

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ

1ο Τμήμα (Α - Κ): Αμφιθέατρο 4, Νέα Κτίρια ΣΗΜΜΥ

Διαμόρφωση Γωνίας (PM, FM)
Ασκήσεις 4.3, 4.9, 4.14, 4.20

καθ. Βασίλης Μάγκλαρης
maglaris@netmode.ntua.gr
www.netmode.ntua.gr

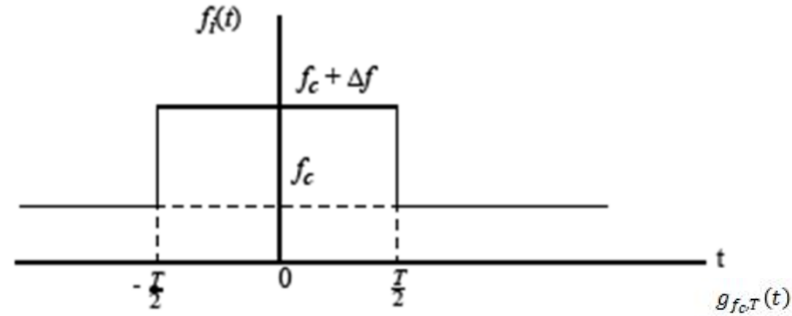
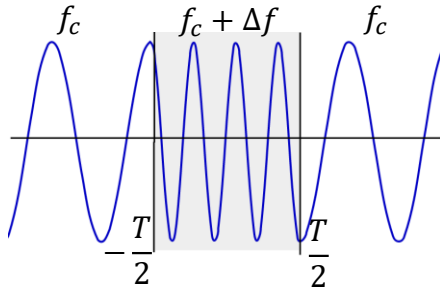
Παρασκευή 30/5/2019

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

Άσκηση 4.3

Φάσμα Σήματος $s(t) = A \cos(2\pi f_i t)$ με Μεταβαλλόμενη Στιγμαία Συχνότητα $f_i(t) = \begin{cases} f_c, & |t| \leq T/2 \\ f_c + \Delta f, & |t| > T/2 \end{cases}$

$s(t) = \begin{cases} A \cos(2\pi f_c t), & |t| \leq T/2 \\ A \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t], & |t| > T/2 \end{cases}$: Διαμόρφωση FM Ορθογωνίου Παλμού (FSK του ... 0001000 ...)

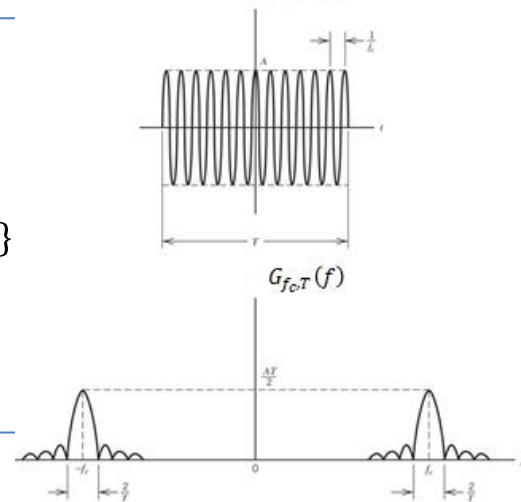


Έχουμε $s(t) = A \cos(2\pi f_c t) + g_{f_c + \Delta f, T}(t) - g_{f_c, T}(t)$ όπου
 $g_{f_c, T}(t)$: Διαμόρφωση AM Ορθογωνίου Παλμού (ASK του ... 0001000 ...)

