Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών &
Μηχανικών Υπολογιστών
Εργαστήριο Υψηλών Τάσεων

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΥΨΗΛΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

(Σύμμορφη απεικόνιση)

Σύμμορφη απεικόνιση

Γενικές αρχές της μεθόδου

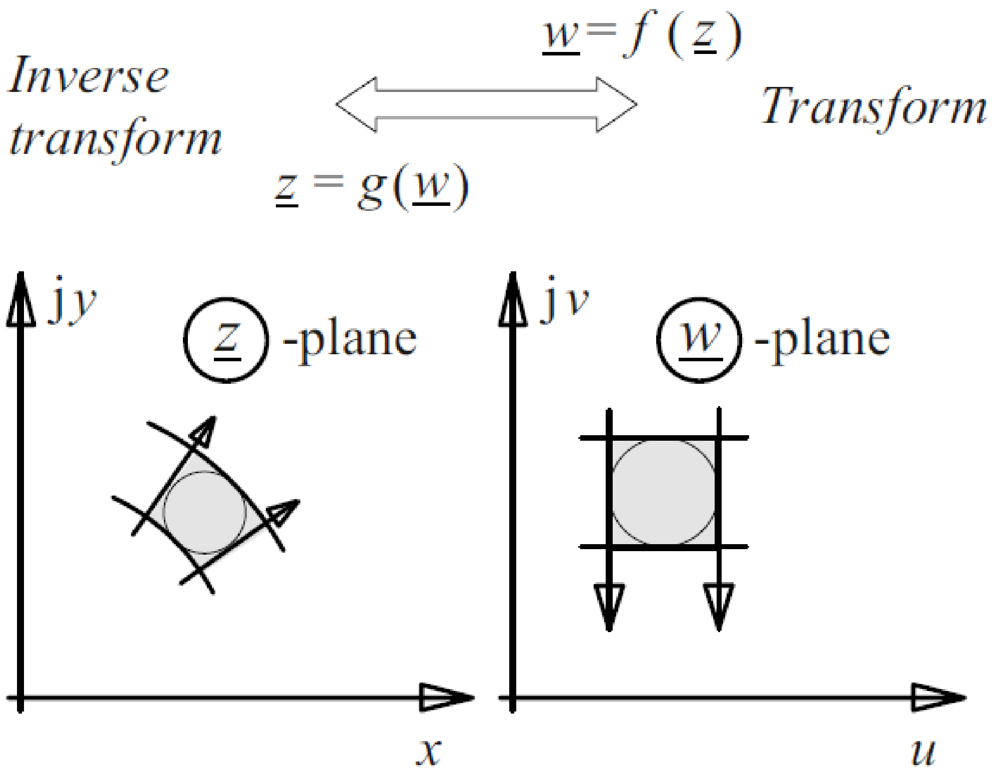
- Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο σε δισδιάστατα πεδία (δηλαδή πεδία με σφαιρική ή κυλινδρική συμμετρία).

  $\left\{ \text{Δηλαδή ισχύει η εξίσωση Laplace ως: } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \right\}$
- Ευρεία εφαρμογή σε διατάξεις δύο ηλεκτροδίων (π.χ. σπινθηριστές).
- Αφετηρία της μεθόδου αποτελεί το ηλεκτρικό πεδίο δύο παραλλήλων επιπέδων ηλεκτροδίων απείρου εκτάσεως.
- Ψάχνουμε κατάλληλο μετασχηματισμό που να απεικονίσει τον υπό μελέτη σπινθηριστή (π.χ. σφαιρικό) σε σπινθηριστή επιπέδων πλακών.

Σύμμορφη απεικόνιση

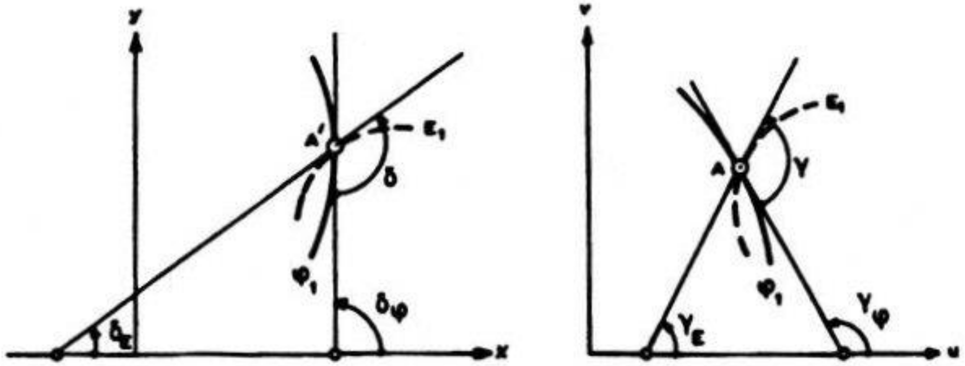
Βασική ιδέα της μεθόδου

- είναι να μετασχηματίσουμε το επίπεδο x,y (μαζί με μία δεδομένη πολύπλοκη διάταξη ηλεκτροδίων) σε ένα επίπεδο u,v, όπου η διάταξη ηλεκτροδίων μπορεί να υπολογιστεί εύκολα.



