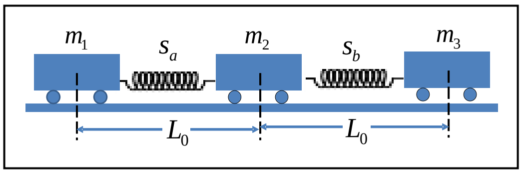
Ε.Μ.Π. – Σχολή Πολιτικών Μηχανικών
Μάθημα «Φυσική (Ταλαντώσεις και Κύματα)», 2014-15
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ (Διάρκεια 2 h 30 min**)**

Η. Σ. Ζουμπούλης, Γ. Σ. Ράπτης — Αθήνα, 1/9/2015

Θέμα 1. Το ελατήριο του καθίσματος αυτοκινήτου συμπιέζεται κατά 3,40 cm όταν καθίσει ο οδηγός πριν την εκκίνηση, (η μάζα του καθίσματος θεωρείται αμελητέα)
(α) Αν το αυτοκίνητο συναντήσει μικρή ανωμαλία κατά την κινησή του, να βρεθεί η συχνότητα ω_0 της ταλάντωσης καθίσματος-οδηγού, αν αγνοηθεί η απόσβεση.
(β) Ποιά πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή $\gamma_{\min}$ του συντελεστή απόσβεσης γ του καθίσματος ώστε ο οδηγός να μην εκτελέσει ταλαντωτική αλλά απεριοδική κίνηση; Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει ο οδηγός στην περίπτωση αυτή, αν $\gamma=\gamma_{\min}$, $x(t=0)=A$, $\upsilon(t=0)=0$; Βρείτε τη σχέση $x=x(t)$ και προσδιορίστε όλες τις παραμέτρους και τις σταθερές της κίνησης, συναρτήσει των ανωτέρω μεγεθών.
[Στο (β) περιγράφεται απλουστευμένα ο τρόπος λειτουργίας - και η σκοπιμότητα τοποθέτησης - των τεσσάρων αποσβεστήρων (“αμορτισέρ”) - ενός για κάθε τροχό - ενός αυτοκινήτου.]
(γ) Ποιός πρέπει να είναι ο ελάχιστος συντελεστής ποιότητας Q του ηλεκτρονικού κυκλώματος του ραδιοφώνου του αυτοκινήτου; Επιθυμούμε το ραδιόφωνο να συντονίζεται χωρίς συνακρόαση στις ραδιοφωνικές συχνότητες της ζώνης FM [δηλ., στις ραδιοσυχνότητες από 87,5 MHz έως 108,0 MHz]. Οι συχνότητες εκπομπής των πομπών των ραδιοσταθμών στη ζώνη των FM απέχουν κατά 0,4 MHz. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρήστε μία μέση συχνότητα ραδιοσταθμού $\nu_0=100$ MHz και εξετάστε την τιμή που πρέπει να έχει το “εύρος στο μισό του μεγίστου” (***F***ull ***W***idth at ***H***alf ***M***aximum = *FWHM*), $2\gamma = FWHM$ για να μην υπάρχει συνακρόαση γειτονικών σταθμών]. Δίνεται: g=10 m/s^2.



Θέμα 2. Τρία βαγόνια αμαξοστοιχίας, με μάζες m_1, m_2 και m_3, συνδέονται με ελατήρια σταθερών s_a και s_b, όπως στο σχήμα. Το σύστημα ακινητεί, με την απόσταση ανάμεσα στα κέντρα των βαγονιών να είναι ίση με L_0. Κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, δίνεται στιγμιαία ώθηση στο βαγόνι 1, η οποία του προσδίδει στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon_1(t=0)=\upsilon_{01}$.
(α) Θεωρήστε ένα στιγμιότυπο της κίνησης, κάποια χρονική στιγμή $t>0$, όταν το κέντρο κάθε βαγονιού έχει απομακρυνθεί από την αρχική του θέση κατά $x_1(t)$, $x_2(t)$ και $x_3(t)$, αντίστοιχα, και γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης που ικανοποιεί κάθε μία από τις συναρτήσεις $x_1(t), x_2(t)$, $x_3(t)$ θεωρώντας αμελητέες τις τριβές από το δάπεδο.
(β) Αναζητήστε λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης [δηλ. υποθέστε ότι και οι τρείς μάζες κινούνται με κοινή συχνότητα (ω) και φάση (φ), αλλά με διαφορετικά πλάτη Α, Β, Γ] και, αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης του ερωτήματος (α), διατυπώστε τη συνθήκη επιλυσιμότητας του προβλήματος.
(γ) Στο αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) υποθέστε ότι $m_1=m_2=m_3=m$ και $s_a=s_b=s$ και προσδιορίστε, συναρτήσει της χαρακτηριστικής συχνότητας $\omega_0 = s/m$, τις συχνότητες των ΚΤΤ που προκύπτουν από την επίλυση της συνθήκης του ερωτήματος (β).
(δ) Προσδιορίστε τα πηλίκα των πλατών Β/Α και Γ/Α, για κάθε έναν ΚΤΤ
(ε) Γράψτε τη γενική λύση του προβλήματος ως γραμμικό συνδυασμό ΚΤΤ, αναφέρετε ποιές είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης και εξηγήστε από ποιές συνθήκες προσδιορίζονται.

