



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών &
Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρικής Ισχύος
Εργαστήριο Υψηλών Τάσεων



ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ **ΥΨΗΛΩΝ ΤΑΣΕΩΝ**

(Αριθμητικές μέθοδοι υπολογισμού ηλεκτρικών πεδίων)

Αριθμητικές μέθοδοι

- Διαφορικές μέθοδοι
 - Διαδοχικές επαναλήψεις
 - Πεπερασμένα στοιχεία
- Ολοκληρωτικές μέθοδοι
 - Ισοδύναμα φορτία
 - Επιφανειακά τμήματα
- Υβριδική μέθοδος (πεπερασμένα στοιχεία και ισοδύναμα φορτία)

Μέθοδος των Ισοδυνάμων Φορτίων (1)

Γενικές αρχές

- Το επιφανειακά φορτία των ηλεκτροδίων αντικαθίστανται από έναν αριθμό διακεκριμένων ιδεατών φορτίων στο εσωτερικό των ηλεκτροδίων.
- Τα ιδεατά φορτία μπορούν να είναι: σημειακά, γραμμικά ή δακτυλιοειδή.
- Οριακές συνθήκες στην επιφάνεια των ηλεκτροδίων.

Μέθοδος των Ισοδυνάμων Φορτίων (2)

Πλεονεκτήματα

- Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να εκτείνεται μέχρι το άπειρο
- Για κάθε επιφάνεια ηλεκτροδίου βρίσκεται η κατάλληλη διάταξη ισοδυνάμων φορτίων
- Η πεδιακή ένταση υπολογίζεται επακριβώς
- Εφαρμόζεται σε οποιαδήποτε διάταξη ηλεκτροδίων
- Εφαρμόζεται και σε ηλεκτρόδια που είναι σε ελεύθερο δυναμικό
- Εφαρμόζεται και όταν υπάρχουν δύο διηλεκτρικά
- Απαιτεί λίγο χρόνο και λίγη μνήμη στο ΗΥ

Σύστημα εξισώσεων (1)

Καθορίζει την έναντι του
γειωμένου ηλεκτροδίου διαφορά
δυναμικού του επιφανειακού
σημείου i (U_i) που οφείλεται στην
ύπαρξη μόνο του φορτίου Q_k

$$\sum_{k=1}^{n+p+q} p_{ik} \cdot Q_k = U_h$$

n εξισώσεις

$$\sum_{k=1}^{n+p+q} p_{ik} \cdot Q_k = U_x \quad \text{ή} \quad \sum_{k=1}^{n+p+q} p_{ik} \cdot Q_k - U_x = 0$$

p εξισώσεις

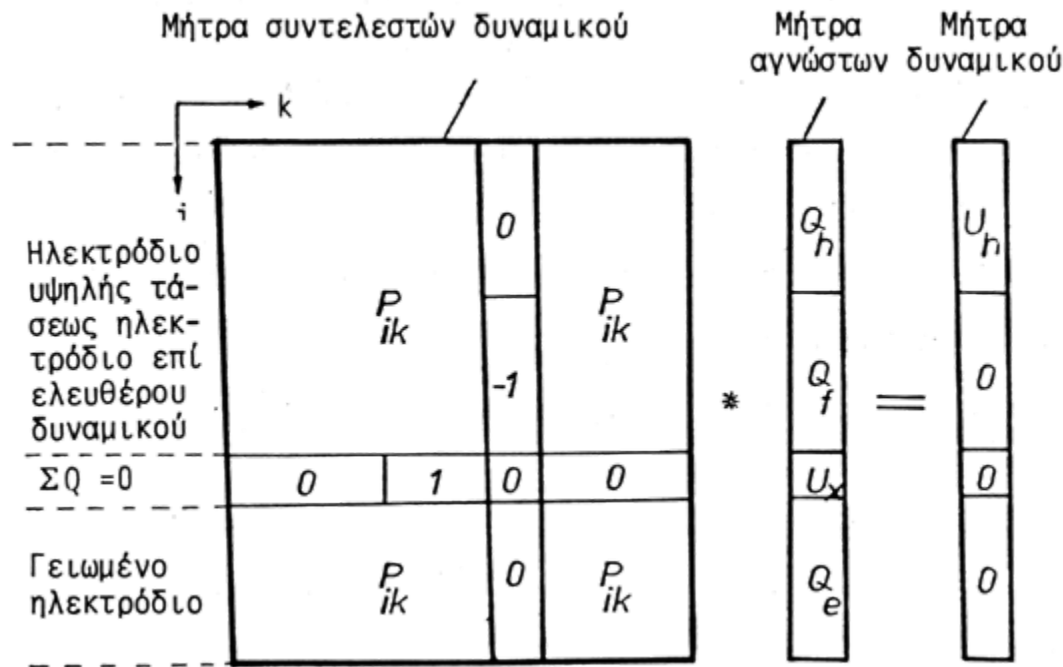
$$\sum_{k=1}^{n+p+q} p_{ik} \cdot Q_k = 0$$

q εξισώσεις

Εξαρτώνται μόνο από
την γεωμετρία του
συστήματος.

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} Q_k = 0$$

Σύστημα εξισώσεων (2)



Σύστημα εξισώσεων για διατάξεις τριών ηλεκτροδίων

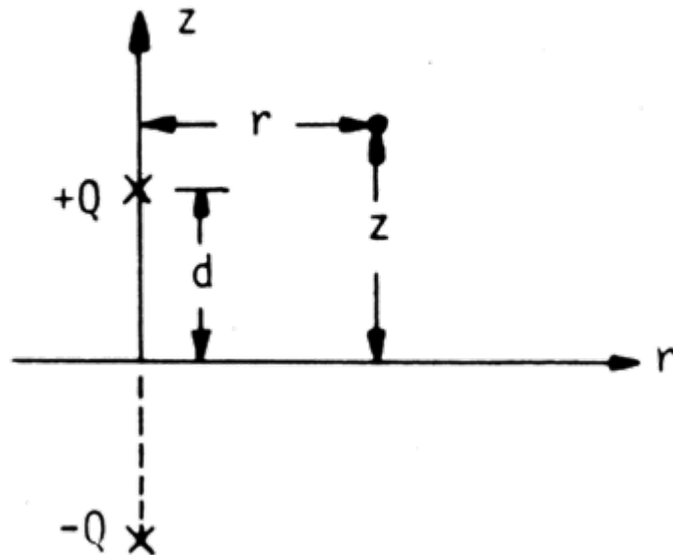
Q_h = φορτία στο ηλεκτρόδιο υψηλής τάσης (1...n)

Q_f = φορτία στο ηλεκτρόδιο ελεύθερου δυναμικού (n+1...n+p)

Q_p = φορτία στο γειωμένο ηλεκτρόδιο (n+p+1...n+p+q)