Ορισμός

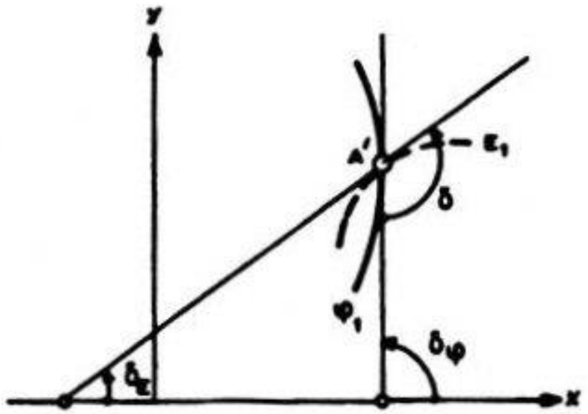
Σύμμορφη απεικόνιση από ένα επίπεδο σε ένα άλλο καλείται η απεικόνιση κατά την οποία διατηρείται σταθερό το μέτρο της γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ δύο τυχουσών καμπυλών, οι οποίες τέμνονται σε δεδομένο σημείο.

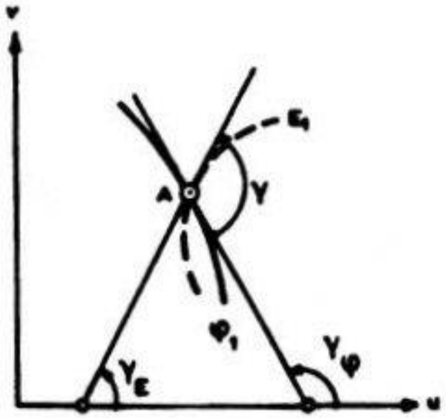


$$|\gamma| = |\delta|$$

Κατά τη σύμμορφη απεικόνιση λαμβάνει χώρα μετασχηματισμός μηκών.

Μετάβαση μέσω μετασχηματισμού συντεταγμένων από το επίπεδο (x,y) στο (u,v)





$$u = u(x,y) \qquad x = x(u,v)$$

$$v = v(x,y) \qquad y = y(u,v)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

ΛΥΣΗ: Οποιαδήποτε w=f(z)=f(x+jy)=u(x,y)+jv(x,y)

Ικανή και αναγκαία συνθήκη

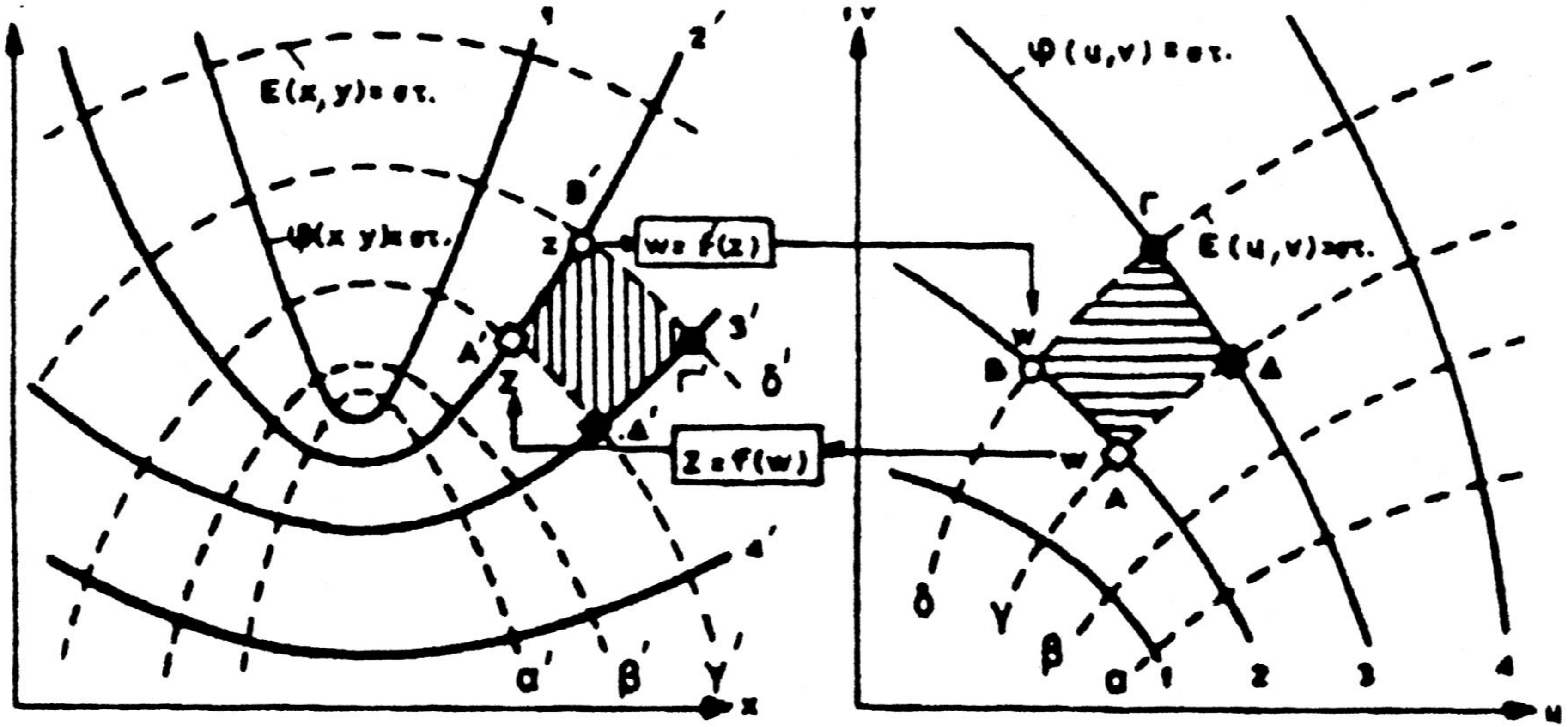
Για να είναι μία απεικόνιση σύμμορφη πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann (συνθήκη καθετότητας)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ή

