau) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i(t + \tau) x_i(t)$$

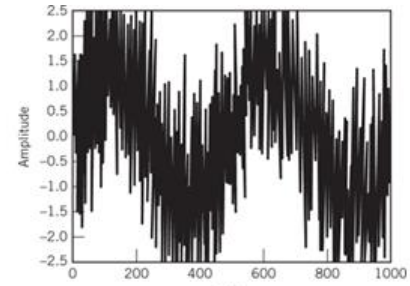
(εκτίμηση για $0 \leq \tau \leq 400$, $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$ με $M = 500$ επαναλήψεις – δείγματα)

- **Time Average:** $R_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T x(t + \tau) x(t) dt \right\}$

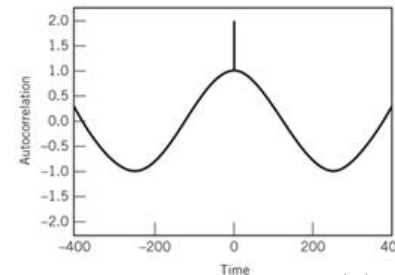
(επαλήθευση εργοδικότητας για $0 \leq \tau \leq 400$, $R_X(-\tau) = R_X(\tau)$ με $T = 500$ sec, $0 \leq t \leq 500$)



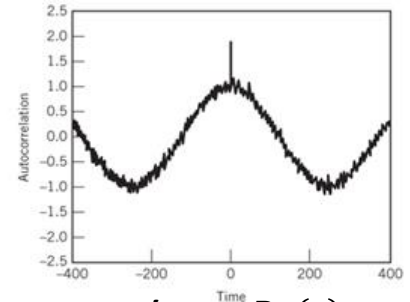
Ημιτονοειδές Σήμα



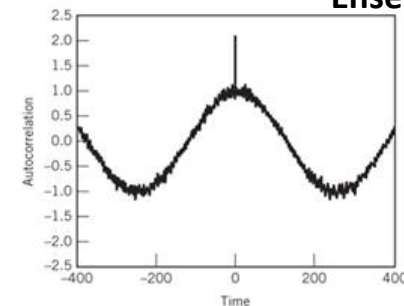
Σήμα + Θόρυβος



Θεωρητική $R_X(\tau)$



Εκτίμηση $R_X(\tau)$ σαν Ensemble Average

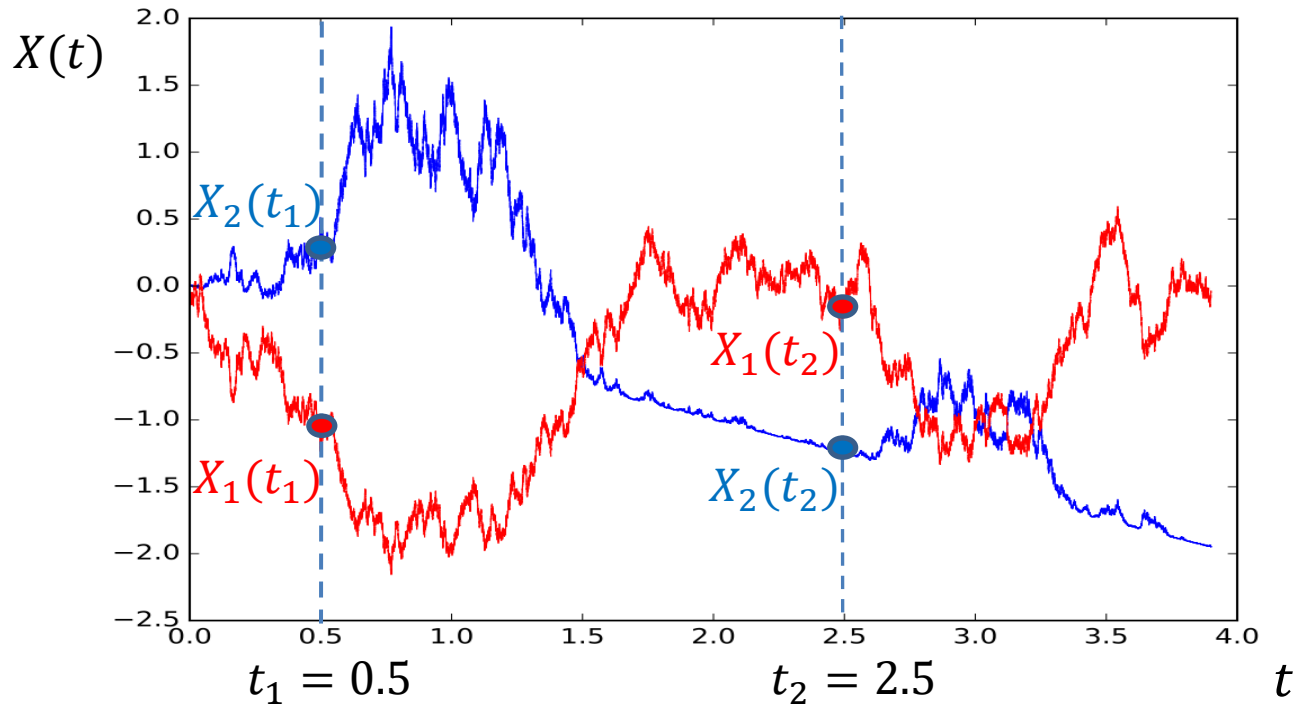


Εκτίμηση $R_X(\tau)$ σαν Time Average

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.10 Θόρυβος (Noise) (9/10) (Επανάληψη)

Επεξήγηση Υπολογισμού Αυτοσυχέτισης



Αυτοσυχέτιση $R_X(t_1, t_2) = \mathbf{E}[X(t_1)X(t_2)]$ όπου $0 < t_1 < t_2$, $t_2 - t_1 = \tau > 0$

- Προσέγγιση σαν **Ensemble Average** με n δείγματα (χρώματα) $X_i(t)$:

$$R_X(t_1, t_2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} [X_1(t_1)X_1(t_2) + X_2(t_1)X_2(t_2) + \dots + X_n(t_1)X_n(t_2)] \right\}$$