Θέμα 3. Δύο ιδανικές χορδές μεγάλου μήκους, διαφορετικής γραμμικής πυκνότητας, (ρ_2=4ρ_1, ρ_1= 0,20 kg/m, συνδέονται, στο $x=0$, με σημειακή μάζα m_0 και τείνονται με τάση T=20 N, κατά μήκος του αξονα x , έτσι ώστε $\rho(x<0)=\rho_1$ και $\rho(x>0)=\rho_2$. Στην περιοχή $(x<0)$ διαδίδεται ένα δεξιά οδεύον αρμονικό κύμα, του οποίου η μιγαδική αναπαράσταση είναι $y_1 = Ae^{i(kx-\omega t)}$, A=1 mm, (ω/2π)=1 Hz.

(α) Γράψτε τις γενικές μορφές για το ανακλώμενο (y_1') και για το διερχόμενο (y_2) αρμονικό κύμα από την ασυνέχεια γραμμικής πυκνότητας, στο $x=0$, και υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης και το μήκος κύματος σε κάθε μία από τις δυο περιοχές $(x<0)$ και $(x>0)$.

(β) Εξηγήστε τη φυσική σημασία των οριακών συνθηκών που ισχύουν στο σημείο σύνδεσης:

(i) $y_1(x=0)+y_1'(x=0)=y_2(x=0)$ και (ii) $m_o \left.\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right|_{x=0} = T\left[\frac{\partial y_2}{\partial x} - \frac{\partial(y_1+y_1')}{\partial x}\right]_{x=0}$.

Εφαρμόστε τις, απαλείφοντας το πλάτος του διερχόμενου κύματος και υπολογίστε τον (μιγαδικό) συντελεστή ανάκλασης πλάτους, r, συναρτήσει των κυματαριθμών k, k_2 και των ω, m_0, T.

(γ) Υπολογίστε την τιμή του συντελεστή ανάκλασης πλάτους r, για τις εξής οριακές περιπτώσεις, (γ_1) $m_0 \to 0$, (γ_2) $\omega \to 0$, και (γ_3) $\omega \to \infty$, και σχολιάστε.

ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ Αποδείξτε ότι, για τις περιπτώσεις (γ_1)-(γ_2)-(γ_3), τα αποτελέσματα για το r συμπίπτουν με τις εκφράσεις που δίνονται στο τυπολόγιο, συναρτήσει των Z και Z_2.

Θέμα 4. (α_1) Ένα μικρό δωμάτιο διαμερίσματος (π.χ. χώρος WC) έχει διαστάσεις 1,40 m μήκος ×1,25 m πλάτος×2,00 m ύψος. Υπολογίστε, για κάθε διάσταση, τη χαμηλότερη συχνότητα συντονισμού (στάσιμου κύματος) ενός ηχητικού κύματος, (αγνοώντας τις άλλες δύο διαστάσεις, κατά περίπτωση). (α_2) Υπολογίστε την 5η αρμονική των στασίμων-κυμάτων-κατά-πλάτος, και την 8η αρμονική των στασίμων-κυμάτων-καθ'-ύψος. Τι σχέση έχουν; (α_3) Πόσες συχνότητες συντονισμού υπάρχουν σε κάθε διάσταση, μέσα στη ζώνη των ακουστικών συχνοτήτων, δηλ. από 20 Hz μέχρι 20 kHz;