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

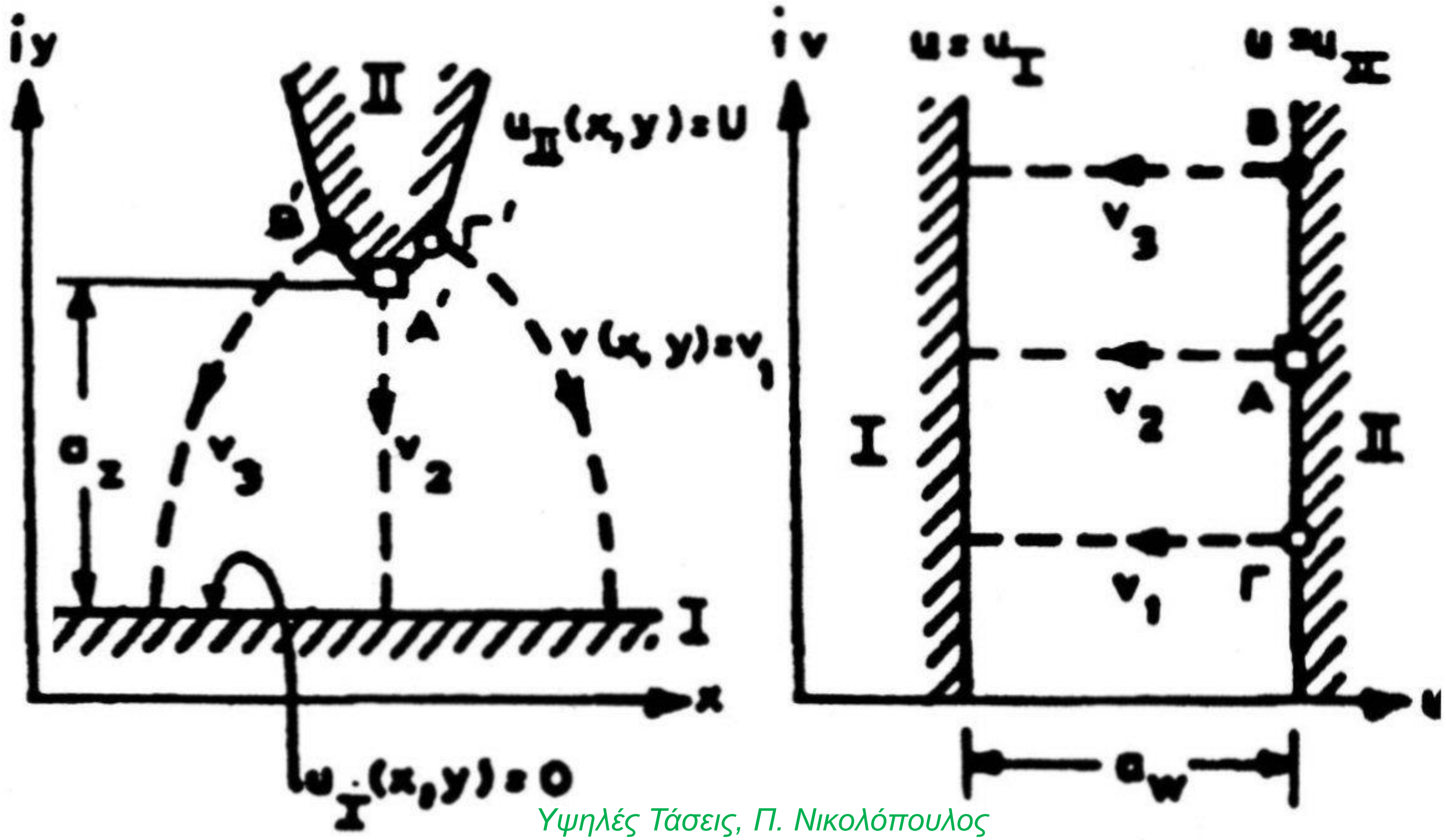
Σύμμορφη απεικόνιση του μιγαδικού επιπέδου w=u+jv στο μιγαδικό επίπεδο z=x+jy και αντιστρόφως