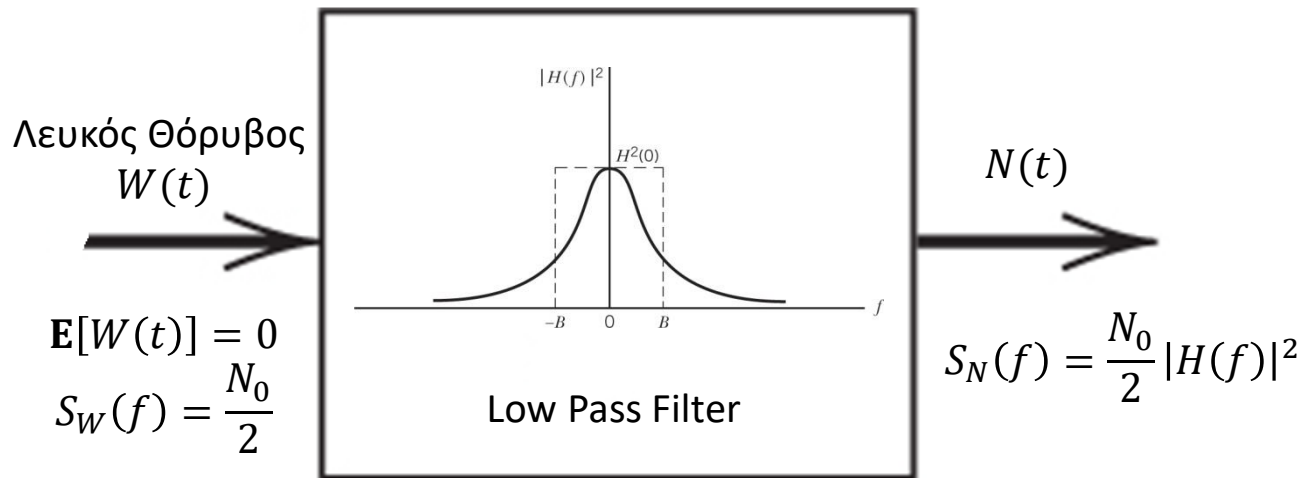
- Προσέγγιση σαν **Time Average** ενός δείγματος (χρώματος) $X_1(t)$ όταν η $X(t)$ είναι **WSS** και **εργοδική**:

$$R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau) = R_X(-\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T X_1(t)X_1(t + \tau) dt \right\}$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.10 Θόρυβος (Noise) (10/10) (Επανάληψη)

Ισοδύναμο Εύρος Ζώνης Συχνοτήτων Θορύβου



Γενική Περίπτωση LPF με Συνάρτηση Μεταφοράς $H(f)$

Η μέση ισχύς του σήματος εξόδου $N(t)$ είναι

$$E[N^2(t)] = R_N(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$$

Ιδεατό LPF $H_i(f)$ με Εύρος Ζώνης $\{-B, B\}$: $H_i(f) = \begin{cases} H(0), & -B \leq f \leq B \\ 0, & |f| > B \end{cases}$

Η μέση ισχύς του σήματος εξόδου $N_i(t)$ του ιδεατού LPF είναι

$$E[N_i^2(t)] = R_{N_i}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{N_i}(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-B}^B H^2(0) df = N_0 B H^2(0)$$

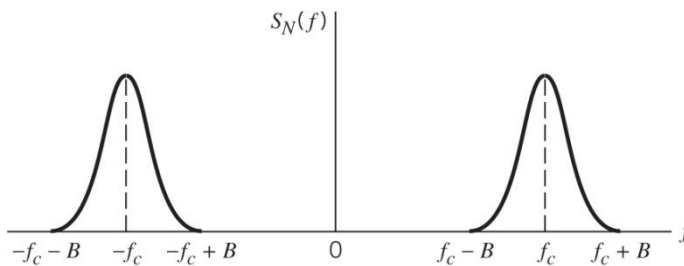
Noise Equivalent Bandwidth (Ισοδύναμο Εύρος Ζώνης Συχνοτήτων Θορύβου): $B = \frac{\int_0^{\infty} |H(f)|^2 df}{H^2(0)}$

οπότε $E[N^2(t)] = E[N_i^2(t)] = N_0 B H^2(0) = N_0 \int_0^{\infty} |H(f)|^2 df$

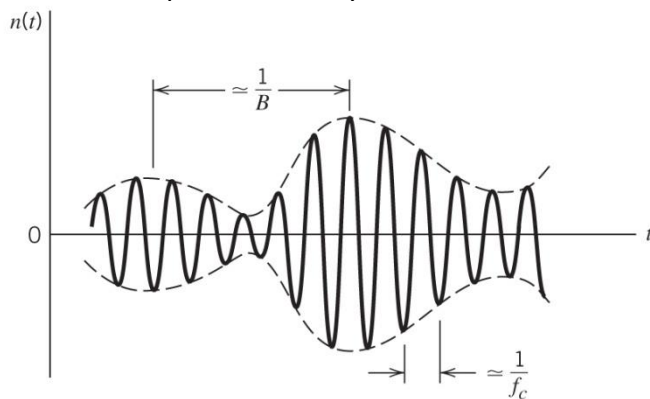
5.11 Θόρυβος Στενής Ζώνης (1/4)

Ο Δέκτης Επικοινωνιακού Συστήματος φιλτράρει το εισερχόμενο σήμα από θόρυβο WSS με μηδενικό μέσο όρο μέσω **bandpass filter** στενής ζώνης διέλευσης $2B$ γύρω από φέρουσα συχνότητα $\pm f_c$, $f_c \gg B$

Τα υπολείμματα θορύβου που παραμένουν στη ζώνη διέλευσης, αποτελούν τον **θόρυβο στενής ζώνης (narrowband noise)**, στοχαστική ανέλιξη $n(t)$ με **Μέση Τιμή** $E[n(t)] = 0$ και **Πυκνότητα Φάσματος Ισχύος** $S_N(f)$ που μηδενίζεται εκτός της ζώνης διέλευσης ($2B$ γύρω από τη συχνότητα του φέροντος $\pm f_c$)



(a)
Power Spectral Density - Narrowband Noise



(b)