(β) Σε ένα δωμάτιο διαμερίσματος "κανονικών" διαστάσεων, πώς μπορούμε να επιλέξουμε το μήκος, και το πλάτος του έτσι ώστε να αποφύγουμε την σύμπτωση αρμονικών από αυτές τις διαστάσεις, η οποία θα παραμόρφωνε την "ακουστική" του δωματίου;

(γ) Γιατί σε μεγάλους κλειστούς χώρους ειδικών χρήσεων (π.χ., αίθουσες διαλέξεων) επιλέγουμε συνήθως η οροφή να είναι επιστρωμένη με υλικό μεγάλης ηχητικής απορρόφησης;

(δ) Ένα μεγάφωνο εκπέμπει ήχο σε ανοικτό χώρο συνολικής ισχύος 60,0 W ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις. Να βρείτε τη μέγιστη διαφορική πιεση του αέρα A_p σε απόσταση 10,0 m από τα μεγάφωνα. Δίνεται η χαρακτηριστική αντίσταση ανά μονάδα διατομής a του ηχητικού κύματος στον αέρα, $L_0 = \frac{Z_0}{a} = 400$ kg m^{-2} s^{-1} και η ταχύτητα του ήχου $\upsilon_{\eta\chi} = 350$ m/s, υπό κανονικές συνθήκες.

<u>Καλή Επιτυχία!</u>

Θέμα 1. Το ελατήριο του καθίσματος αυτοκινήτου συμπιέζεται κατά 3,40 cm όταν καθίσει ο οδηγός πριν την εκκίνηση, (η μάζα του καθίσματος θεωρείται αμελητέα)

(α) Αν το αυτοκίνητο συναντήσει μικρή ανωμαλία κατά την κινησή του, να βρεθεί η συχνότητα ω_0 της ταλάντωσης καθίσματος-οδηγού, αν αγνοηθεί η απόσβεση.

(β) Ποιά πρέπει να είναι η ελάχιστη τιμή $\gamma_{\min}$ του συντελεστή απόσβεσης γ του καθίσματος ώστε ο οδηγός να μην εκτελέσει ταλαντωτική αλλά απεριοδική κίνηση; Τι είδους κίνηση θα εκτελέσει ο οδηγός στην περίπτωση αυτή, αν $\gamma = \gamma_{\min}$, $x(t=0) = A$, $\upsilon(t=0) = 0$; Βρείτε τη σχέση $x = x(t)$ και προσδιορίστε όλες τις παραμέτρους και τις σταθερές της κίνησης, συναρτήσει των ανωτέρω μεγεθών.

[Στο (β) περιγράφεται απλουστευμένα ο τρόπος λειτουργίας - και η σκοπιμότητα τοποθέτησης - των τεσσάρων αποσβεστήρων (“αμορτισέρ”) - ενός για κάθε τροχό - ενός αυτοκινήτου.]

(γ) Ποιός πρέπει να είναι ο ελάχιστος συντελεστής ποιότητας Q του ηλεκτρονικού κυκλώματος του ραδιοφώνου του αυτοκινήτου; Επιθυμούμε το ραδιόφωνο να συντονίζεται χωρίς συνακρόαση στις ραδιοφωνικές συχνότητες της ζώνης FM [δηλ., στις ραδιοσυχνότητες από 87,5 MHz έως 108,0 MHz]. Οι συχνότητες εκπομπής των πομπών των ραδιοσταθμών στη ζώνη των FM απέχουν κατά 0,4 MHz. [ΥΠΟΔΕΙΞΗ: Θεωρήστε μία μέση συχνότητα ραδιοσταθμού $\nu_0 = 100\,\text{MHz}$ και εξετάστε την τιμή που πρέπει να έχει το “εύρος στο μισό του μεγίστου” (***F***ull ***W***idth at ***H***alf ***M***aximum = *FWHM*), $2\gamma = FWHM$ για να μην υπάρχει συνακρόαση γειτονικών σταθμών]. Δίνεται: g=10 m/s^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Στην κατάσταση ηρεμίας: $M_0 g = -k(x - x_0)$

Όπου x_0 το αρχικό μηκος του ελατηρίου και $(x - x_0) = 3.2cm$ η συμπίεσή του.