U_x = ελεύθερο δυναμικό

Σημειακό φορτίο

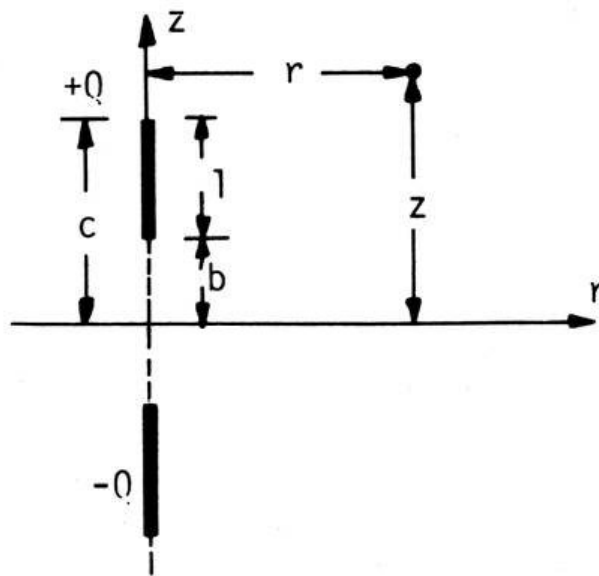


$$p_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (d - z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (d + z)^2}} \right]$$

για $r = 0$

$$p_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{|d - z|} - \frac{1}{d + z} \right]$$

Γραμμικό φορτίο



$$p_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon\ell} \left[\ln \frac{c - z + \sqrt{r^2 + (c - z)^2}}{b - z + \sqrt{r^2 + (b - z)^2}} - \ln \frac{c + z + \sqrt{r^2 + (c + z)^2}}{b + z + \sqrt{r^2 + (b + z)^2}} \right]$$

για $r = 0$

$$p_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\ln \frac{c - z}{b - z} - \ln \frac{c + z}{b + z} \right]$$

Δακτυλιοειδές φορτίο

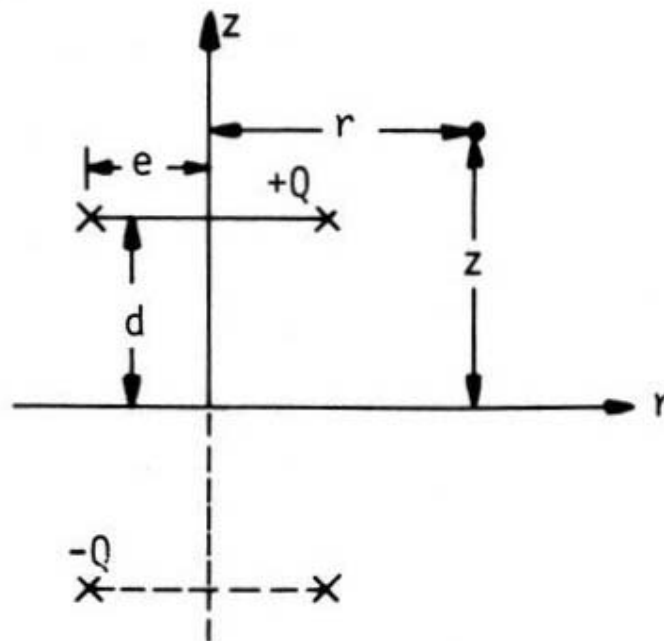
$$p_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2}{\pi} \left[\frac{K(\kappa_1)}{\sqrt{(r+e)^2 + (d-z)^2}} - \frac{K(\kappa_2)}{\sqrt{(r+e)^2 + (d+z)^2}} \right]$$

όπου $K(\kappa_i)$ πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα 1ου είδους modulus κ_i ($i=1,2$)

$$K(\kappa_i) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1-\kappa_i^2 \sin^2 \psi}} \text{ και } \kappa_{1/2} = \frac{4er}{(r+e)^2 + (d \mp z)^2}$$

για $r=0$: $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, $K(0) = \pi/2$

$$p_{ik} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{\sqrt{e^2 + (d-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{e^2 + (d+z)^2}} \right]$$



Υπολογισμός πεδιακής έντασης

$$f_{ik} \cdot Q_k = E_i$$

για σύστημα συντεταγμένων (r, z)

$$(f_{ik})_r \cdot Q_k = (E_i)_r$$

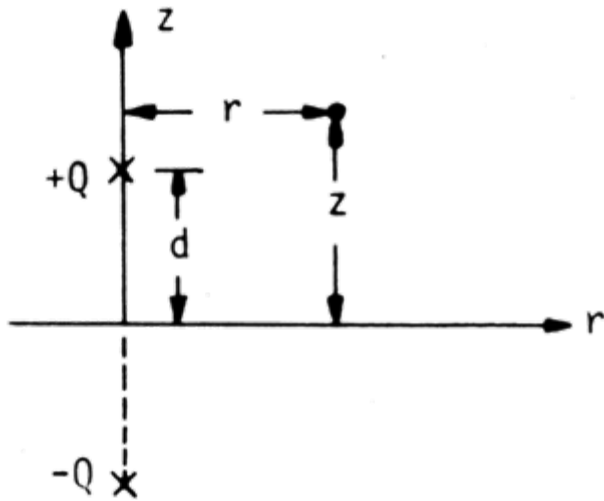
$$(f_{ik})_z \cdot Q_k = (E_i)_z$$

$$E_r = \sum_{k=1}^N (f_{ik})_r \cdot Q_k$$

$$E_z = \sum_{k=1}^N (f_{ik})_z \cdot Q_k$$

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_z^2}$$

Σημειακό φορτίο



$$f_{ikr} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{r}{(r^2 + (z-d)^2)^{3/2}} - \frac{r}{(r^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right]$$

$$f_{ikz} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{z-d}{(r^2 + (z-d)^2)^{3/2}} - \frac{z+d}{(r^2 + (z+d)^2)^{3/2}} \right]$$

$$\bar{Q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon U}$$

$$\Phi = \bar{Q} \cdot U \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + (d-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (d+z)^2}} \right]$$

$$\Phi(r=0) = \bar{Q} \cdot U \left[\frac{1}{|d-z|} - \frac{1}{z+d} \right]$$

$$E(r=0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{z-d}{|z-d|^3} - \frac{z+d}{|z+d|^3} \right]$$

$$E_{\max} = \bar{Q} \cdot U \left[\frac{z-d}{|z-d|^3} - \frac{z+d}{|z+d|^3} \right]$$

Γραμμικό φορτίο

$$f_{ikr} = \frac{1}{4\pi\epsilon\ell} \left[\frac{c-z}{r\sqrt{r^2+(c-z)^2}} - \frac{b-z}{r\sqrt{r^2+(b-z)^2}} + \frac{b+z}{r\sqrt{r^2+(b+z)^2}} - \frac{c+z}{r\sqrt{r^2+(c+z)^2}} \right]$$

$$f_{ikz} = \frac{1}{4\pi\epsilon\ell} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(c-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(b-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2+(b+z)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+(c+z)^2}} \right]$$

$$\bar{Q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon U}$$

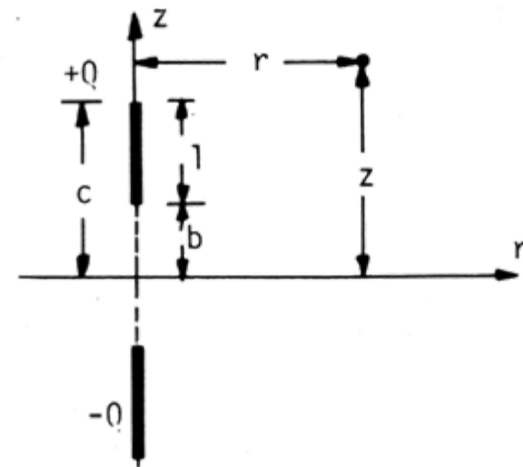
$$\Phi = \frac{\bar{Q}U}{\ell} \left[\ln \frac{c-z+\sqrt{r^2+(c-z)^2}}{b-z+\sqrt{r^2+(b-z)^2}} - \ln \frac{c+z+\sqrt{r^2+(c+z)^2}}{b+z+\sqrt{r^2+(b+z)^2}} \right]$$