Δείγμα Στοχαστικής Ανέλιξης - Narrowband Noise
Αργές Μεταβολές Πλάτους και Φάσης

Αναλογία με Ζωνοπερατά (Bandpass) Σήματα:

- Σήμα *bandpass* $g(t) \leftrightarrow G(f) \neq 0$ για συχνότητες εύρους $2B$ γύρω από τη συχνότητα του φέροντος $\pm f_c$, $f_c \gg B$ (επισυνάπτεται επανάληψη των δύο σχετικών διαφανειών του κεφαλαίου 2.9)
- Δυαδική προσέγγιση με διαμόρφωση DSB-SC (AM) σήματος *baseband* (low-pass) $m(t) \leftrightarrow M(f) \neq 0$ για συχνότητες εύρους B ($-B \leq f \leq B$) πάνω σε φέρουσα συχνότητα $f_c \gg B$

Μοντέλα Αναπαράστασης Narrowband Noise:

1. Μέσω ανάλυσης σε *baseband* συνιστώσες **in-phase** $n_I(t)$ και **quadrature** $n_Q(t)$:

$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

2. Μέσω ανάλυσης σε συνιστώσες **envelope** $r(t)$ και **phase** $\psi(t)$:

$$n(t) = r(t) \cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

$$r(t) = [n_I^2(t) + n_Q^2(t)]^{1/2}, \quad \psi(t) = \tan^{-1} \frac{n_Q(t)}{n_I(t)}$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

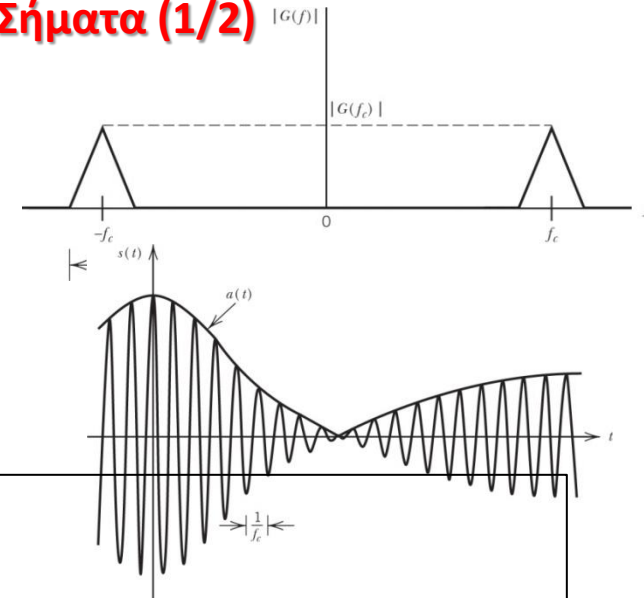
Επανάληψη: 2.9 Βαθυπερατά & Ζωνοπερατά Σήματα (1/2)

- Σήματα **low-pass** (baseband transmission): Το φάσμα $G(f)$ περιορίζεται σε συχνότητες $|f| < W$, εύρους W
- Σήματα **band-pass** (bandpass transmission περί συχνότητα φέροντος (*carrier*) $f_c > W$: Το φάσμα $G(f)$ περιορίζεται σε ζώνες εύρους $2W$ γύρω από τις συχνότητες $\pm f_c$ (*narrow-band signal*)

Πραγματικό σήμα band-pass: $g(t) = a(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi(t)]$

$a(t)$: Περιβάλλουσα (*envelope*), $\varphi(t)$: Φάση (*phase*)

Συνδυασμός διαμόρφωσης πλάτους & γωνίας

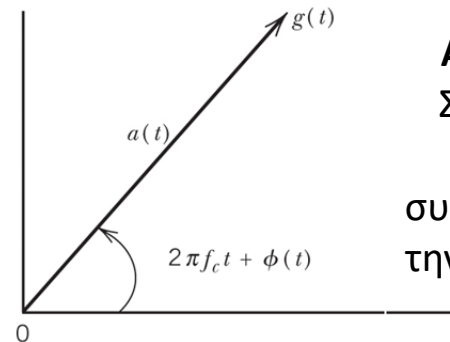


Επειδή $\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$

$g(t) = g_I(t)\cos(j2\pi f_c t) - g_Q(t)\sin(j2\pi f_c t)$ όπου

$g_I(t) = a(t)\cos\varphi(t)$ (*in-phase component*) και $g_Q(t) = a(t)\sin\varphi(t)$ (*quadrature component*)

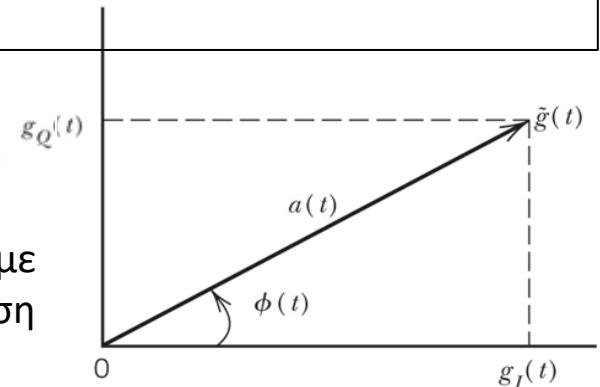
$$a(t) = \sqrt{g_I^2(t) + g_Q^2(t)} \text{ και } \varphi(t) = \tan^{-1}\left[\frac{g_Q(t)}{g_I(t)}\right]$$



Αναπαράσταση Phasor Σημάτων Band-pass:

Σήμα **band-pass** $g(t) \rightarrow$ Σήμα **low-pass** $\tilde{g}(t)$:

Μιγαδική Περιβάλλουσα ανεξάρτητη της συχνότητας του φέροντος f_c αλλά ίδιο πλάτος με την $g(t)$, $|\tilde{g}(t)| = |g(t)| = |a(t)|$ και ίδια φάση με το φέρον της διαμόρφωσης $\varphi(t)$



Phasor του $g(t)$:

$$g(t) = a(t)\cos[2\pi f_c t + \varphi(t)]$$

Κανονική Αναπαράσταση

Phasor της Μιγαδικής Περιβάλλουσας $\tilde{g}(t)$:

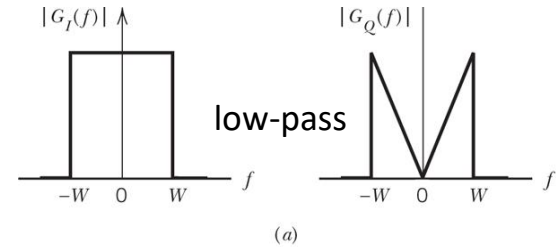
$$\begin{aligned} \tilde{g}(t) &= g_I(t) + jg_Q(t) = a(t)\{\cos[\varphi(t)] + j\sin[\varphi(t)]\} = a(t)\exp[j\varphi(t)] \\ g(t) &= \text{Re}[\tilde{g}(t)\exp(j2\pi f_c t)] = \text{Re}[\tilde{g}(t)\{\cos(2\pi f_c t) + jsin(2\pi f_c t)\}] \\ &= g_I(t)\cos(2\pi f_c t) - g_Q(t)\sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

Επανάληψη: 2.9 Βαθυπερατά & Ζωνοπερατά Σήματα (2/2)

$$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t) \quad g_I(t), g_Q(t) \text{ real}$$

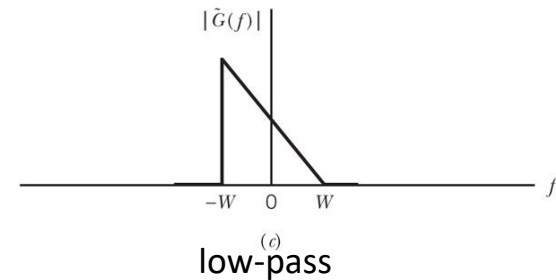
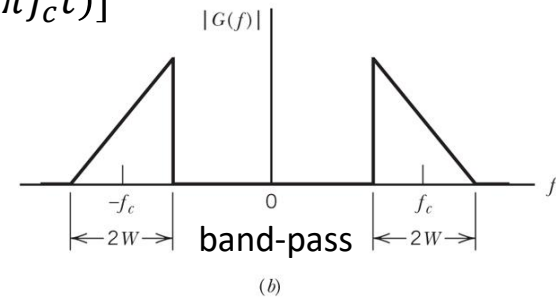
$$\tilde{G}(f) = G_I(f) + jG_Q(f) \text{ low-pass}$$



$$g(t) = g_I(t) \cos(2\pi f_c t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

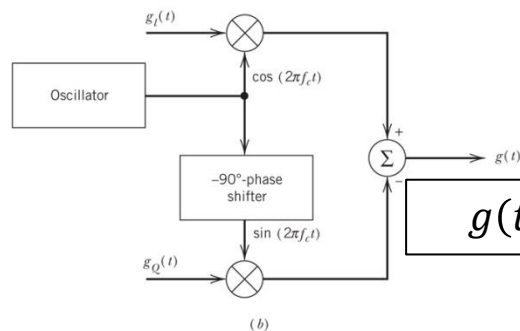
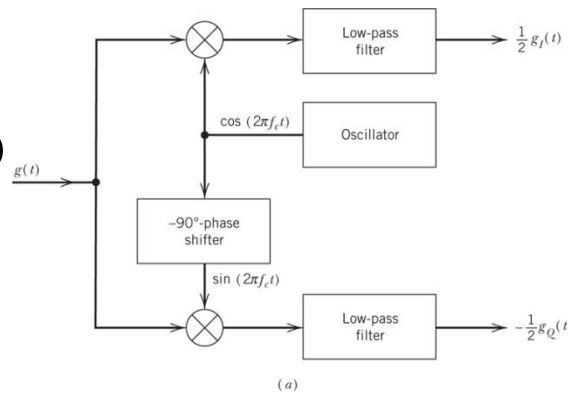
$$g(t) = \text{Re}[\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)] = \frac{1}{2} [\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t) + \tilde{g}^*(t) \exp(-j2\pi f_c t)]$$

$$G(f) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(f - f_c) + \tilde{G}^*(-f - f_c)] \text{ band-pass, real}$$



- $g(t) \cos(2\pi f_c t)$
 $= g_I(t) \cos^2(2\pi f_c t)$
 $- g_Q(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t)$
 $= \frac{1}{2} g_I(t) + \dots, \text{ low-pass filter}$

- $g(t) \sin(2\pi f_c t)$
 $= g_I(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t)$
 $- g_Q(t) \sin^2(2\pi f_c t)$
 $= -\frac{1}{2} g_Q(t) + \dots, \text{ low-pass filter}$



$$\cos^2(A) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2A)$$

$$\sin^2(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2A)$$

$$\cos(A) \sin(A) = \frac{1}{2} \sin(2A)$$

$$\exp(j\varphi) = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$$

$$g(t) = g_I(t) \cos(j2\pi f_c t) - g_Q(t) \sin(j2\pi f_c t)$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

5.11 Θόρυβος Στενής Ζώνης (2/4)

Αναπαράσταση της WSS $n(t)$, $E[n(t)] = 0$ μέσω Συνιστωσών In-Phase $n_I(t)$ & Quadrature $n_Q(t)$

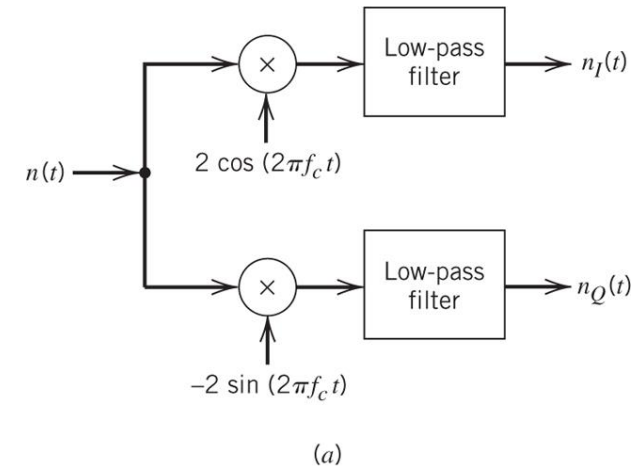
Κατ' αναλογία με την αναπαράσταση σημάτων στενής ζώνης:

$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Ανάλυση – Σύνθεση του $n(t)$ σε συνιστώσες *baseband* (*low-pass*)