Παράδειγμα 2.5 του Haykin & Moher

$$g_{f_c, T}(t) = A \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_c t) \leftrightarrow G_{f_c, T}(f) = \frac{AT}{2} \{\text{sinc}[T(f - f_c)] + \text{sinc}[T(f + f_c)]\}$$

$$\text{Av } f_c T \gg 1 \Rightarrow G_{f_c, T}(f) \cong \begin{cases} \frac{AT}{2} \text{sinc}[T(f - f_c)], & f > 0 \\ \frac{AT}{2} \text{sinc}[T(f + f_c)], & f < 0 \end{cases}$$



Άρα $s(t) = A \cos(2\pi f_c t) + g_{f_c + \Delta f, T}(t) - g_{f_c, T}(t) \leftrightarrow S(f)$ και για $f_c T \gg 1$:

$$S(f) \cong \begin{cases} \frac{A}{2} \delta(f - f_c) + \frac{AT}{2} \text{sinc}[T(f - f_c - \Delta f)] - \frac{AT}{2} \text{sinc}[T(f - f_c)], & f > 0 \\ \frac{A}{2} \delta(f + f_c) + \frac{AT}{2} \text{sinc}[T(f + f_c + \Delta f)] - \frac{AT}{2} \text{sinc}[T(f + f_c)], & f < 0 \end{cases}$$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

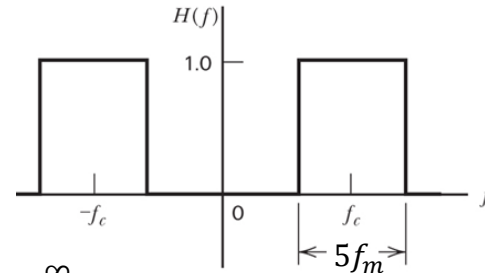
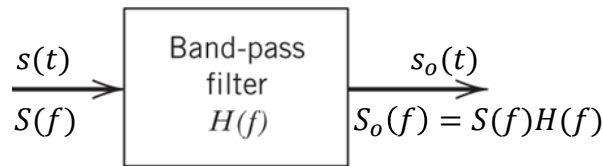
Άσκηση 4.9

Ημιτονοειδές $m(t) = \sin(2\pi f_m t)$

Σήμα FM: $s(t) = \cos[2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)]$, $\beta = 1$ (Wide-band FM)

Ιδανικό Φίλτρο Band-pass με Ζώνη Διέλευσης $2B = 5f_m$, $f_c - B \leq |f| \leq f_c + B$

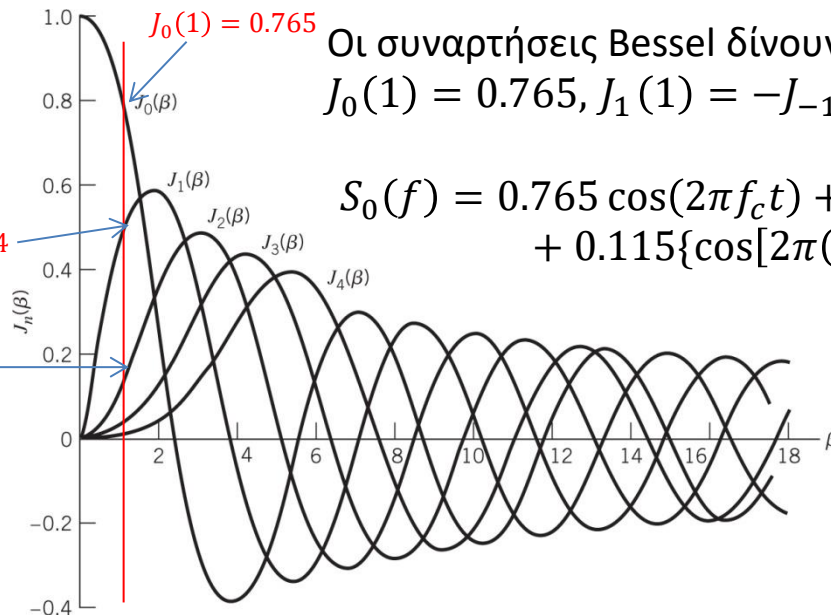
Ζητείται το Πλάτος Φάσματος $|S_o(f)| = |S(f)H(f)|$ της εξόδου του Φίλτρου $s(t) \rightarrow s_o(t)$



$$S(f) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(1) \cos[2\pi(f_c + nf_m)t]$$