για $r = 0$

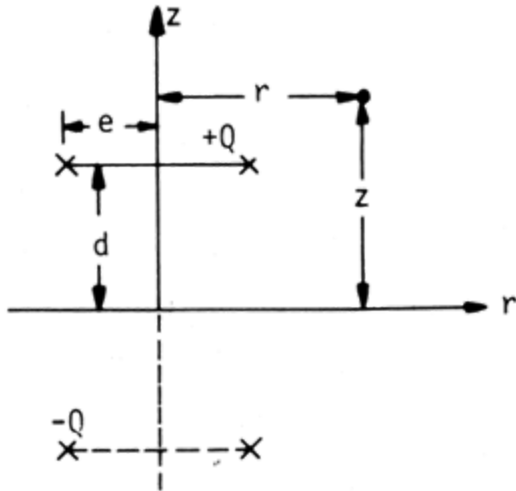
$$E(r=0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon\ell} \left[\frac{1}{|c-z|} - \frac{1}{|b-z|} + \frac{1}{c+z} - \frac{1}{b+z} \right]$$

$$\Phi(r=0) = \frac{\bar{Q}U}{\ell} \left[\ln \frac{c-z}{b-z} - \ln \frac{c+z}{b+z} \right]$$

$$E_{\max} = \frac{\bar{Q}U}{\ell} \left[\frac{1}{|c-z|} - \frac{1}{|b-z|} + \frac{1}{c+z} - \frac{1}{b+z} \right]$$



Δακτυλιοειδές φορτίο (1)



$$f_{ik_r} = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{\pi r} \cdot \left[\frac{\left[e^2 - r^2 + (z-d)^2 \right] \cdot E(\kappa_1) - \left[(r-e)^2 + (z-d)^2 \right] \cdot K(\kappa_1)}{\sqrt{(r+e)^2 + (z-d)^2} \cdot \left[(r-e)^2 + (z-d)^2 \right]} - \frac{\left[e^2 - r^2 + (z+d)^2 \right] \cdot E(\kappa_2) - \left[(r-e)^2 + (z+d)^2 \right] \cdot K(\kappa_2)}{\sqrt{(r+e)^2 + (z+d)^2} \cdot \left[(r-e)^2 + (z+d)^2 \right]} \right]$$

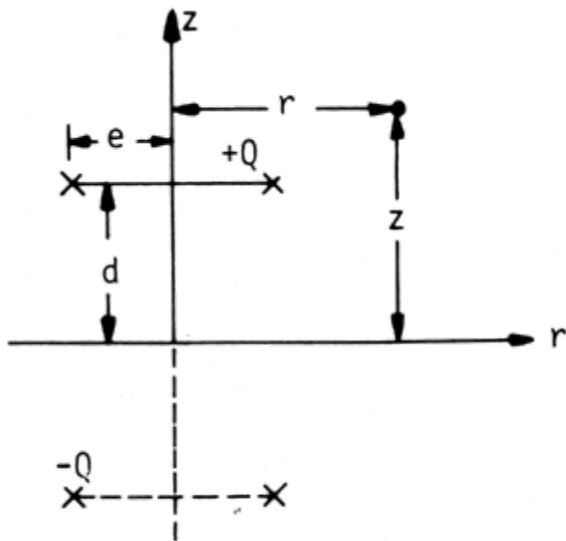
$$K(\kappa_i) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \kappa_i^2 \sin^2 \psi}}$$

$$E(\kappa_i) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa_i^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

$$\kappa_{1/2} = \sqrt{\frac{4er}{(r+e)^2 + (d+z)^2}}$$

$$f_{ik_z} = \frac{-1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left[\frac{(d-z) \cdot E(\kappa_1)}{\sqrt{(r+e)^2 + (z-d)^2} \cdot \left[(r-e)^2 + (z-d)^2 \right]} + \frac{(d+z) \cdot E(\kappa_2)}{\sqrt{(r+e)^2 + (z+d)^2} \cdot \left[(r-e)^2 + (z+d)^2 \right]} \right]$$

Δακτυλιοειδές φορτίο (2)



$$E_{(r=0)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left[\frac{-(d-z)}{\left[e^2 + (d-z)^2 \right]^{3/2}} - \frac{(d+z)}{\left[e^2 + (d+z)^2 \right]^{3/2}} \right]$$

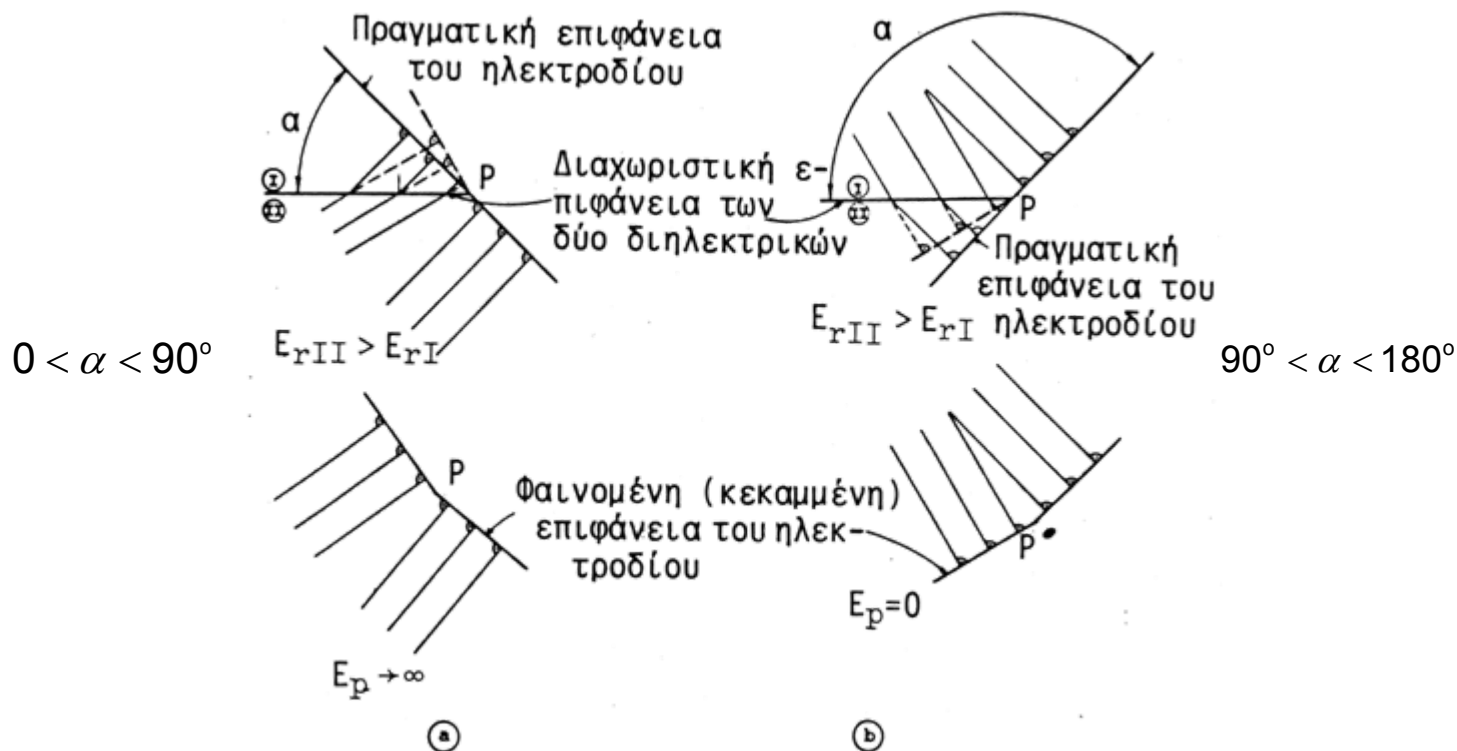
$$E_{\max} = \bar{Q}U \left[\frac{-(d-z)}{\left| e^2 + (d-z)^2 \right|^{3/2}} - \frac{(d+z)}{\left| e^2 + (d+z)^2 \right|^{3/2}} \right]$$