Αλλα η ιδιοσυχνότητα του συστήματος είναι

$$\omega_0^2 = \frac{k}{M_0} = \frac{g}{|x - x_0|} = \frac{10}{0.032} s^{-2} = 312.5\, s^{-1} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 17.68\, s^{-1}}$$

(β) Για να έχουμε απεριοδική κίνηση, θα πρέπει $\gamma > \omega_0$, $(\gamma = r/2m)$, άρα $\gamma > 17.68\, s^{-1}$.

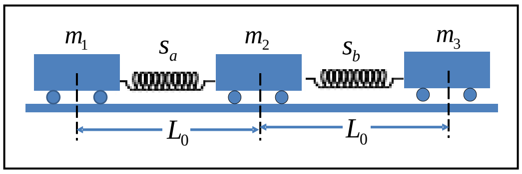
Αν $\gamma = \omega_0$ ο οδηγός θα εκτελέσει απεριοδική κίνηση της μορφής $x(t) = (a + bt)e^{-\omega_0 t}$, όπου οι σταθερές (a, b) θα προσδιοριστούν από τις αρχικές συνθήκες

$$x(t=0) = A \Rightarrow \boxed{a = A} \qquad \upsilon(t=0) = 0 \Rightarrow \boxed{b = \omega_0 A}$$

(γ) Αν θεωρήσουμε ένα σταθμό στο μέσο της ζώνης των FM , $f_0 = 100\,\text{MHz}$, ο προηγούμενος σταθμός της ζώνης θα είναι στην $f_\pi = 99.6\,\text{MHz}$ και ο επόμενος στην $f_\varepsilon = 100.4\,\text{MHz}$.

Οι καμπύλες συντονισμού του δέκτη πρέπει να διατηρούν απόσταση ίση τουλάχιστον με 2γ για να μην υπάρχει συνακρόαση.

Επειδή $Q \approx \dfrac{\omega'}{2\gamma} = \dfrac{100\,\text{MHz}}{0.4\,\text{MHz}} \Rightarrow \boxed{Q = 250}$



Θέμα 2. Τρία βαγόνια αμαξοστοιχίας, με μάζες m_1, m_2 και m_3, συνδέονται με ελατήρια σταθερών s_a και s_b, όπως στο σχήμα. Το σύστημα ακινητεί, με την απόσταση ανάμεσα στα κέντρα των βαγονιών να είναι ίση με L_0. Κατά τη χρονική στιγμή $t=0$, δίνεται στιγμιαία ώθηση στο βαγόνι 1, η οποία του προσδίδει στιγμιαία ταχύτητα $\upsilon_1(t=0)=\upsilon_{01}$.

(α) Θεωρήστε ένα στιγμιότυπο της κίνησης, κάποια χρονική στιγμή $t>0$, όταν το κέντρο κάθε βαγονιού έχει απομακρυνθεί από την αρχική του θέση κατά $x_1(t)$, $x_2(t)$ και $x_3(t)$, αντίστοιχα, και γράψτε τη διαφορική εξίσωση κίνησης που ικανοποιεί κάθε μία από τις συναρτήσεις $x_1(t), x_2(t)$, $x_3(t)$ θεωρώντας αμελητέες τις τριβές από το δάπεδο.

(β) Αναζητήστε λύσεις με τη μορφή Κανονικών Τρόπων Ταλάντωσης [δηλ. υποθέστε ότι και οι τρείς μάζες κινούνται με κοινή συχνότητα (ω) και φάση (φ), αλλά με διαφορετικά πλάτη Α, Β, Γ] και, αντικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης του ερωτήματος (α), διατυπώστε τη συνθήκη επιλυσιμότητας του προβλήματος.

(γ) Στο αποτέλεσμα του ερωτήματος (β) υποθέστε ότι $m_1=m_2=m_3=m$ και $s_a=s_b=s$ και προσδιορίστε, συναρτήσει της χαρακτηριστικής συχνότητας $\omega_0=s/m$, τις συχνότητες των ΚΤΤ που προκύπτουν από την επίλυση της συνθήκης του ερωτήματος (β).