Μιγαδικό επίπεδο z=x+jy Μιγαδικό επίπεδο w=u+jv

Παράδειγμα

Σπινθηριστής (ακίδα (II) – πλάκα (I)) μετασχηματίζεται σε σπινθηριστή επιπέδων πλακών (I-II)



Τύποι εκφράσεως της πεδιακής έντασης (A-C)

Σύστημα v/u

όπου v: ισοδυναμικές επιφάνειες και u: δυναμικές γραμμές

Τύπος Α

$$\dot{E}_z^* = E_x - jE_y = j\frac{dw}{dz} = \frac{j}{\frac{dz}{dw}}$$

Τύπος Β

$$\dot{E}_z = -\mathrm{grad}(v) = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

Τύπος C

$$\left|\dot{E}_z^*\right| = \left|\dot{E}_z\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}}$$

Τύποι εκφράσεως της πεδιακής έντασης (D-F)

Σύστημα u/v

όπου u: ισοδυναμικές επιφάνειες και v: δυναμικές γραμμές)

Τύπος D
$$\dot{E}_z^* = E_x - jE_y = -\frac{dw}{dz} = \frac{-1}{\frac{dz}{dw}}$$

Τύπος E
$$\dot{E}_z = -\mathrm{grad}(u) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Τύπος F
$$\left|\dot{E}_z^*\right| = \left|\dot{E}_z\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}}$$

Πεδιακή ένταση (E_w) του ομογενούς πεδίου στο w

v/u

$\left|\dot{E}_z\right|$

- Τύπος A
- Τύπος B
- Τύπος C

$$E_w = \frac{U}{m\left(v_{II} - v_I\right)}$$

m: Κλίμακα μηκών σε cm/μονάδα του v

u/v

$\left|\dot{E}_z\right|$

- Τύπος D (A*j)
- Τύπος E (v→u)
- Τύπος F (v→u)

$$E_w = \frac{U}{m\left(u_{II} - u_I\right)}$$

m: Κλίμακα μηκών σε cm/μονάδα του u

$$E_{z\pi} = \left|\dot{E}_z\right| \cdot E_w$$

Θεώρημα του αμετάβλητου

Κατά τη σύμμορφη απεικόνιση ενός ηλεκτρικού πεδίου σε ένα άλλο παραμένουν αμετάβλητα:

- Η ηλεκτρική ενέργεια
- Η χωρητικότητα
- Το ηλεκτρικό φορτίο

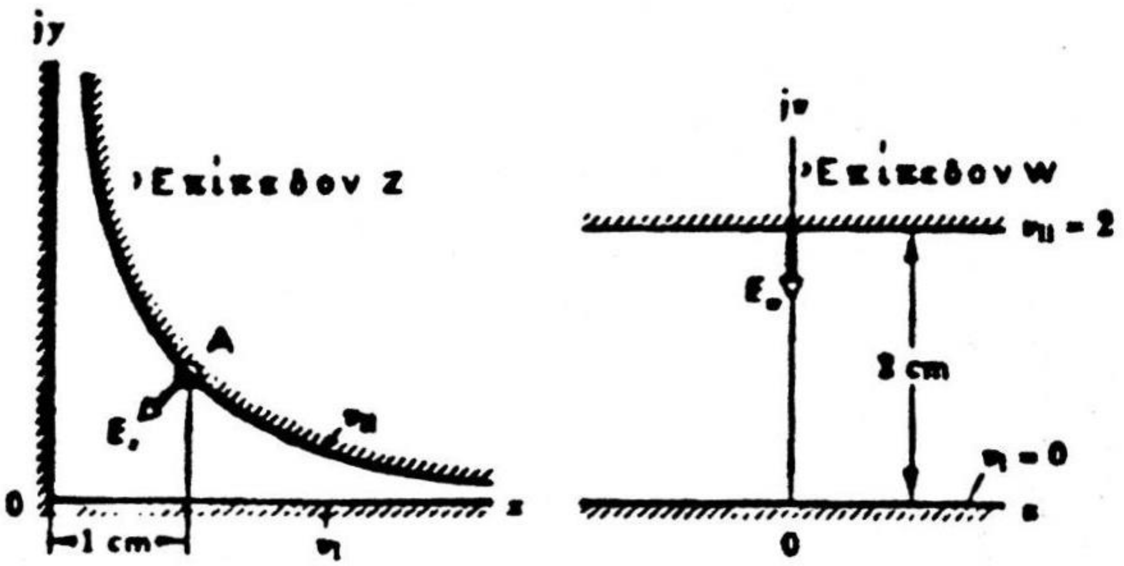
Μεθοδολογία

- Αφετηρία η εξίσωση w=f(z)
- Επιλογή συστήματος v/u ή u/v
- Εύρεση E_w (πεδιακή ένταση ομογενούς πεδίου)
- Υπολογισμός του μέτρου της πεδιακής έντασης $\left|\dot{E}_z\right|$ (αδιάστατο μέγεθος) με χρήση κατάλληλου τύπου (A-F).
- Υπολογισμός της πραγματικής πεδιακής έντασης:

$$E_{z\pi} = \left|\dot{E}_z\right| \cdot E_w$$

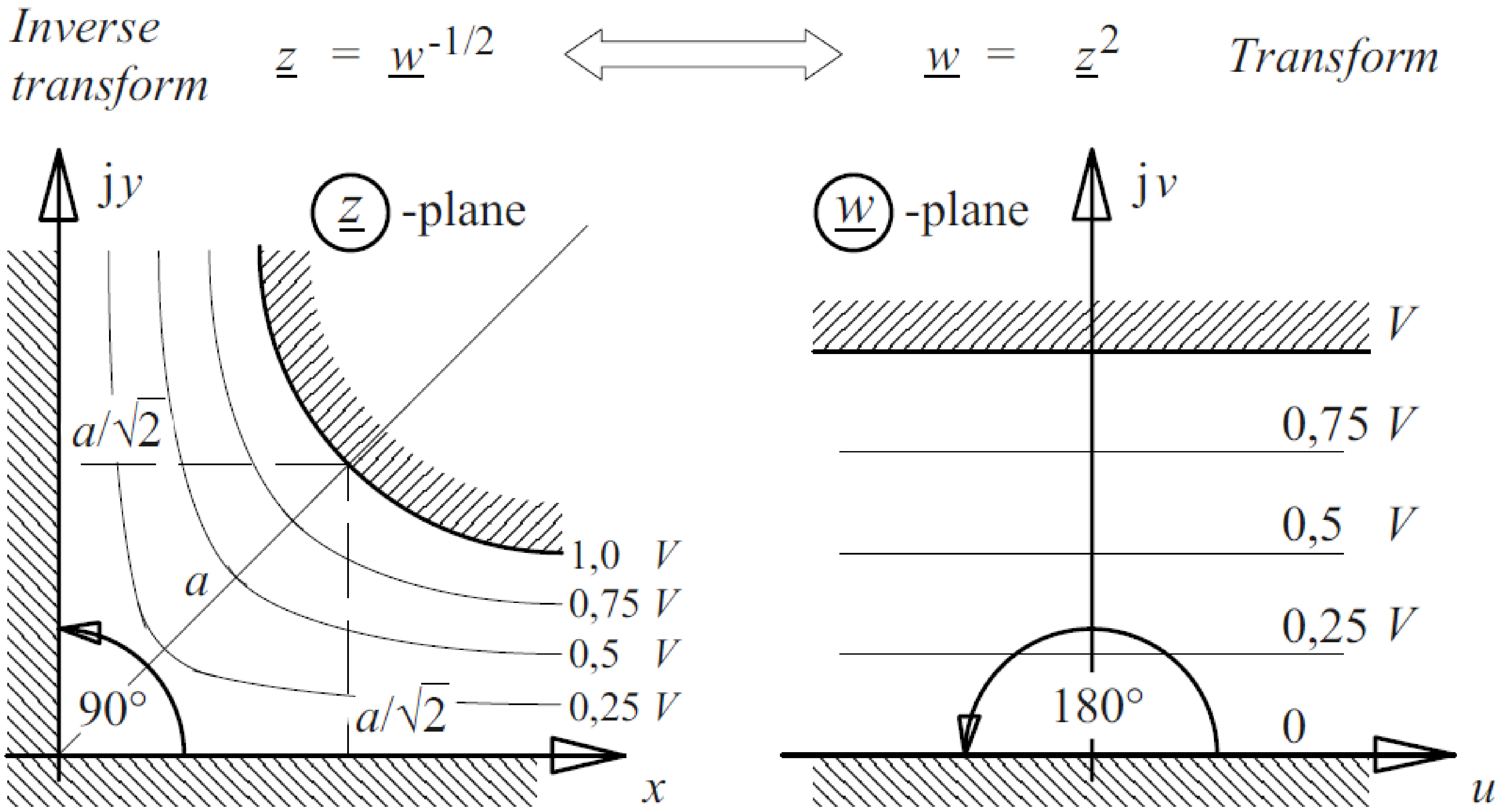
Εφαρμογή 1

Δίνεται συνάρτηση απεικόνισης $z = \sqrt{w}$. Μέσω αυτής μετασχηματίζεται ο πυκνωτής επιπέδων πλακών, απείρου εκτάσεως, διακένου v_{II}-v_{I}=2-0=2 (α_w=2cm), στη διάταξη υπερβολής-ηλεκτροδίου γωνίας στην οποία επιβάλλεται τάση 100kV. Ποια η πεδιακή ένταση στο σημείο Α (x=y=1).



Σύστημα v/u

Εφαρμογή 1



High Voltage Engineering, A. Küchler

Εφαρμογή 1 (Α)

Σύστημα v/u

Τύπος Α

$$\dot{E}_z^* = E_x - jE_y = j\frac{dw}{dz} = \frac{j}{\frac{dz}{dw}}$$

$$\dot{E}_z = i\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{w}}} = i2\sqrt{w} = i2z = i2(x+iy) = -2(y-ix)$$

$$\left|\dot{E}_z\right| = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{2}$$

$$E_{z\pi} = \left|\dot{E}_z\right| \cdot E_w = 2\sqrt{2}\frac{100kV}{2cm} = 141.4\frac{kV}{cm}$$

Εφαρμογή 1 (B)

Σύστημα v/u

Τύπος B $\dot{E}_z = -\mathrm{grad}(v) = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

$$w = z^2 \quad \rightarrow \quad u + iv = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$$

$$u = (x^2 - y^2), \quad v = 2xy$$

$$\dot{E}_z = -\mathrm{grad}v = -2(y + ix)$$

$$\left|\dot{E}_z\right| = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2}$$

$$E_{z\pi} = \left|\dot{E}_z\right| \cdot E_w = 2\sqrt{2}\,\frac{100\mathrm{kV}}{2\mathrm{cm}} = 141.4\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}$$

Εφαρμογή 1 (C)

Σύστημα v/u

Τύπος C

$$\left|\dot{E}_z^*\right| = \left|\dot{E}_z\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}}$$

Επίλυση των $u = \left(x^2 - y^2\right), \quad v = 2xy$ ως προς x, y

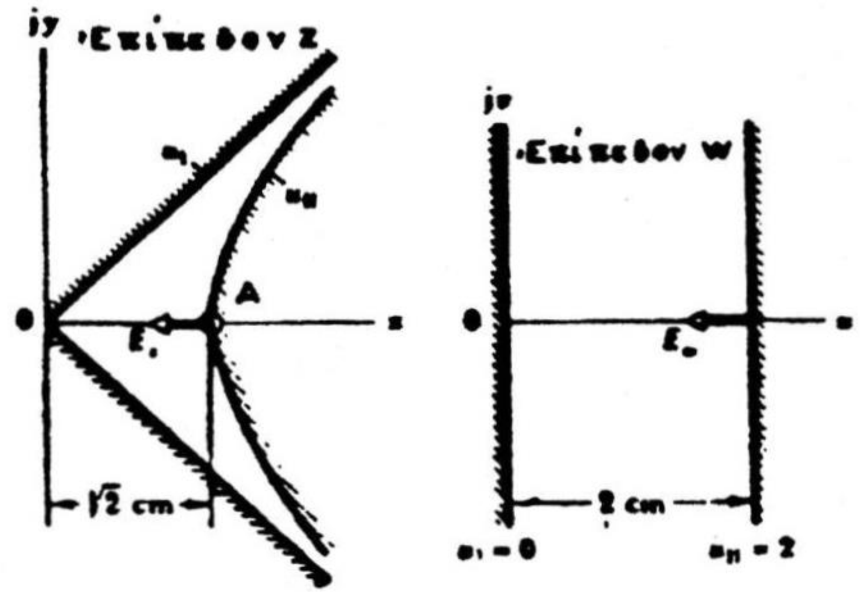
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u}$$

$$\left|\dot{E}_z\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2}} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2}$$

$$E_{z\pi} = \left|\dot{E}_z\right| \cdot E_w = 2\sqrt{2}\,\frac{100\text{kV}}{2\text{cm}} = 141.4\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$

Εφαρμογή 2

Δίνεται συνάρτηση απεικόνισης $z = \sqrt{w}$. Μέσω αυτής μετασχηματίζεται ο πυκνωτής επιπέδων πλακών, απείρου εκτάσεως, διακένου u_{II}-u_{I}=2-0=2 (α_{w}=2cm), στη διάταξη υπερβολής-ηλεκτροδίου γωνίας, στην οποία επιβάλλεται τάση 100kV. Ποια η πεδιακή ένταση στο σημείο Α (x=$\sqrt{2}$, y=0).