$$\Phi = \bar{Q}U \frac{2}{\pi} \left[\frac{K(\kappa_1)}{\sqrt{(r+e)^2 + (d-z)^2}} - \frac{K(\kappa_2)}{\sqrt{(r+e)^2 + (d+z)^2}} \right]$$

Για $r=0$: $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, $K(0) = \pi/2$

$$\Phi_{(r=0)} = \bar{Q}U \left[\frac{1}{\sqrt{e^2 + (d-z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{e^2 + (d+z)^2}} \right]$$

Διαχωριστική επιφάνεια δύο διηλεκτρικών



Σχηματική αναπαράσταση για την επίδειξη του φαινομένου, που εμφανίζεται στις θέσεις τομής της επιφάνειας του ηλεκτροδίου με τη διαχωριστική επιφάνεια δύο διηλεκτρικών.

Η γωνία μετριέται στο μονωτικό με τη μικρότερη διηλεκτρική σταθερά.

Μέθοδος των διαδοχικών επαναλήψεων

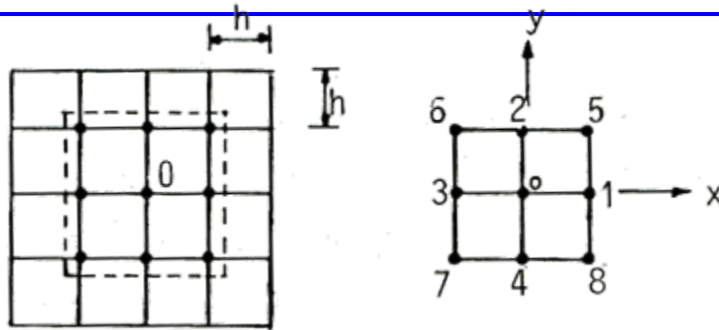
- Διαφορική μέθοδος
- Προϋπόθεση: Το ηλεκτρικό πεδίο είναι χωρικά πεπερασμένο
- Υπολογισμός
 - δισδιάστατων ηλεκτρικών πεδίων
 - τρισδιάστατων ηλεκτρικών πεδίων
- Η μέθοδος είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική σε περιπτώσεις ηλεκτρικών πεδίων συμμετρικών εκ περιστροφής

Μέθοδος των διαδοχικών επαναλήψεων - Υπολογισμός δισδιάστατων ηλεκτρικών πεδίων

- Οι ισοδυναμικές επιφάνειες είναι «κυλινδρικές»
- Για τη μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων χρησιμοποιείται το ανάπτυγμα Taylor του δυναμικού $\Phi(x,y)$, του τυχαίου σημείου συντεταγμένων, περί το δυναμικό $\Phi(x_0,y_0)$ ή Φ_0

$$\begin{aligned}\Phi(x,y) = \Phi_0 + \frac{1}{1!} & \left[(x - x_0)\Phi_x(x_0,y_0) + (y - y_0)\Phi_y(x_0,y_0) \right] + \\ & \frac{1}{2!} \left[(x - x_0)^2\Phi_{xx}(x_0,y_0) + 2(x - x_0)(y - y_0)\Phi_{xy}(x_0,y_0) \right. \\ & \left. + (y - y_0)^2\Phi_{yy}(x_0,y_0) \right] + \dots\end{aligned}$$

Εφαρμογή της μεθόδου



Δίδονται : $\Phi_1 \dots \Phi_4$ ή $\Phi_5 \dots \Phi_8$ ή $\Phi_1 \dots \Phi_8$
 Ζητείται : Φ_0

$$\Phi_1 = \Phi_0 + h\Phi_x + 0 + \frac{1}{2}(h^2\Phi_{xx} + 0 + 0)$$

$$\Phi_2 = \Phi_0 + 0 + h\Phi_y + 0 + \frac{1}{2}(0 + 0 + h^2\Phi_{yy})$$

$$\Phi_3 = \Phi_0 - h\Phi_x + 0 + \frac{1}{2}(h^2\Phi_{xx} + 0 + 0)$$

$$\Phi_4 = \Phi_0 + 0 - h\Phi_y + \frac{1}{2}(0 + 0 + h^2\Phi_{yy})$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \Phi_i \quad \text{τύπος του τετραγώνου} \quad \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=5}^8 \Phi_i \quad \text{τύπος της διαγωνίου}$$

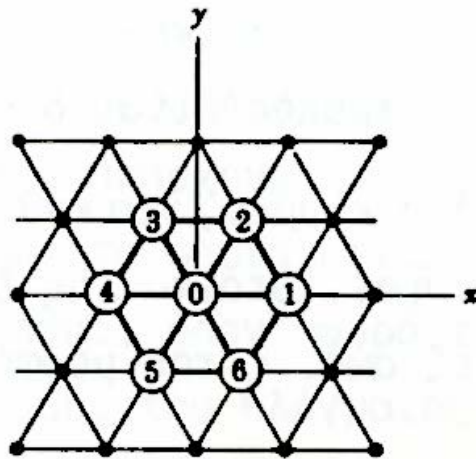
$$\Phi_0 = \frac{1}{4}(\Phi_1 + 2\Phi_2 + \Phi_3) \quad \text{συμμετρία ως προς τον άξονα των } x$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_4) \quad \text{συμμετρία ως προς τη διαγώνιο 5-0-7}$$

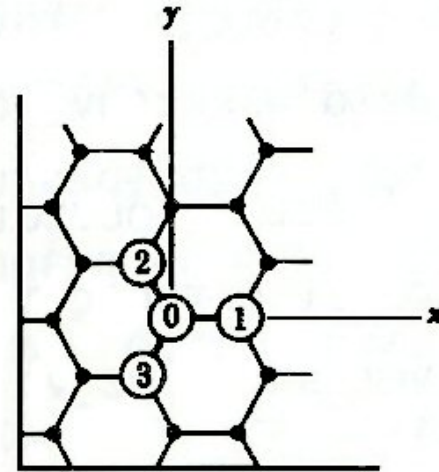
$$\Phi_0 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^4 \Phi_i + \frac{1}{20} \sum_{i=5}^8 \Phi_i \quad \text{τύπος των 8 σημείων}$$

Τριγωνικά ή εξαγωνικά πλέγματα

- Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τριγωνικά ή εξαγωνικά πλέγματα