$n_I(t)$, $n_Q(t)$: Με πολλαπλασιαστές $\cos(2\pi f_c t)$, $\sin(2\pi f_c t)$ και

Ιδανικά *Low-pass Filters* εύρους ζώνης B

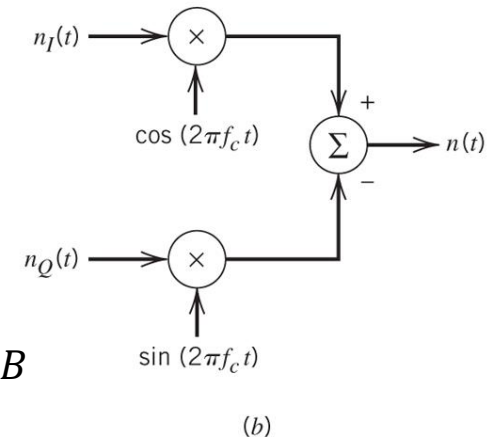


Ιδιότητες των $n_I(t)$, $n_Q(t)$:

- Οι μέσες τιμές $E[n_I(t)] = E[n_Q(t)] = 0$
- Αν $n(t)$ *Gaussian* $\Rightarrow n_I(t)$, $n_Q(t)$ συνδυαστικά *Gaussian*
- Αν $n(t)$ στατικός (*stationary*) $\Rightarrow n_I(t)$, $n_Q(t)$ συνδυαστικά *stationary*
- Οι συνιστώσες έχουν $R_{N_I}(\tau) \leftrightarrow S_{N_I}(f)$ και $R_{N_Q}(\tau) \leftrightarrow S_{N_Q}(f)$ που σχετίζονται σαν:

$$S_{N_I}(f) = S_{N_Q}(f) = \begin{cases} S_N(f - f_c) + S_N(f + f_c), & -B \leq f \leq B \\ 0, & \text{για κάθε άλλη τιμή του } f \end{cases}$$

- $\sigma_{n_I(t)}^2 = \sigma_{n_Q(t)}^2 = \sigma_{n(t)}^2$
- $S_{N_I N_Q}(f) = -S_{N_Q N_I}(f) = \begin{cases} j[S_N(f - f_c) - S_N(f + f_c)], & -B \leq f \leq B \\ 0, & \text{για κάθε άλλη τιμή του } f \end{cases}$
- Αν $n(t)$ *Gaussian* και $S_N(f - f_c) = S_N(f + f_c)$ (συμμετρία περί τις $\pm f_c$)
 $\Rightarrow$
 $S_{N_I N_Q}(f) = -S_{N_Q N_I}(f) = 0 \forall f$ και $n_I(t)$, $n_Q(t)$ ανεξάρτητες στοχαστικές ανελίξεις



5.11 Θόρυβος Στενής Ζώνης (3/4)

Παράδειγμα: Λευκός Θόρυβος Gauss Μηδενικής Μέσης Τιμής σε Ιδανικό Ζωνοπερατό Φίλτρο (BPF)

Είσοδος $w(t)$:

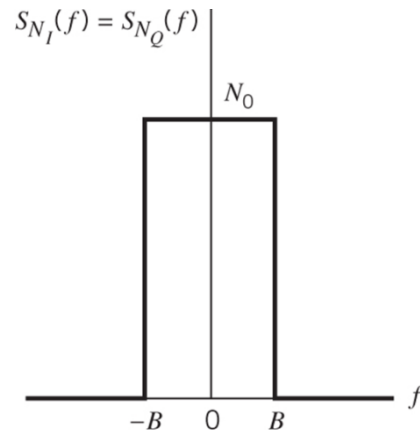
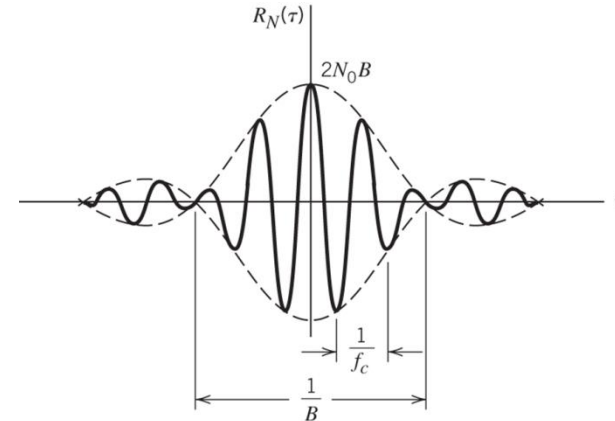
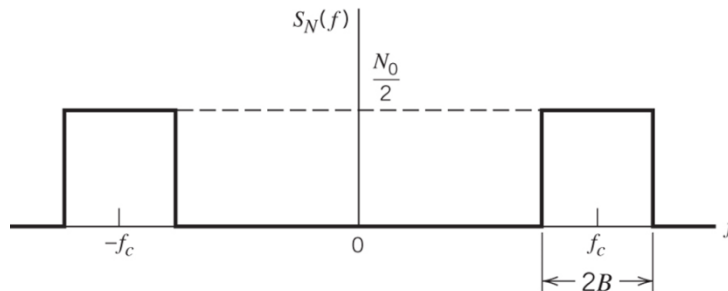
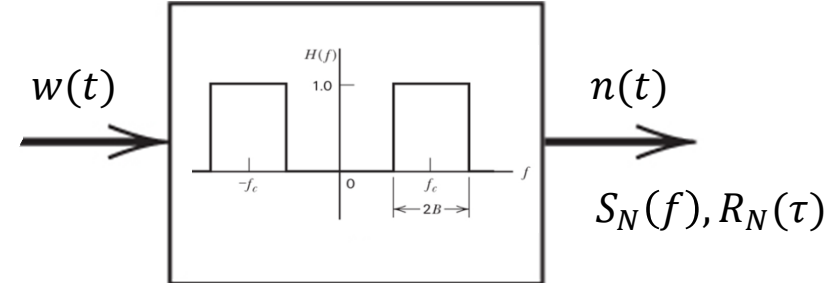
Λευκός θόρυβος Gauss με $S_W(f) = \frac{N_0}{2}$