Το φίλτρο θα περάσει τις αρμονικές στις (θετικές) συχνότητες:

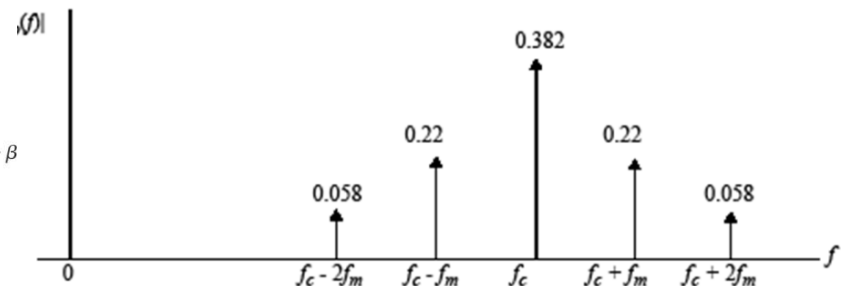
$f_c, f_c \pm f_m, f_c \pm 2f_m$ ενώ θα αποκόψει τις υπόλοιπες $f_c \pm nf_m, n \geq 3$



Οι συναρτήσεις Bessel δίνουν:

$J_0(1) = 0.765, J_1(1) = -J_{-1}(1) = 0.44, J_2(1) = J_{-2}(1) = 0.115$ και άρα:

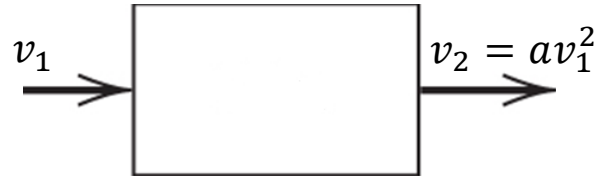
$$S_o(f) = 0.765 \cos(2\pi f_c t) + 0.44 \{ \cos[2\pi(f_c + f_m)t] - \cos[2\pi(f_c - f_m)t] \} + 0.115 \{ \cos[2\pi(f_c + 2f_m)t] - \cos[2\pi(f_c - 2f_m)t] \}$$



ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

Άσκηση 4.14

Διαμόρφωση FM: Διπλασιασμός Απόκλισης Συχνότητας $\Delta f \rightarrow 2\Delta f$ μέσω Διάταξης Square-law



$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\text{Έστω } m(t) = A_m \sin(2\pi f_m t)$$

$$s(t) = v_1 = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)), \quad \beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

$$v_2 = av_1^2 = aA_c^2 \cos^2(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)) = \frac{aA_c^2}{2} [1 + \cos(4\pi f_c t + 2\beta \sin(2\pi f_m t))]$$

Ο δείκτης διαμόρφωσης (*FM modulation index*) διπλασιάζεται ($\beta \rightarrow 2\beta$) και κατ' αναλογία διπλασιάζεται η απόκλιση συχνότητας ($\beta f_m = \Delta f \rightarrow 2\Delta f = 2\beta f_m$)

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

Άσκηση 4.20 (1/2)

Αποδιαμόρφωση FM μέσω Frequency Discriminator:

Επίδραση μεταβλητού πλάτους $x(t) > 0$ με αργή μεταβλητότητα σε σχέση με την φάση $\varphi(t)$ που διαμορφώνεται από το σήμα $m(t)$

$$s(t) = x(t) \cos[2\pi f_c t + \varphi(t)] = x(t) \cos[2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau] \leftrightarrow S(f)$$

$|S(f)| = 0$ για f εκτός των $(-f_c - \frac{B_T}{2}, -f_c + \frac{B_T}{2}), (f_c - \frac{B_T}{2}, f_c + \frac{B_T}{2})$ όπου $\frac{B_T}{2} \ll f_c$ η βασική ζώνη του $m(t)$