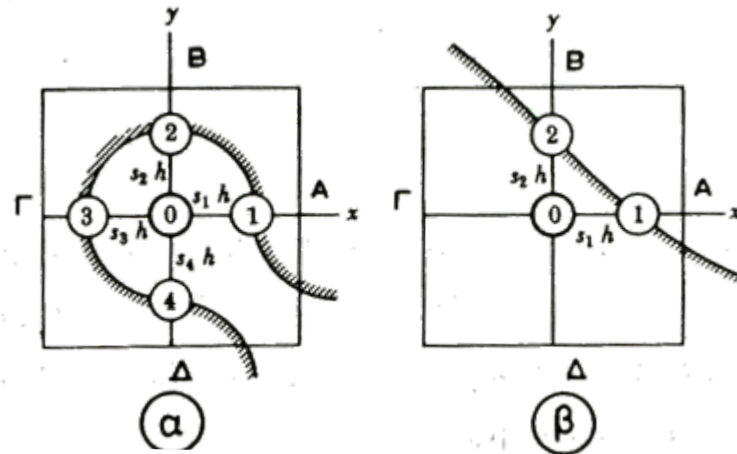


$$\Phi_0 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \Phi_i$$



$$\Phi_0 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \Phi_i$$

Όριο περιοχής



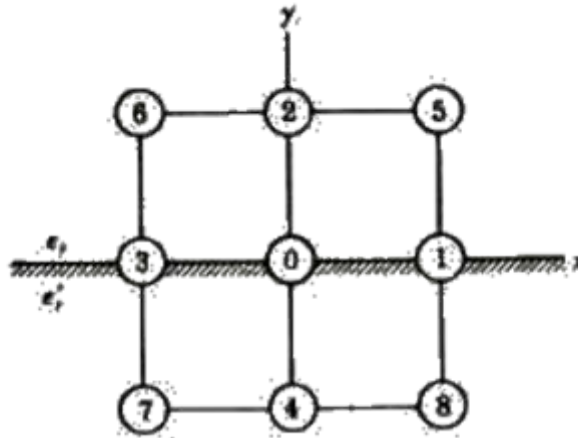
$$s_1 = \frac{\overline{01}}{h} \quad s_2 = \frac{\overline{02}}{h} \quad s_3 = \frac{\overline{03}}{h} \quad s_4 = \frac{\overline{04}}{h}$$

$$\Phi_0 = \frac{\frac{1}{s_1 + s_3} \left(\frac{\Phi_1}{s_1} + \frac{\Phi_3}{s_3} \right) + \frac{1}{s_2 + s_4} \left(\frac{\Phi_2}{s_2} + \frac{\Phi_4}{s_4} \right)}{\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2 s_4}}$$

$$\Phi_0 = \frac{\frac{1}{s_1 + 1} \left(\frac{\Phi_1}{s_1} + \Phi_3 \right) + \frac{1}{s_2 + 1} \left(\frac{\Phi_2}{s_2} + \Phi_4 \right)}{\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}}$$

όταν $s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 1 \Rightarrow$ τύπος του τετραγώνου

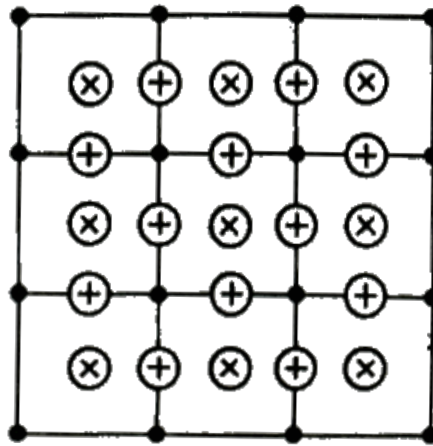
Υπολογισμός πεδίων εκτεινομένων σε δύο διηλεκτρικά



$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \left[\Phi_1 + \Phi_3 + \frac{2}{1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} (\Phi_2 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \Phi_4) \right] \text{ τύπος του τετραγώνου}$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right)} \left[\Phi_5 + \Phi_6 + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} (\Phi_7 + \Phi_8) \right] \text{ τύπος της διαγωνίου}$$

Υπολογισμός δυναμικού σε ενδιάμεσα σημεία του πλέγματος



Προϋπόθεση είναι η γνώση των δυναμικών στους κόμβους του αρχικού πλέγματος

Στα σημεία • το δυναμικό είναι γνωστό

Υπολογίζονται τα δυναμικά στα σημεία

Υπολογίζονται τα δυναμικά στα σημεία



Επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ακρίβεια του αποτελέσματος
όσο μικρότερες είναι οι διαστάσεις του αρχικού πλέγματος

Μείωση διαστάσεων πλέγματος

■ Μέθοδος Richardson

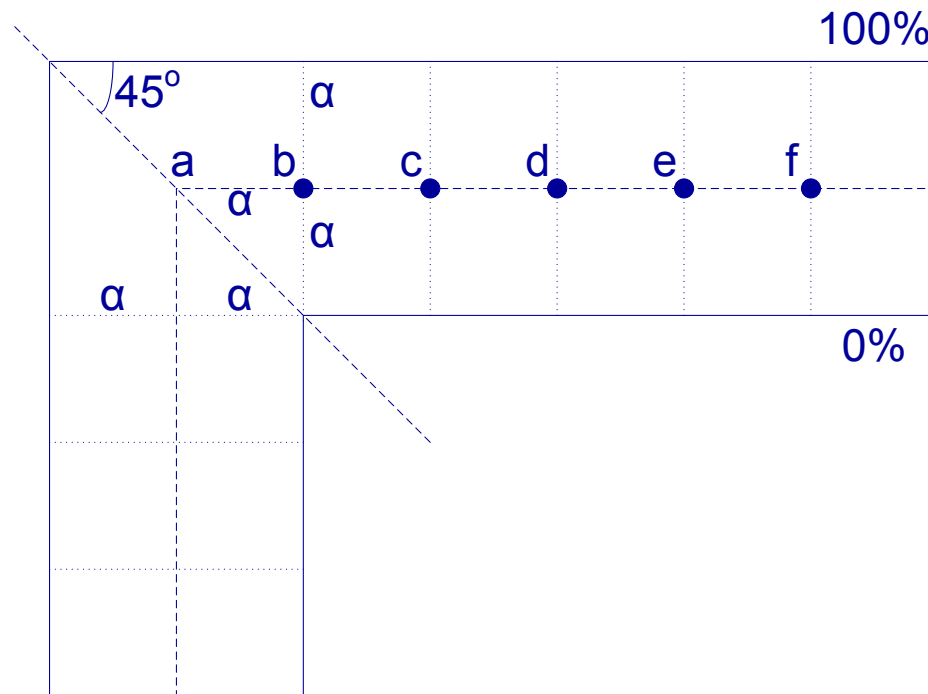
- Το δυναμικό ενός κόμβου αυξάνει με το τετράγωνο των διαστάσεων του πλέγματος
- Είναι γνωστό το δυναμικό ενός σημείου για διαστάσεις πλέγματος h_1, h_2
- Υπολογίζεται το δυναμικό στο ίδιο για μηδενική διάσταση πλέγματος ($h=0$)

$$\Phi_{h=0} = \Phi_2 + \frac{h_2^2}{h_1^2 - h_2^2} (\Phi_2 - \Phi_1)$$

- Για $h_1=2h_2=h$

$$\Phi_{h=0} = \frac{1}{3} (4\Phi_{h/2} - \Phi_h)$$

Εφαρμογή



Εφαρμογή της μεθόδου των διαδοχικών επαναλήψεων όταν υπάρχει χωρικό φορτίο

- Έστω χωρική πυκνότητα φορτίου $\rho(x,y)$
- Το δυναμικό υπολογίζεται από την εξίσωση Poisson

$$\Delta\Phi = -\frac{\rho(x,y)}{\varepsilon}$$

τότε ο τύπος του τετραγώνου γίνεται

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \Phi_i + \frac{h^2}{4} \frac{\rho(x,y)}{\varepsilon}$$