Σύστημα u/v

Εφαρμογή 2 (D)

Σύστημα u/v

Τύπος D $\dot{E}_z^* = E_x - jE_y = -\dfrac{dw}{dz} = \dfrac{-1}{\dfrac{dz}{dw}}$

$$\dot{E}_z = -\frac{1}{\dfrac{1}{2\sqrt{w}}} = -2\sqrt{w} = -2\left(x + iy\right)$$

$$\left|\dot{E}_z\right| = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2}$$

$$E_{z\pi} = \left|\dot{E}_z\right| \cdot E_w = 2\sqrt{2}\,\frac{100\text{kV}}{2\text{cm}} = 141.4\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$

Εφαρμογή 2 (Ε)

Σύστημα u/v

Τύπος Ε

$$\dot{E}_z = -\mathrm{grad}(u) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$u = \left(x^2 - y^2\right)$$

$$\dot{E}_z = E_x + iE_y = -\mathrm{grad}u = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -2\left(x + iy\right)$$

$$\left|\dot{E}_z\right| = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2}$$

$$E_{z\pi} = \left|\dot{E}_z\right| \cdot E_w = 2\sqrt{2}\,\frac{100\mathrm{kV}}{2\mathrm{cm}} = 141.4\,\frac{\mathrm{kV}}{\mathrm{cm}}$$

Εφαρμογή 2 (F)

Σύστημα u/v

Τύπος F

$$\left|\dot{E}_z^*\right| = \left|\dot{E}_z\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}}$$

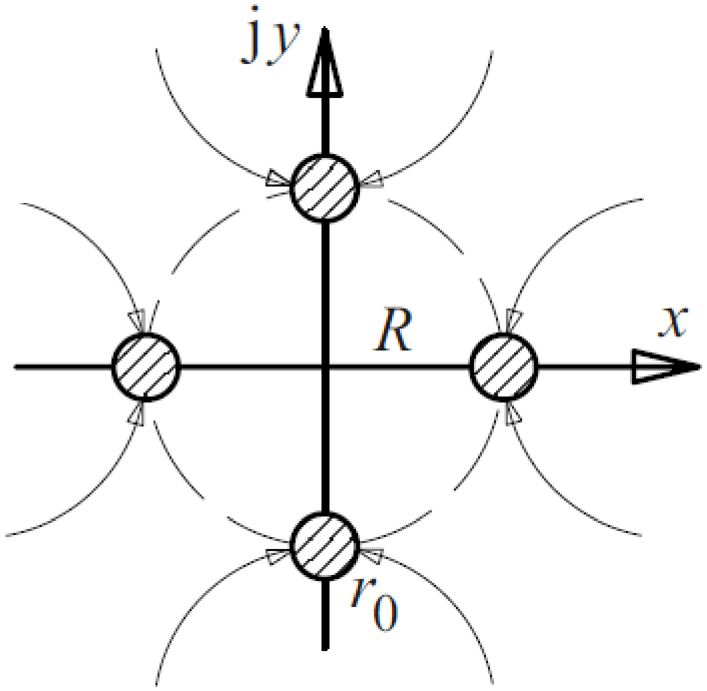
$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} + u} \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{u^2 + v^2} - u}$$

$$\left|\dot{E}_z\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}} = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2}$$

$$E_{z\pi} = \left|\dot{E}_z\right| \cdot E_w = 2\sqrt{2}\,\frac{100\text{kV}}{2\text{cm}} = 141.4\,\frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$