• Μιγαδική περιβάλλουσα (**complex envelope**) $\tilde{s}(t) = x(t) \exp[j\varphi(t)] = x(t) \exp[j2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau]$

• $\tilde{s}(t) \leftrightarrow \tilde{S}(f)$ περιορισμένος στο $-\frac{B_T}{2} \leq f \leq \frac{B_T}{2}$ με την υπόθεση $f_c \gg B_T$

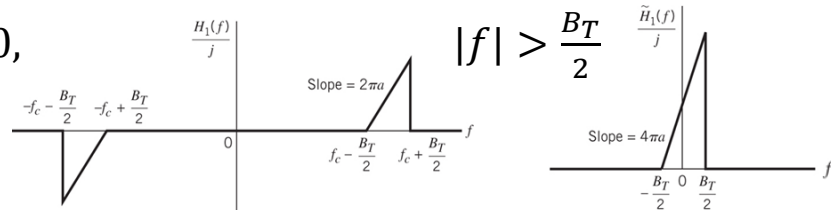
• Ιδανικό **slope circuit (differentiator)** $H_1(f) = \begin{cases} j2\pi a (f - f_c + \frac{B_T}{2}), & f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq f_c + \frac{B_T}{2} \\ j2\pi a (f + f_c - \frac{B_T}{2}), & -f_c - \frac{B_T}{2} \leq f \leq -f_c + \frac{B_T}{2} \\ 0, & \text{για κάθε άλλη } f \end{cases}$
 a : σταθερά κλίσης (slope)

• Μιγαδική περιβάλλουσα (**complex envelope**) $\tilde{H}_1(f) = \begin{cases} j4\pi a (f + \frac{B_T}{2}), & -\frac{B_T}{2} \leq f \leq \frac{B_T}{2} \\ 0, & |f| > \frac{B_T}{2} \end{cases}$

• Η band-pass $H_1(f)$ και η μιγαδική της low-pass $\tilde{H}_1(f)$ συνδέονται ως $\tilde{H}_1(f - f_c) = 2H_1(f)$, $f > 0$

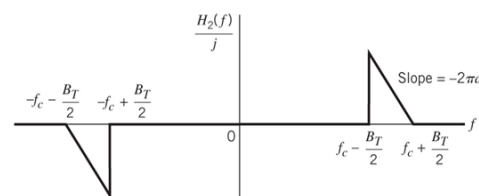
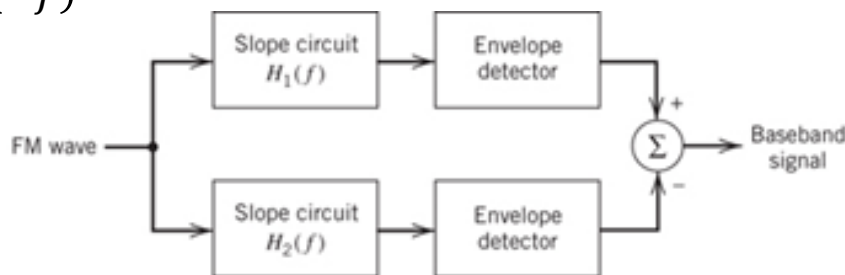
• Ιδανικό **complementary slope circuit** $H_2(f)$:

$$\tilde{H}_2(f) = \tilde{H}_1(-f)$$



Band-pass $H_1(f)$

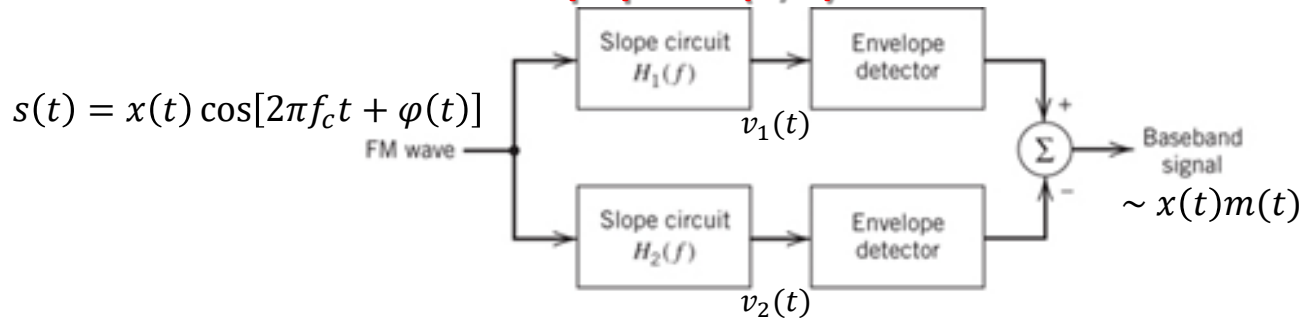
Low-pass $\tilde{H}_1(f)$



Band-pass $H_2(f)$

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ – 1ο Τμήμα

Άσκηση 4.20 (2/2)



- Έξοδος από **slope circuit** $H_1(f)$: $v_1(t) \leftrightarrow V_1(f)$ με μιγαδική περιβάλλουσα

$$\tilde{v}_1(t) \leftrightarrow \tilde{V}_1(f) = \frac{1}{2} \tilde{H}_1(f) \tilde{S}(f) = \begin{cases} j2\pi a \left(f + \frac{B_T}{2} \right) \tilde{S}(f), & -\frac{B_T}{2} \leq f \leq \frac{B_T}{2} \\ 0, & |f| > \frac{B_T}{2} \end{cases}$$

και

$$\tilde{v}_2(t) \leftrightarrow \tilde{V}_2(f) = \frac{1}{2} \tilde{H}_2(f) \tilde{S}(f) = \begin{cases} j2\pi a \left(-f + \frac{B_T}{2} \right) \tilde{S}(f), & -\frac{B_T}{2} \leq f \leq \frac{B_T}{2} \\ 0, & |f| > \frac{B_T}{2} \end{cases}$$

- $\tilde{v}_1(t) = a \left[\frac{d\tilde{s}(t)}{dt} + j\pi B_T \tilde{s}(t) \right]$ όπου $\frac{d\tilde{s}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{x(t) \exp[j\varphi(t)]\} = x(t) \exp[j\varphi(t)] \left[\frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} + j \frac{d\varphi(t)}{dt} \right]$
- Η $x(t)$ μεταβάλλεται αργά ως προς την $\varphi(t)$: $\left| j \frac{d\varphi(t)}{dt} \right| \gg \left| \frac{1}{x(t)} \frac{dx(t)}{dt} \right| \Rightarrow \frac{d\tilde{s}(t)}{dt} \cong jx(t) \frac{d\varphi(t)}{dt} \exp[j\varphi(t)]$
- $\varphi(t) = 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau \Rightarrow \frac{d\tilde{s}(t)}{dt} \cong j2\pi k_f x(t) m(t) \exp[j\varphi(t)]$ και η **έξοδος** του 1^{ου} **envelope detector**:
 $|\tilde{v}_1(t)| \cong [a\pi x(t)] \times [2k_f m(t) + B_T]$ αν $\left| \frac{2k_f}{B_T} m(t) \right| < 1$ και $x(t) \geq 0 \forall t$
- Η απόκλιση $[a\pi x(t) B_T]$ αντισταθμίζεται από την **έξοδο** του 2^{ου} **envelope detector** που ενεργεί στο $\tilde{v}_2(t)$
 $|\tilde{v}_2(t)| \cong [a\pi x(t)] \times [-2k_f m(t) + B_T]$ και $|\tilde{v}_1(t)| - |\tilde{v}_2(t)| \sim x(t)m(t)$