Έξοδος $n(t)$:

Φασματική Ισχύς $S_N(f)$ και Αυτοσυσχέτιση $R_N(\tau)$

$$R_N(\tau) = \int_{-f_c-B}^{-f_c+B} \frac{N_0}{2} \exp(j2\pi f\tau) df + \int_{f_c-B}^{f_c+B} \frac{N_0}{2} \exp(j2\pi f\tau) df$$

$$= N_0 B \operatorname{sinc}(2B\tau) [\exp(-j2\pi f_c\tau) + \exp(j2\pi f_c\tau)] = 2N_0 B \operatorname{sinc}(2B\tau) \cos(2\pi f_c\tau)$$



$$S_{N_I}(f) = S_{N_Q}(f) = \begin{cases} S_N(f - f_c) + S_N(f + f_c), & -B \leq f \leq B \\ 0, & \text{για κάθε άλλη τιμή του } f \end{cases}$$

$$S_{N_I}(f) = S_{N_Q}(f) = \begin{cases} N_0, & -B \leq f \leq B \\ 0, & |f| > B \end{cases}$$

$$R_{N_I}(\tau) = R_{N_Q}(\tau) = 2N_0 B \operatorname{sinc}(2B\tau)$$

5.11 Θόρυβος Στενής Ζώνης (4/4)

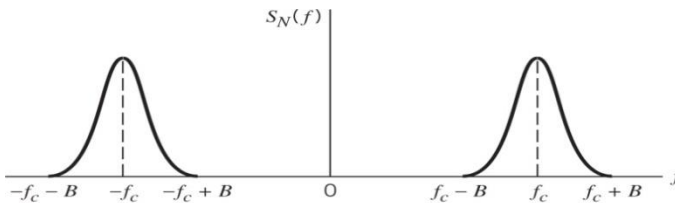
Αναπαράσταση μέσω συνιστωσών Envelope $r(t)$ & Phase $\psi(t)$

$$n(t) = r(t) \cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

- Οι συνιστώσες $r(t)$, $\psi(t)$ είναι baseband (low-pass) στοχαστικές ανελίξεις που συνδέονται με τις συνιστώσες $n_I(t)$, $n_Q(t)$ ως εξής: $r(t) = [n_I^2(t) + n_Q^2(t)]^{1/2}$, $\psi(t) = \tan^{-1} \frac{n_Q(t)}{n_I(t)}$
- Αν ο θόρυβος $n(t)$ είναι WSS Gaussian ανελίξη με μηδενικό μέσο όρο και διασπορά σ^2 τότε προκύπτει πως τα δείγματα των $r(t)$, $\psi(t)$ σε χρόνο t είναι τυχαίες μεταβλητές R , Ψ αντίστοιχα με κατανομές:

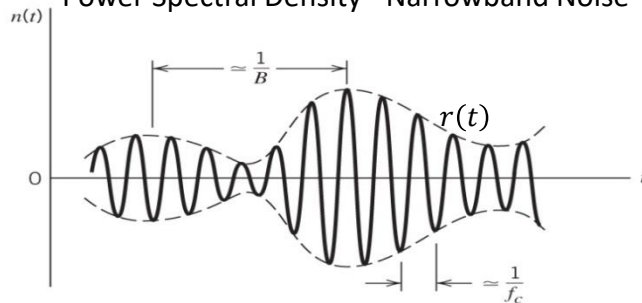
$$f_\Psi(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \psi \leq 2\pi \\ 0, & \psi < 0 \text{ και } \psi > 2\pi \end{cases}, \quad f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

$$\text{ή με } v = \frac{r}{\sigma} \Rightarrow f_V(v) = \sigma f_R(r), \quad f_V(v) = \begin{cases} v \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), & v \geq 0 \\ 0, & v < 0 \end{cases} \quad (\text{Κατανομή } \textbf{Rayleigh})$$

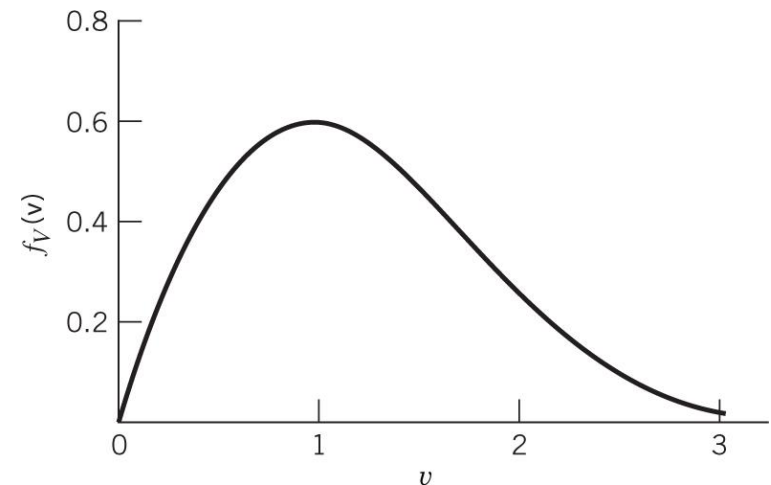


(a)

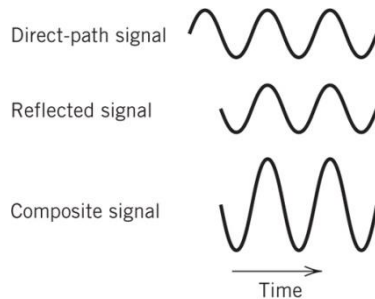
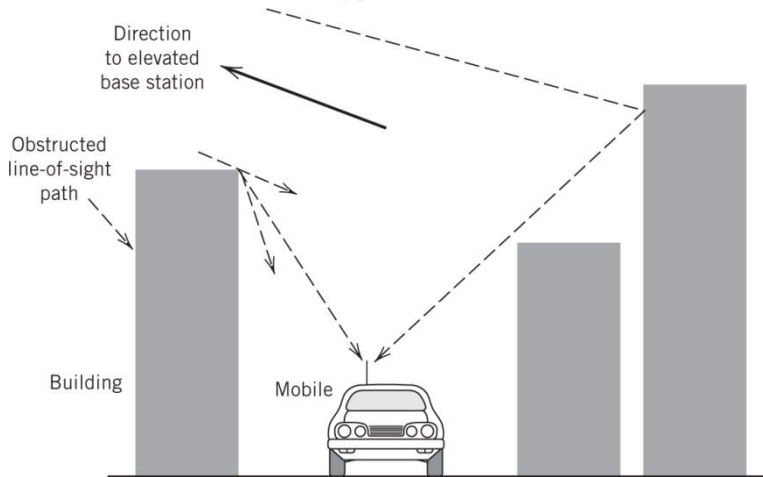
Power Spectral Density - Narrowband Noise