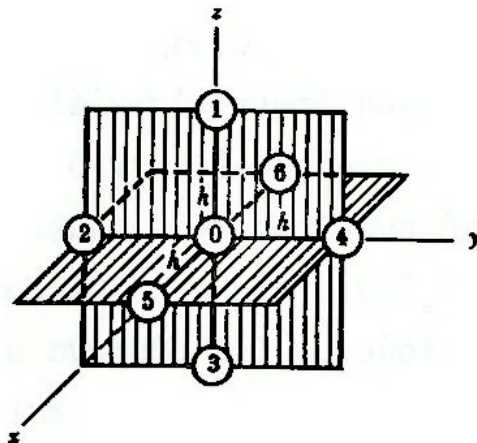
Μεθοδολογία υπολογισμού δισδιάστατου πεδίου

- Η επιφάνεια μεταξύ των ηλεκτροδίων καλύπτεται με πλέγμα σταθερών διαστάσεων
- Για τους κόμβους του πλέγματος που βρίσκονται πάνω στο περίγραμμα των ηλεκτροδίων επιλέγεται τιμή δυναμικού ίση με αυτή του ηλεκτροδίου.
- Για τους υπόλοιπους κόμβους αντιστοιχίζονται αυθαίρετες τιμές*
- Βάσει των τύπων διορθώνουμε τα δυναμικά των κόμβων
- Ξεκινώντας από τα νέα δυναμικά επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία μέχρι να επιτευχθεί η απαιτούμενη ακρίβεια
- Αφού υπολογιστούν τα δυναμικά μπορούν να χαραχθούν οι ισοδυναμικές καμπύλες
- Υπολογισμός πεδιακής έντασης

* Οι αρχικές τιμές καλό θα ήταν να έχουν προεκτιμηθεί βάσει της γεωμετρίας του συστήματος

Μέθοδος των διαδοχικών επαναλήψεων - Υπολογισμός τρισδιάστατων ηλεκτρικών πεδίων (1)

- Ο χώρος στον οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό καλύπτεται από **κύβους** ακμής h



- Το δυναμικό Φ_0 υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\Phi_0 = \sum_{i=1}^6 \Phi_i \quad \text{τύπος του κύβου}$$

Μέθοδος των διαδοχικών επαναλήψεων - Υπολογισμός τρισδιάστατων ηλεκτρικών πεδίων (2)

- Οι εύρεση των δυναμικών των κόμβων απαιτεί μεγάλο υπολογιστικό χρόνο, διότι γίνονται προσεγγίσεις κατά μήκος και των 3 αξόνων

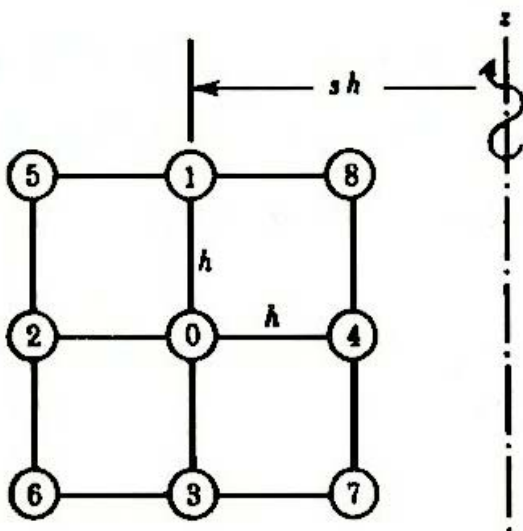
$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

- Απλούστερες οι υπολογιστικές διαδικασίες όταν το προς υπολογισμό ηλεκτρικό πεδίο είναι συμμετρικό εκ περιστροφής

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = & \Phi_0 + \frac{1}{1!} [(r - r_0) \Phi_r(r_0, z_0) + (z - z_0) \Phi_z(r_0, z_0)] + \\ & \frac{1}{2!} [(r - r_0)^2 \Phi_{rr}(r_0, z_0) + 2(r - r_0)(z - z_0) \Phi_{rz}(r_0, z_0) \\ & + (z - z_0)^2 \Phi_{zz}(r_0, z_0)] + \dots \end{aligned}$$

Μέθοδος των διαδοχικών επαναλήψεων - Υπολογισμός τρισδιάστατων ηλεκτρικών πεδίων (3)



$$\Phi_1 = \Phi_0 + 0 + h\Phi_z + \frac{1}{2}(0 + 0 + h^2\Phi_{zz})$$

$$\Phi_2 = \Phi_0 + h\Phi_r + 0 + \frac{1}{2}(h^2\Phi_{rr} + 0 + 0)$$

$$\Phi_3 = \Phi_0 + 0 - h\Phi_z + \frac{1}{2}(0 + 0 + h^2\Phi_{zz})$$

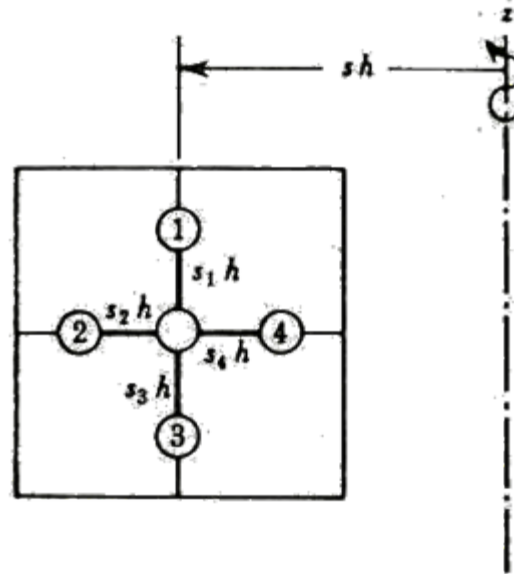
$$\Phi_4 = \Phi_0 - h\Phi_r + 0 + \frac{1}{2}(h^2\Phi_{rr} + 0 + 0)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \Phi_i + \frac{\Phi_2 - \Phi_4}{8s} \text{ για } s \rightarrow \infty \text{ τύπος του τετραγώνου}$$

$$\Phi_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=5}^8 \Phi_i + \frac{\Phi_5 + \Phi_6 - \Phi_7 - \Phi_8}{8s} \text{ για } s \rightarrow \infty \text{ τύπος της διαγωνίου}$$

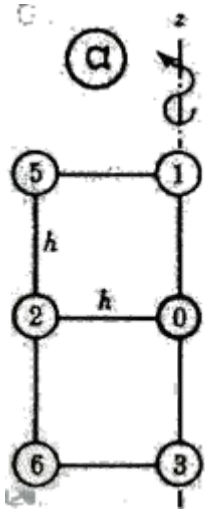
Όριο περιοχής (1)



$$s_1 = \frac{\overline{01}}{h} \quad s_2 = \frac{\overline{02}}{h} \quad s_3 = \frac{\overline{03}}{h} \quad s_4 = \frac{\overline{04}}{h}$$

$$\Phi_0 = \frac{\frac{2s}{s_1 + s_3} \left(\frac{\Phi_1}{s_1} + \frac{\Phi_3}{s_3} \right) + \frac{1}{s_2 + s_4} \left((2s + s_4) \frac{\Phi_2}{s_2} + (2s + s_2) \frac{\Phi_4}{s_4} \right)}{\frac{2s}{s_1 s_3} + \frac{2s + s_4 - s_2}{s_2 s_4}}$$