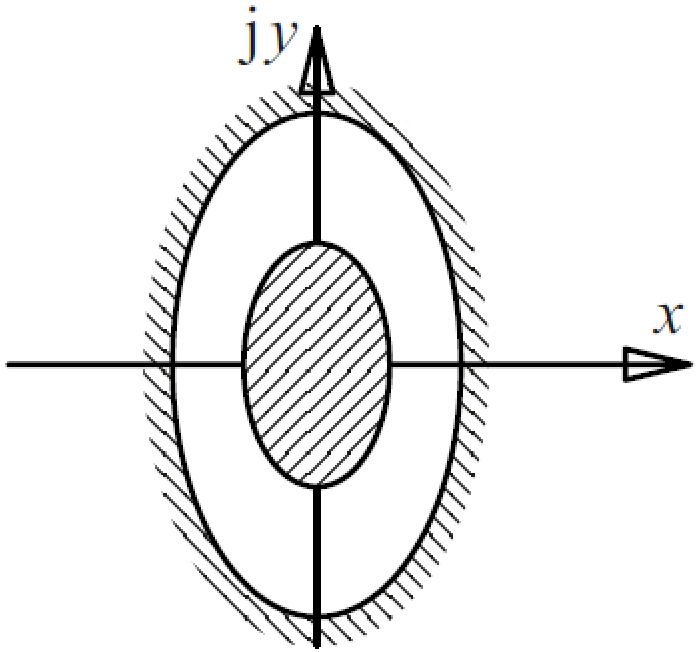
Παραδείγματα διδιάστατων πεδίων που υπολογίζονται με σύμμορφη απεικόνιση

Σύστημα πολλαπλών αγωγών



$$w = c \ln z$$

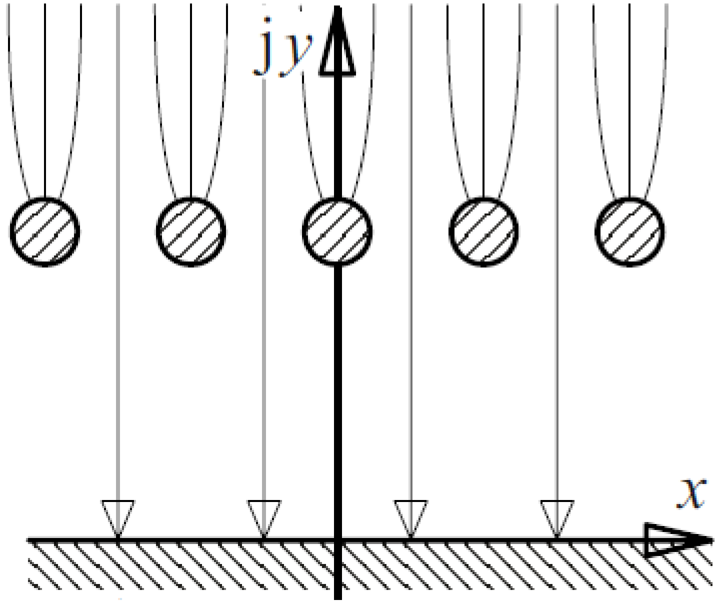
Ελλειπτικοί κύλινδροι



$$w = c_1 \operatorname{ar}\cosh\left(z / c_2 \right)$$

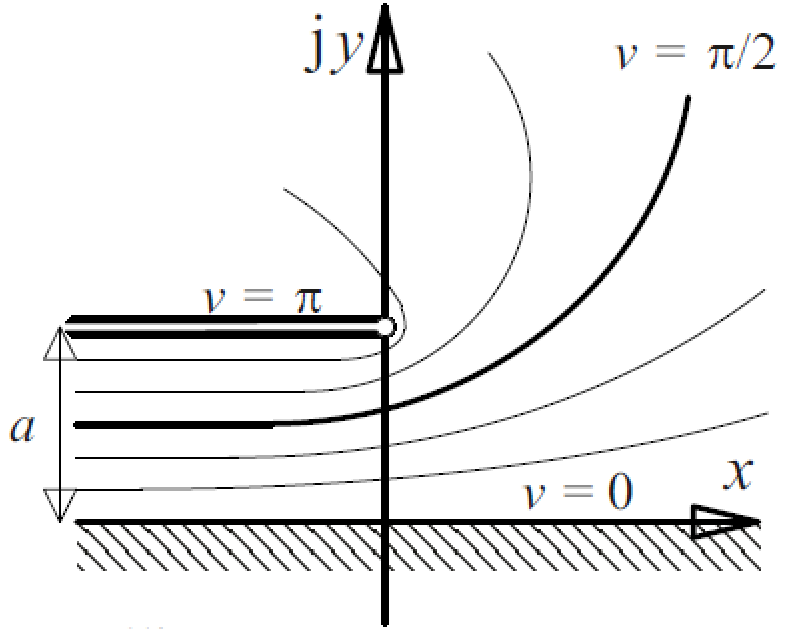
Παραδείγματα διδιάστατων πεδίων που υπολογίζονται με σύμμορφη απεικόνιση

Σχάρα προστασίας
(screen grid)



$$w = c_1 \ln\left(2 \sin c_2 z\right)$$

Πεδίο στα άκρα πυκνωτή παραλλήλων πλακών (Rogowski)



$$z = \frac{\alpha}{\pi}\left(w + 1 + e^{w}\right)$$