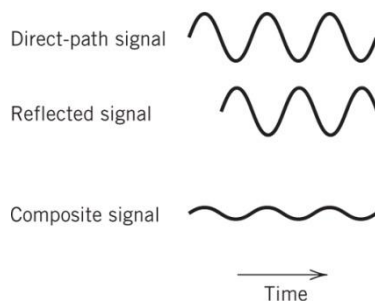
(b)



5.12 Στοχαστικό Μοντέλο Ασύρματου Διαύλου Κινητής Τηλεφωνίας



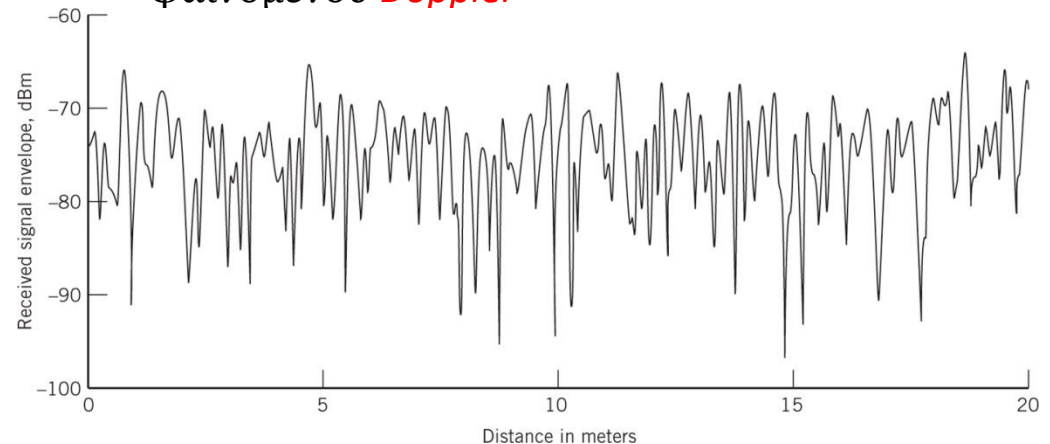
Εποικοδομητική Μορφή (Constructive Form)
(a)



Καταστροφική Μορφή (Destructive Form)
(b)

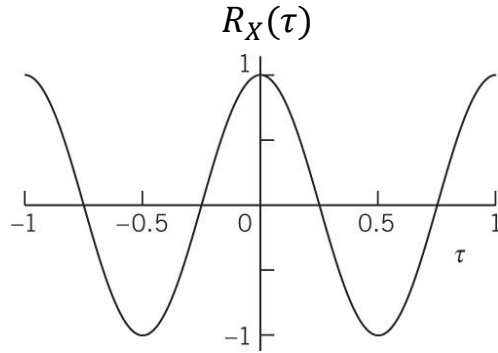
Φαινόμενο Multipath (Πολλαπλών Διαδρομών)

- Πολλαπλές ανακλάσεις δημιουργούν διαλείψεις ή ξεθωριάσματα (*fades*) λόγω υπέρθεσης εξασθενημένων επαναλήψεων (εκδόσεων) σήματος από διαφορετικές κατευθύνσεις και με διαφορετικές καθυστερήσεις (φάσεις) – *multipath effect*
- Πλάτος σήματος με *multipath fades*: Τυχαία μεταβλητή με κατανομή *Rayleigh* (στατιστικά γνωρίσματα θορύβου στενής ζώνης και έμμεσο αποτέλεσμα Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος)
- Αν ο δέκτης κινείται πρέπει να ληφθούν υπόψη και παραμορφώσεις συχνότητας λόγω φαινομένου *Doppler*

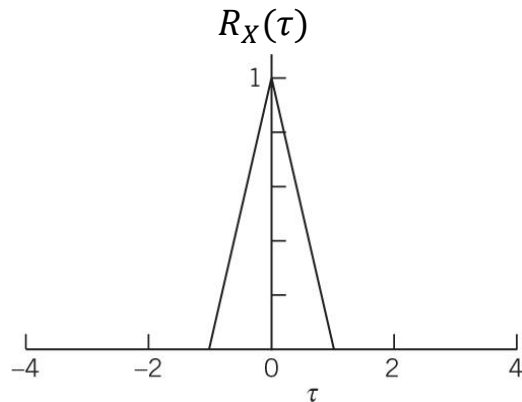
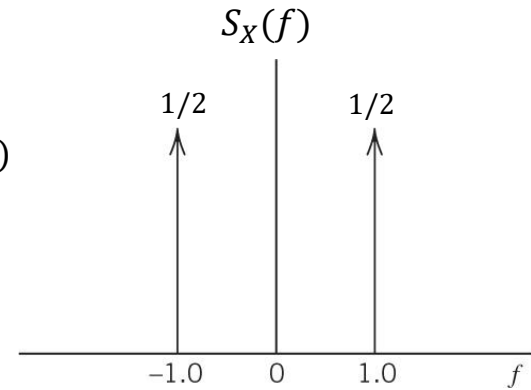