Όριο περιοχής (2) -Εφαρμογή



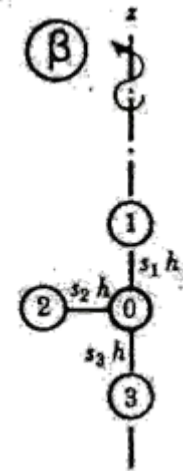
Φ_1, Φ_2, Φ_3 γνωστά

$$\Phi_0 = \frac{1}{6}(\Phi_1 + 4\Phi_2 + \Phi_3)$$

Φ_2, Φ_5, Φ_6 γνωστά

$$\Phi_0 = \frac{1}{4}(2\Phi_2 + \Phi_5 + \Phi_6)$$

$$\Phi_0 = \frac{\frac{1}{s_1 + s_3} \left(\frac{\Phi_1}{s_1} + \frac{\Phi_3}{s_3} \right) + \frac{2}{s_2^2} \Phi_2}{\frac{1}{s_1 s_3} + \frac{1}{s_2^2}}$$

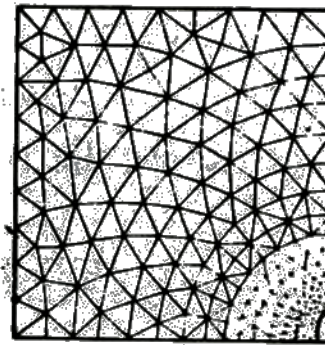
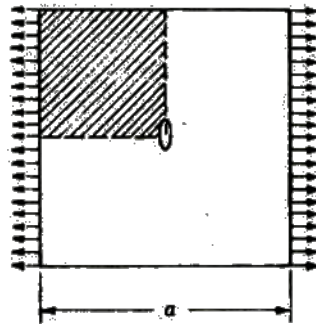


Παρατηρήσεις

- Κατά την εφαρμογή της μεθόδου των διαδοχικών επαναλήψεων τα υπολογιζόμενα δυναμικά των κόμβων εξαρτώνται από το μέγεθος του πλέγματος
- Όσο πιο μικρές είναι οι διαστάσεις του πλέγματος τόσο πιο ακριβής είναι ο υπολογισμός του δυναμικού, αλλά και πιο χρονοβόρα η υπολογιστική διαδικασία

Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM)

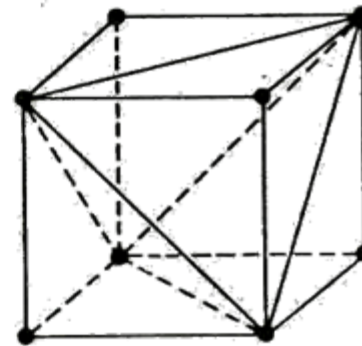
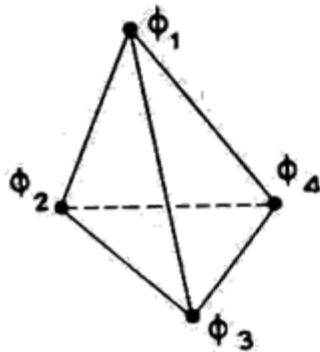
- Παρόμοια με τη μέθοδο των διαδοχικών επαναλήψεων
- Η επιφάνεια, ή, αντίστοιχα ο όγκος, στην/ον οποία/ον εκτείνεται το πεδίο καλύπτεται με πεπερασμένα τρίγωνα ή, αντίστοιχα, τετράεδρα στοιχεία.



- Οι κρίσιμες περιοχές καλύπτονται με πεπερασμένα στοιχεία μικρότερων διαστάσεων

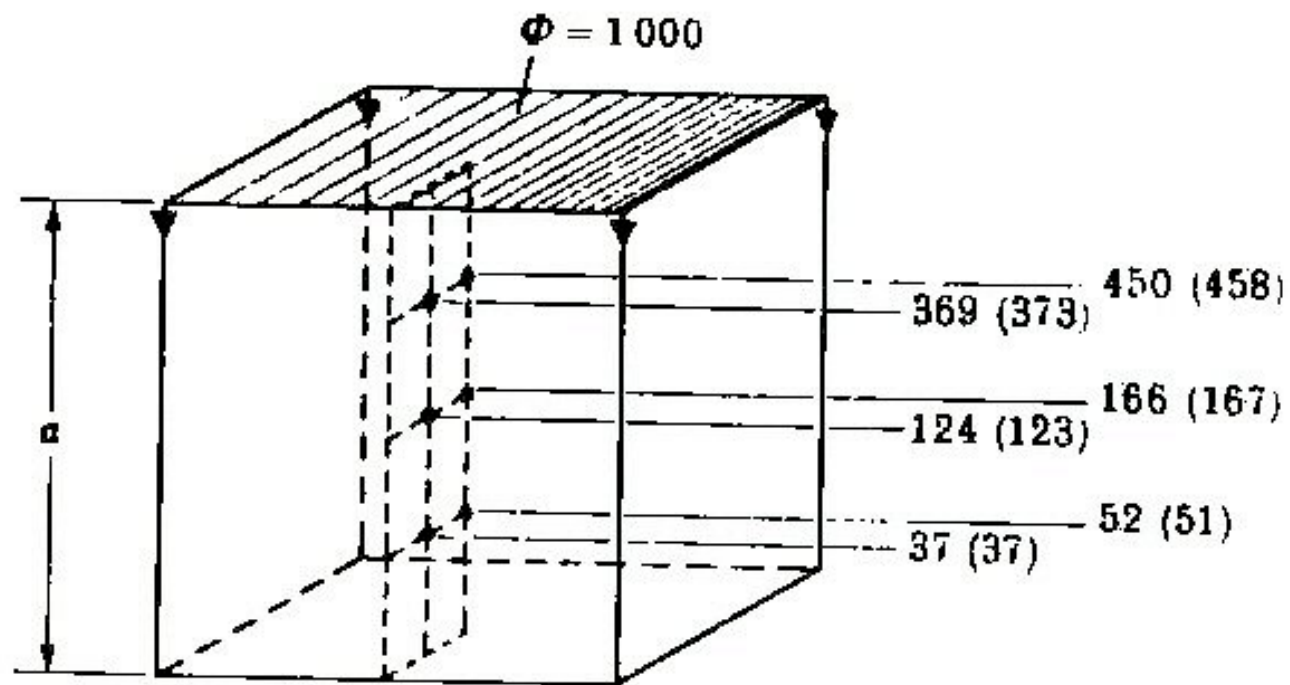
Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (FEM)

- Για την επίλυση τρισδιάστατων προβλημάτων τα πεπερασμένα στοιχεία που χρησιμοποιούνται είναι τετράεδρα.



- Χρησιμοποιείται η εξίσωση Poisson και πρέπει να ικανοποιούνται οι οριακές (δεδομένες συνθήκες) και η συνάρτηση του χωρητικού φορτίου.
- Συνάρτηση ελαχιστοποίησης
- Προς διευκόλυνση των υπολογισμών μπορούν να χρησιμοποιηθούν και εξάεδρα.