(δ) Προσδιορίστε τα πηλίκα των πλατών Β/Α και Γ/Α, για κάθε έναν ΚΤΤ

(ε) Γράψτε τη γενική λύση του προβλήματος ως γραμμικό συνδυασμό ΚΤΤ, αναφέρετε ποιές είναι οι σταθερές ολοκλήρωσης και εξηγήστε από ποιές συνθήκες προσδιορίζονται.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $m_1\ddot{x}_1(t)=-s_a(x_1-x_2)$

$$m_2\ddot{x}_2(t)=-s_a(x_2-x_1)-s_b(x_2-x_3)$$

$$m_3\ddot{x}_3(t)=-s_b(x_3-x_2)$$

(β) $x_1(t)=\mathrm{A}\cos(\omega t+\varphi),\quad x_2(t)=\mathrm{B}\cos(\omega t+\varphi),\quad x_3(t)=\Gamma\cos(\omega t+\varphi),$

$$\ddot{x}_1(t)=-\omega^2\mathrm{A}\cos(\omega t+\varphi),\quad \ddot{x}_2(t)=-\omega^2\mathrm{B}\cos(\omega t+\varphi),\quad \ddot{x}_3(t)=-\omega^2\Gamma\cos(\omega t+\varphi),$$

Ατικαθιστώντας στις εξισώσεις κίνησης του (α)

$$\left(s_a-\omega^2 m_1\right)A-s_a\mathrm{B}+0\Gamma=0$$

όμοια $\quad -s_a\mathrm{A}+\left(s_a+s_b-\omega^2 m_2\right)\mathrm{B}-s_b\Gamma=0$

και $\quad 0\mathrm{A}-s_b\mathrm{B}+\left(s_b-\omega^2 m_3\right)\Gamma=0$

Γραμμικό ομογενές σύστημα (3x3) για τα πλάτη Α, Β, Γ, με συνθήκη επιλυσιμότητας:

$$\begin{vmatrix} \left(s_a/m_1-\omega^2\right) & -s_a/m_1 & 0 \\ -s_a/m_2 & \left(\dfrac{s_a+s_b}{m_2}-\omega^2\right) & -s_b/m_2 \\ 0 & -s_b/m_3 & \left(s_b/m_3-\omega^2\right) \end{vmatrix}=0$$

$$(\gamma)\quad \begin{vmatrix} \left(\omega_0^2-\omega^2\right) & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & \left(2\omega_0^2-\omega^2\right) & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & \left(\omega_0^2-\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\left(2\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-\omega_0^4\right]+\omega_0^2\left[-\omega_0^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\left(2\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-\omega_0^4-\omega_0^4\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\left(2\omega_0^2-\omega^2\right)\left(\omega_0^2-\omega^2\right)-\omega_0^4-\omega_0^4\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[2\omega_0^4-2\omega_0^2\omega^2-\omega^2\omega_0^2+\omega^4-2\omega_0^4\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\omega^4-3\omega_0^2\omega^2\right]=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\left[\omega^2-3\omega_0^2\right]=0}$$

Από τον μηδενισμό του τελευταίου γινομένου, προκύπτουν οι τρεις ρίζες

$$\boxed{\omega_1=0, \quad \omega_2=\omega_0, \quad \omega_3=\omega_0\sqrt{3}}$$

(δ_1) Αντικαθιστώντας $\omega=\omega_1=0$, στις εξισώσεις κίνησης των μαζών m_1 και m_3, παίρνουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\mathrm{A}_1-\omega_0^2\mathrm{B}_1=0 \\ -\omega_0^2\mathrm{B}_1+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\Gamma_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega_0^2\mathrm{A}_1-\omega_0^2\mathrm{B}_1=0 \\ -\omega_0^2\mathrm{B}_1+\omega_0^2\Gamma_1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{A}_1=\mathrm{B}_1=\Gamma_1}$$

Παράλληλη μετατόπιση όλου του συρμού

(δ_2) Αντικαθιστώντας $\omega=\omega_2=\omega_0$, στις εξισώσεις κίνησης των μαζών m_1 και m_3, παίρνουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\mathrm{A}_2-\omega_0^2\mathrm{B}_2=0 \\ -\omega_0^2\mathrm{B}_2+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\Gamma_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0\mathrm{A}_2-\omega_0^2\mathrm{B}_2=0 \\ -\omega_0^2\mathrm{B}_2+0\Gamma_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\mathrm{B}_2=0}$$