Περιβάλλουσα Λαμβανόμενου Σήματος σε Αστική Περιοχή

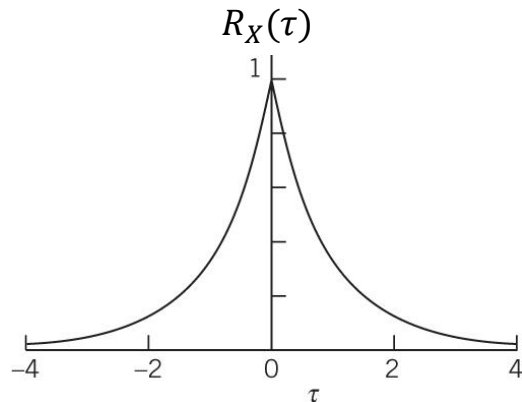
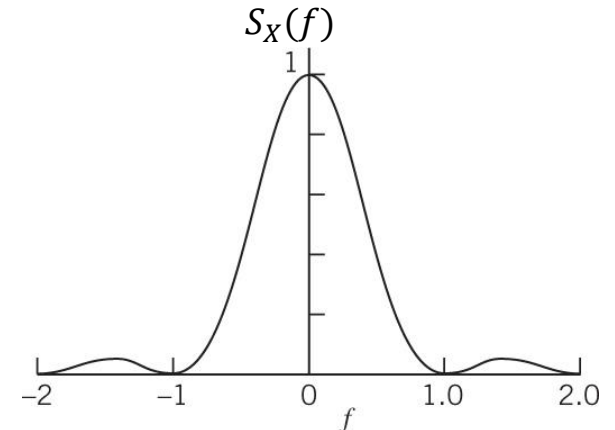
5.13 Γραφική Περίληψη Συναρτήσεων Αυτοσυσχέτισης - Πυκνότητας Φάσματος Ισχύος (1/2)



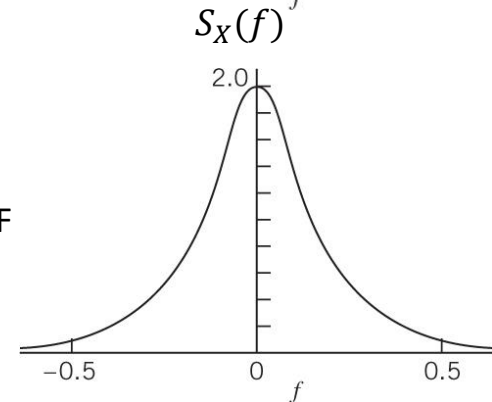
$X(t) = \sqrt{2}\cos(2\pi t + \Theta)$
 Θ ομοιόμορφα κατανομημένη $(-\pi, \pi)$



$X(t)$ τυχαίο δυαδικό σήμα
 μοναδιαίας διάρκειας

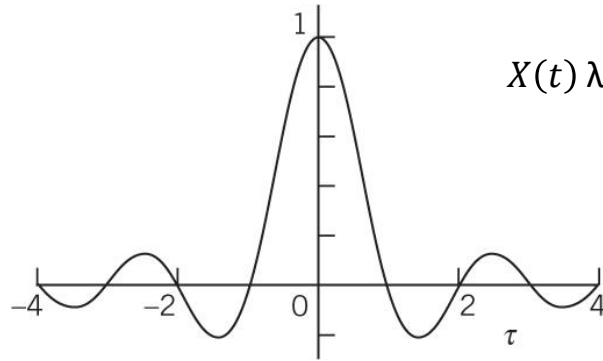


$X(t)$ λευκός θόρυβος δια μέσου RC LPF



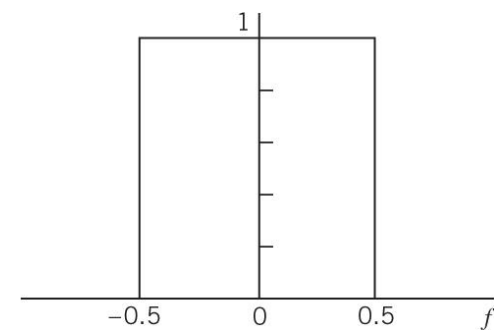
5.13 Γραφική Περίληψη Συναρτήσεων Αυτοσυσχέτισης - Πυκνότητας Φάσματος Ισχύος (2/2)

$R_X(\tau)$

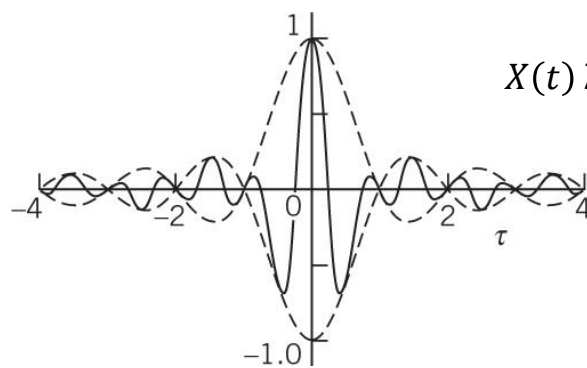


$X(t)$ λευκός θόρυβος δια μέσου ιδεατού LPF

$S_X(f)$

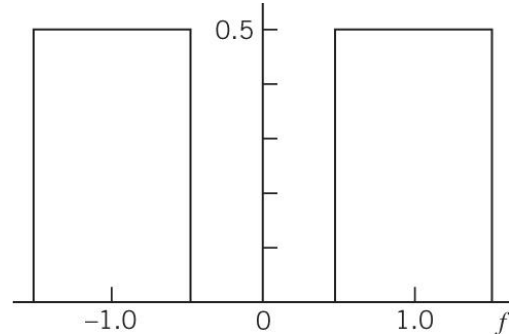


$R_X(\tau)$

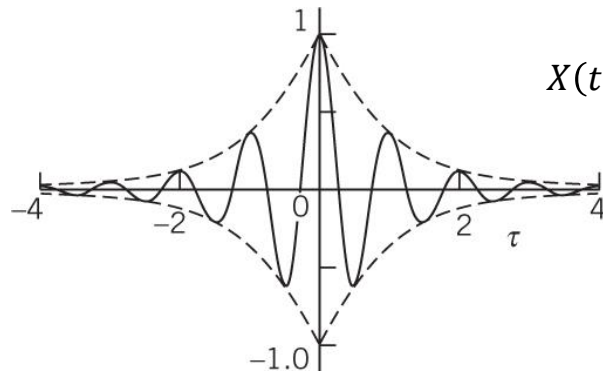


$X(t)$ λευκός θόρυβος δια μέσου ιδεατού BPF

$S_X(f)$



$R_X(\tau)$



$X(t)$ λευκός θόρυβος δια μέσου RLC BPF

$S_X(f)$

