



Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Σχολή Ηλεκτρολόγων Μηχανικών &
Μηχανικών Υπολογιστών
Τομέας Ηλεκτρικής Ισχύος
Εργαστήριο Υψηλών Τάσεων



ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΥΨΗΛΩΝ ΤΑΣΕΩΝ

(Σύμμορφη απεικόνιση)

Σύμμορφη απεικόνιση

Γενικές αρχές της μεθόδου

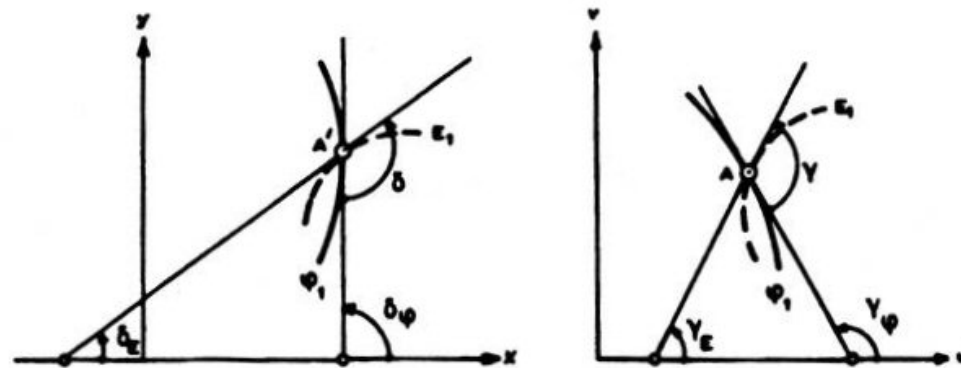
- Η μέθοδος μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο σε δισδιάστατα πεδία (δηλαδή πεδία με σφαιρική ή κυλινδρική συμμετρία).

$$\left\{ \text{Δηλαδή ισχύει η εξίσωση Laplace ως: } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \right\}$$

- Ευρεία εφαρμογή σε διατάξεις δύο ηλεκτροδίων (π.χ. σπινθηριστές).
- Αφετηρία της μεθόδου αποτελεί το ηλεκτρικό πεδίο δύο παραλλήλων επιπέδων ηλεκτροδίων απείρου εκτάσεως.
- Ψάχνουμε κατάλληλο μετασχηματισμό που να απεικονίσει τον υπό μελέτη σπινθηριστή (π.χ. σφαιρικό) σε σπινθηριστή επιπέδων πλακών.

Ορισμός

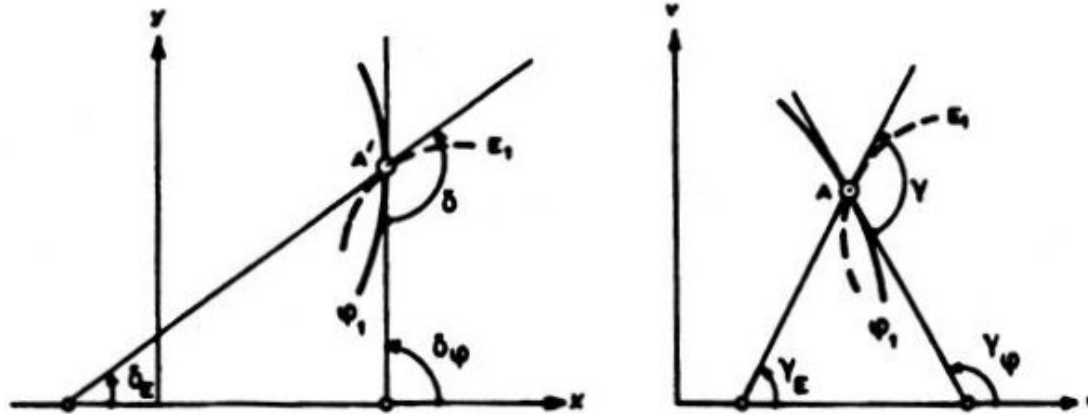
Σύμμορφη απεικόνιση από ένα επίπεδο σε ένα άλλο καλείται η απεικόνιση κατά την οποία διατηρείται σταθερό το μέτρο της γωνίας που σχηματίζεται μεταξύ δύο τυχουσών καμπυλών, οι οποίες τέμνονται σε δεδομένο σημείο.



$$|\gamma| = |\delta|$$

Κατά τη σύμμορφη απεικόνιση λαμβάνει χώρα μετασχηματισμός μηκών.