Παράδειγμα



Μειονεκτήματα διαφορικών μεθόδων

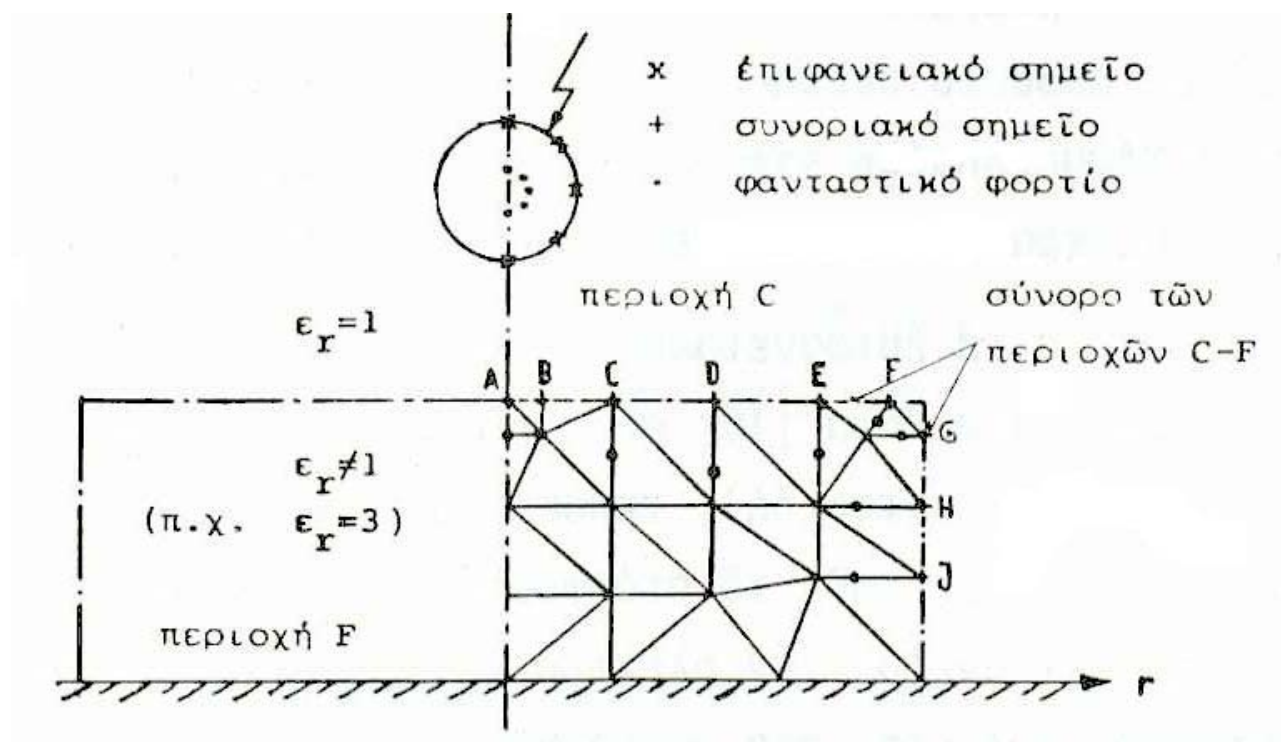
- Ακατάλληλες για μη κλειστά πεδία
- Δεν δίνουν αναλυτική έκφραση των δυναμικών και των εντάσεων

Υβριδική μέθοδος

- Συνδυασμός των μεθόδων των πεπερασμένων στοιχείων (FEM) και των ισοδυνάμων φορτίων (CSM). Υπάρχουν δύο παραλλαγές:
 - Ευθεία μέθοδος
 - Μέθοδος διαδοχικών διορθώσεων
- Ο χώρος χωρίζεται σε 2 περιοχές:
 - Περιοχή C: Εφαρμόζεται η μέθοδος των ισοδυνάμων φορτίων.
 - Περιοχή F: Εφαρμόζεται η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων.
 - Το δυναμικό Φ και η ένταση του πεδίου E δεν θα πρέπει να παρουσιάζουν ασυνέχειες στο σύνορο των δύο περιοχών.

Ευθεία μέθοδος (1)

Παράδειγμα: Σφαίρα – Γειωμένη πλάκα



Ευθεία μέθοδος (2)

Ζητούνται:

- $(n_C + n_B)$ φορτία κατά μέτρο
- $(n_B + n_F)$ δυναμικά

Εξισώσεις:

- n_C εξισώσεις γιατί $\Phi_{\text{ηλεκτροδίου}} = \text{γνωστό}$
- n_F εξισώσεις για τα δυναμικά των κόμβων βάσει της συνθήκης ελαχιστοποίησης της αποθηκευμένης ενέργειας στην περιοχή F
- $2 n_B$ εξισώσεις λόγω των συνθηκών συνέχειας του δυναμικού Φ και της έντασης του πεδίου E στα n_B συνοριακά σημεία

Ευθεία μέθοδος (3)

- Μπορούν να υπολογιστούν ηλεκτρικά πεδία, στα οποία εμφανίζεται χωρητική και ωμική κατανομή δυναμικού, δηλ. ηλεκτρικά πεδία που εκτείνονται σε αγώγιμες ή ημιαγώγιμες περιοχές .
- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν μιγαδικά φορτία, δυναμικά και πεδιακές εντάσεις
- Οι αγώγιμες ζώνες θα περιοχές θα πρέπει να εντάσσονται στην περιοχή F. Τότε οι ηλεκτρικές ιδιότητες περιγράφονται από την:

$$\dot{\epsilon} = \epsilon_0 \epsilon_r - j \frac{k}{\omega}$$

Μέθοδος των διαδοχικών διορθώσεων

Η μέθοδος είναι κατάλληλη για τις περιπτώσεις υπολογισμού πεδίων, στα οποία η αλληλεπίδραση των περιοχών F και C είναι μικρή.

- 1^ο Βήμα: Εφαρμόζεται η μέθοδος των ισοδυνάμων φορτίων (CSM) και στις δύο περιοχές.
- 2^ο Βήμα: Υπολογίζονται το δυναμικό Φ και η ένταση του πεδίου E στην περιοχή F μέσω της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων (FEM). Αρχική συνθήκη: $\Phi_{\text{ορίου}}$ που υπολογίστηκε με CSM. Έλεγχος απόκλισης των $E_{N,\text{CSM}}$ και $E_{N,\text{FEM}}$.
- 3^ο Βήμα: Το πεδίο υπολογίζεται μόνο στην περιοχή C με τη μέθοδο των ισοδυνάμων φορτίων. Αρχική συνθήκη: $E_{N,\text{FEM}}$ που υπολογίστηκε στο προηγούμενο βήμα.

Πραγματοποιείται διαδοχική εφαρμογή των μεθόδων CSM και FEM μέχρι ικανοποίησης της συνθήκης:

$$\left| \frac{E_{N,\text{CSM}} - E_{N,\text{FEM}}}{E_{N,\text{FEM}}} \right| \leq \alpha\%$$

Πλεονεκτήματα υβριδικής μεθόδου

- Μπορούν να υπολογιστούν πεδία μέχρι το άπειρο
- Εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε αριθμό διηλεκτρικών
- Εφαρμόζεται σε μη τέλεια μονωτικά υλικά
- Απαιτείται λίγος υπολογιστικός χρόνος