Μετάβαση μέσω μετασχηματισμού συντεταγμένων από το επίπεδο (x,y) στο (u,v)



$$u = u(x, y)$$

$$v = v(x, y)$$

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

ΛΥΣΗ: Οποιαδήποτε $w=f(z)=f(x+jy)=u(x,y)+jv(x,y)$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη

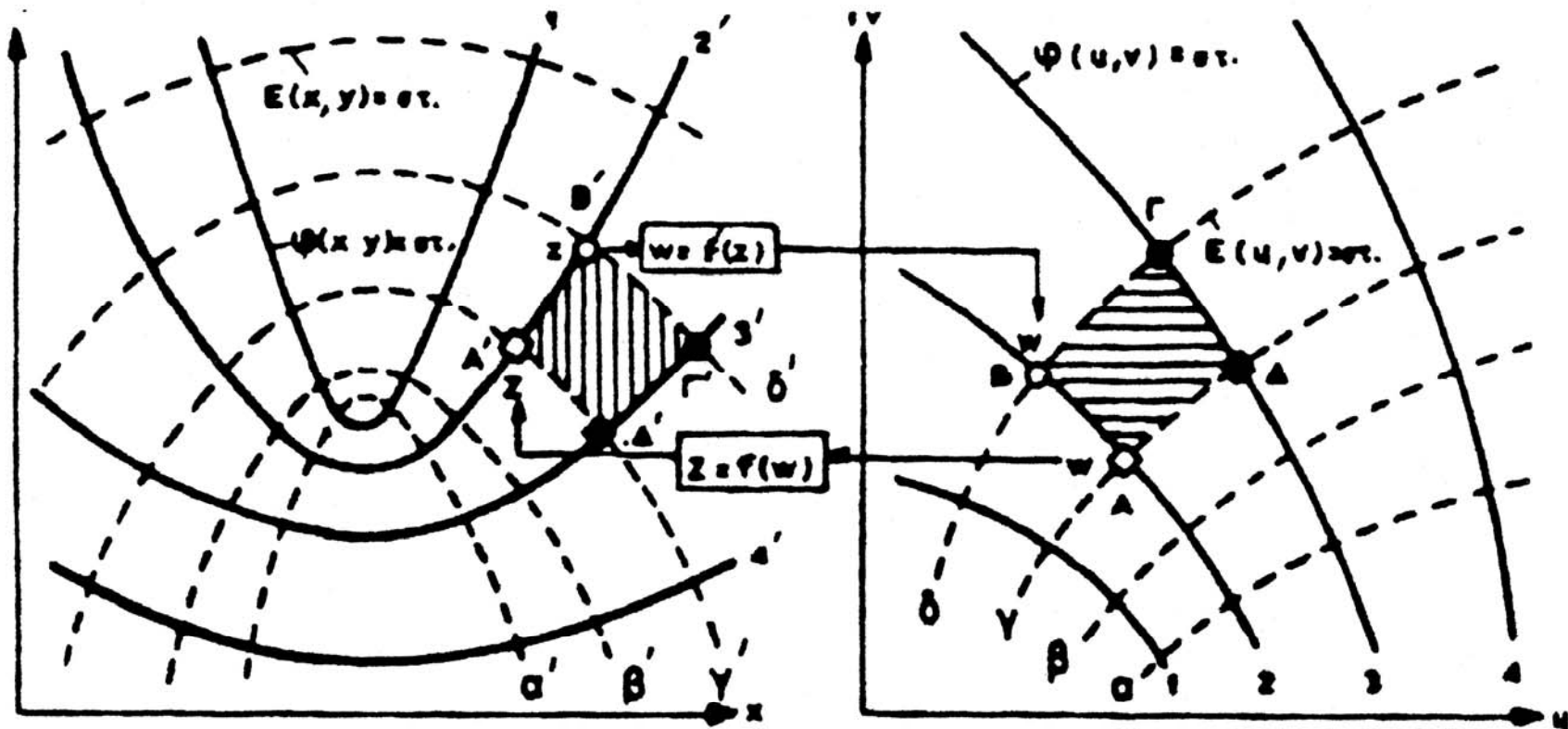
Για να είναι μία απεικόνιση σύμμορφη πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann (συνθήκη καθετότητας)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ή

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Σύμμορφη απεικόνιση του μιγαδικού επιπέδου $w=u+jv$ στο μιγαδικό επίπεδο $z=x+jy$ και αντιστρόφως

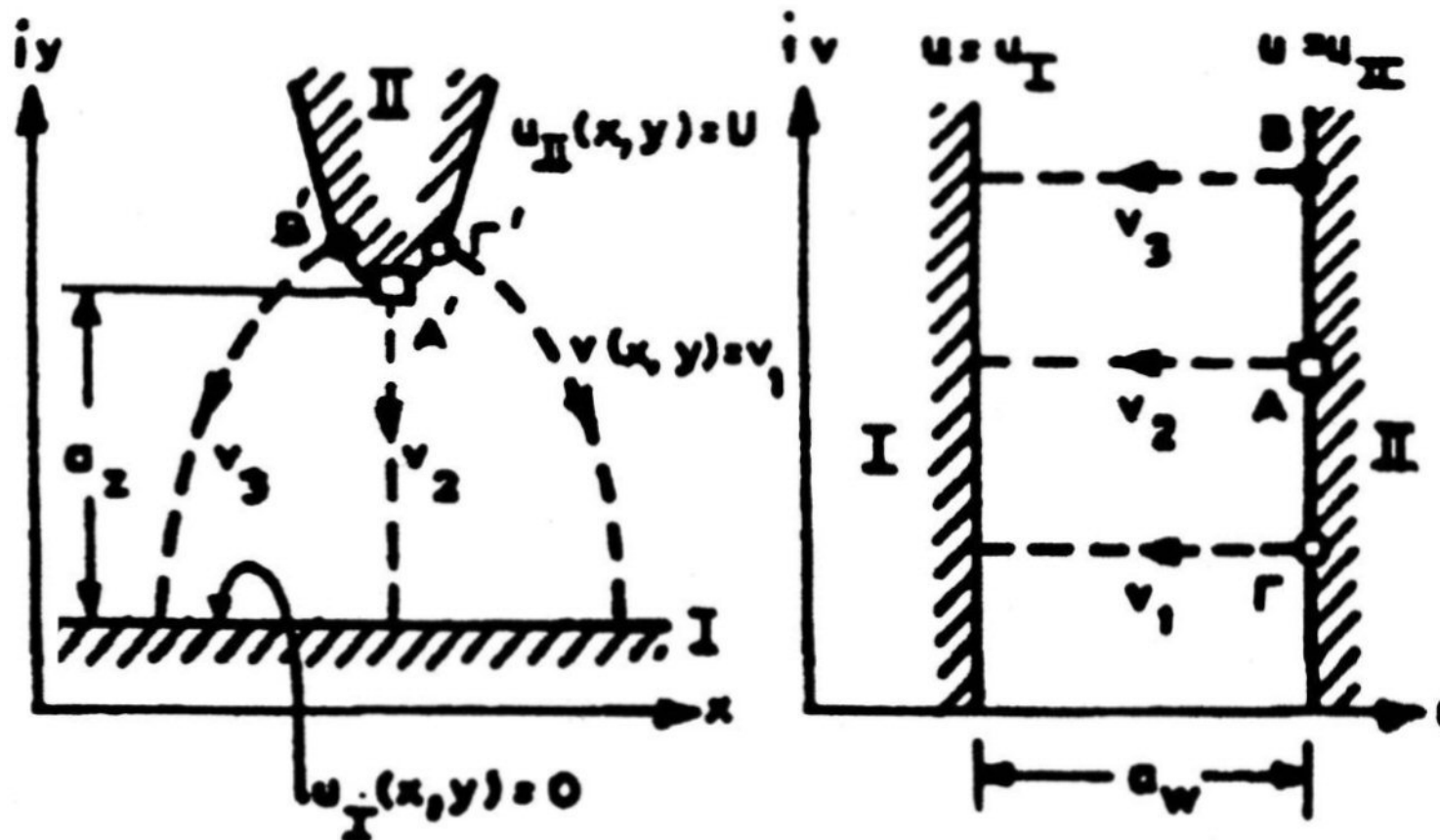


Μιγαδικό επίπεδο $z=x+jy$

Μιγαδικό επίπεδο $w=u+jv$

Παράδειγμα

Σπινθηριστής (ακίδα (II) – πλάκα (I)) μετασχηματίζεται σε σπινθηριστή επιπέδων πλακών (I-II)



Τύποι εκφράσεως της πεδιακής έντασης (A-C)

Σύστημα v/u

όπου v: ισοδυναμικές επιφάνειες και u: δυναμικές γραμμές

Τύπος A
$$\dot{E}_z^* = E_x - jE_y = j \frac{dw}{dz} = \frac{j}{\frac{dz}{dw}}$$

Τύπος B
$$\dot{E}_z = -\text{grad}(v) = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Τύπος C
$$|\dot{E}_z^*| = |\dot{E}_z| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2}}$$

Τύποι εκφράσεως της πεδιακής έντασης (D-F)

Σύστημα u/v

όπου u: ισοδυναμικές επιφάνειες και v: δυναμικές γραμμές)

Τύπος D

$$\dot{E}_z^* = E_x - jE_y = -\frac{dw}{dz} = \frac{-1}{\frac{dz}{dw}}$$

Τύπος E

$$\dot{E}_z = -\text{grad}(u) = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Τύπος F

$$|\dot{E}_z^*| = |\dot{E}_z| = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2}}$$

Πεδιακή ένταση (E_w) του ομογενούς πεδίου στο w

- v/u
- $|\dot{E}_z|$
- Τύπος A
 - Τύπος B
 - Τύπος C

$$E_w = \frac{U}{m(v_{II} - v_I)}$$

m : Κλίμακα μηκών σε
cm/μονάδα του v

- u/v
- $|\dot{E}_z|$
- Τύπος D (A^*j)
 - Τύπος E ($v \rightarrow u$)
 - Τύπος F ($v \rightarrow u$)

$$E_w = \frac{U}{m(u_{II} - u_I)}$$

m : Κλίμακα μηκών σε
cm/μονάδα του u

$$E_{z\pi} = |\dot{E}_z| \cdot E_w$$

Θεώρημα του αμετάβλητου

Κατά τη σύμμορφη απεικόνιση ενός ηλεκτρικού πεδίου σε ένα άλλο παραμένουν αμετάβλητα:

- Η ηλεκτρική ενέργεια
- Η χωρητικότητα
- Το ηλεκτρικό φορτίο

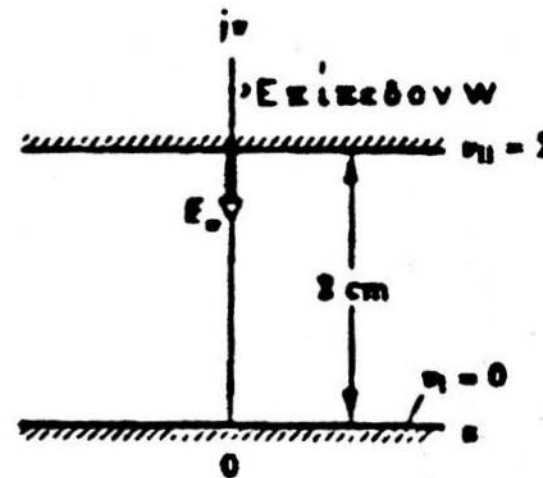
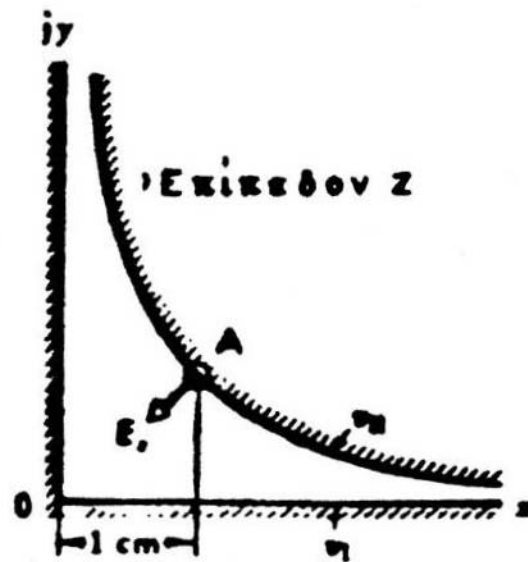
Μεθοδολογία

- Αφετηρία η εξίσωση $w=f(z)$
- Επιλογή συστήματος v/u ή u/v
- Εύρεση E_w (πεδιακή ένταση ομογενούς πεδίου)
- Υπολογισμός του μέτρου της πεδιακής έντασης $|\dot{E}_z|$ (αδιάστατο μέγεθος) με χρήση κατάλληλου τύπου (A-F).
- Υπολογισμός της πραγματικής πεδιακής έντασης:

$$E_{z\pi} = |\dot{E}_z| \cdot E_w$$

Εφαρμογή 1

Δίνεται συνάρτηση απεικόνισης $z = \sqrt{w}$. Μέσω αυτής μετασχηματίζεται ο πυκνωτής επιπέδων πλακών, απείρου εκτάσεως, διακένου $v_{II}-v_I=2-0=2$ ($\alpha_w=2\text{cm}$), στη διάταξη υπερβολής-ηλεκτροδίου γωνίας στην οποία επιβάλλεται τάση 100kV . Ποια η πεδιακή ένταση στο σημείο A ($x=y=1$).

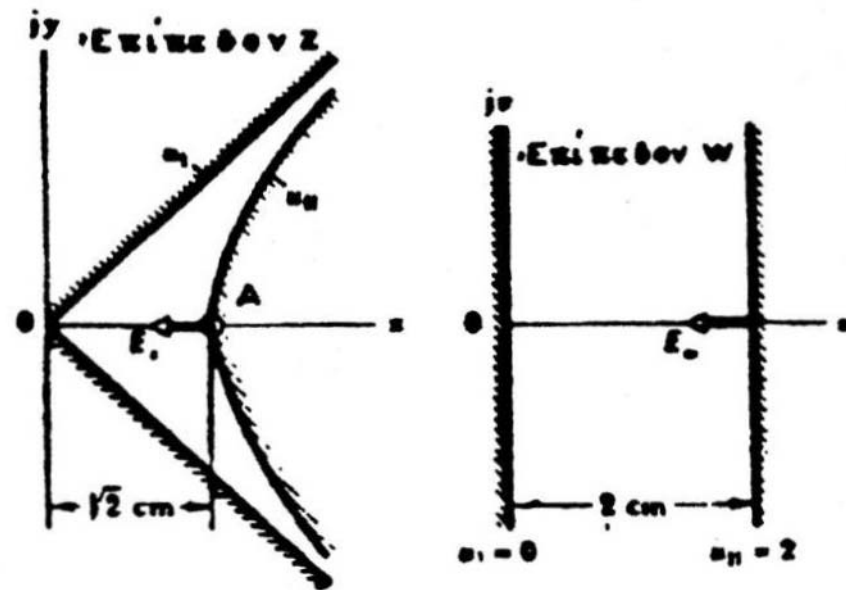


Σύστημα v/u

$$E_{z\pi} = |\dot{E}_z| \cdot E_w = 2\sqrt{2} \frac{100\text{kV}}{2\text{cm}} = 141.4 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$

Εφαρμογή 2

Δίνεται συνάρτηση απεικόνισης $z = \sqrt{w}$. Μέσω αυτής μετασχηματίζεται ο πυκνωτής επιπέδων πλακών, απείρου εκτάσεως, διακένου $u_{II}-u_I=2-0=2$ ($\alpha_w=2\text{cm}$), στη διάταξη υπερβολής-ηλεκτροδίου γωνίας, στην οποία επιβάλλεται τάση 100kV . Ποια η πεδιακή ένταση στο σημείο A ($x=\sqrt{2}$, $y=0$).



Σύστημα u/v

$$E_{z\pi} = |\dot{E}_z| \cdot E_w = 2\sqrt{2} \frac{100\text{kV}}{2\text{cm}} = 141.4 \frac{\text{kV}}{\text{cm}}$$