Και αντικαθιστωντας $\mathrm{B}_2=0$, στην εξίσωση κίνησης της μάζας m_2, παίρνουμε:

$$-\omega_0^2\mathrm{A}_2+\left(2\omega_0^2-\omega^2\right)\mathrm{B}_2-\omega_0^2\Gamma_2=0 \quad \Rightarrow \quad -\omega_0^2\mathrm{A}_2-\omega_0^2\Gamma_2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathrm{A}_2=-\Gamma_2}$$

Ακινησία του κεντρικού βαγονιού αι συμμετρική ταλάντωση των άλλων δύο

(δ_3) Αντικαθιστώντας $\omega=\omega_3=\omega_0\sqrt{3}$, στις εξισώσεις κίνησης των μαζών m_1 και m_3, παίρνουμε:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\omega_0^2-\omega^2\right)\mathrm{A}_3-\omega_0^2\mathrm{B}_3=0 \\ -\omega_0^2\mathrm{B}_3+\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\Gamma_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2\omega_0^2\mathrm{A}_3-\omega_0^2\mathrm{B}_3=0 \\ -\omega_0^2\mathrm{B}_3-2\omega_0^2\Gamma_3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \mathrm{B}_3=-2\mathrm{A}_3 \\ \mathrm{B}_3=-2\Gamma_3 \end{array}}$$

Παράλληλη κίνηση των ακραίων, αντίθετα ως προς το κεντρικό.

(ε)

$$x_1(t)=\mathrm{A}_1\cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)+\mathrm{A}_2\cos\left(\omega_2 t+\varphi_2\right)+\mathrm{A}_3\cos\left(\omega_3 t+\varphi_3\right)$$
$$x_2(t)=\mathrm{B}_1\cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)+\mathrm{B}_2\cos\left(\omega_2 t+\varphi_2\right)+\mathrm{B}_3\cos\left(\omega_3 t+\varphi_3\right)$$
$$x_3(t)=\Gamma_1\cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)+\Gamma_2\cos\left(\omega_2 t+\varphi_2\right)+\Gamma_3\cos\left(\omega_3 t+\varphi_3\right)$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης είναι τα τρία πλάτη, $\mathrm{A}_{1,2,3}$ και οι τρείς φάσεις $\varphi_{1,2,3}$, και προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες (θέσεις–ταχύτητας)x3. Τα υπόλοιπα πλάτη $\mathrm{B}_{1,2,3}$ και $\Gamma_{1,2,3}$ έχουν προκύψει από το ερώτημα (δ) συναρτήσει των $\mathrm{A}_{1,2,3}$.

Θέμα 3. Δύο ιδανικές χορδές μεγάλου μήκους, διαφορετικής γραμμικής πυκνότητας, (ρ_2=4ρ_1, ρ_1= 0,20 kg/m, συνδέονται, στο $x=0$, με σημειακή μάζα m_0 και τείνονται με τάση T=20 N, κατά μήκος του αξονα x , έτσι ώστε $\rho(x<0)=\rho_1$ και $\rho(x>0)=\rho_2$. Στην περιοχή $(x<0)$ διαδίδεται ένα δεξιά οδεύον αρμονικό κύμα, του οποίου η μιγαδική αναπαράσταση είναι $y_1 = Ae^{i(kx-\omega t)}$, A=1 mm, (ω/2π)=1 Hz.

(α) Γράψτε τις γενικές μορφές για το ανακλώμενο (y_1') και για το διερχόμενο (y_2) αρμονικό κύμα από την ασυνέχεια γραμμικής πυκνότητας, στο $x=0$, και υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης και το μήκος κύματος σε κάθε μία από τις δυο περιοχές $(x<0)$ και $(x>0)$.

(β) Εξηγήστε τη φυσική σημασία των οριακών συνθηκών που ισχύουν στο σημείο σύνδεσης:

$$\text{(i)}\ y_1(x=0)+y_1'(x=0)=y_2(x=0) \quad \text{και} \quad \text{(ii)}\ m_o \left.\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right|_{x=0} = T\left[\frac{\partial y_2}{\partial x}-\frac{\partial(y_1+y_1')}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=0}.$$

Εφαρμόστε τις, απαλείφοντας το πλάτος του διερχόμενου κύματος και υπολογίστε τον (μιγαδικό) συντελεστή ανάκλασης πλάτους, r, συναρτήσει των κυματαριθμών k, k_2 και των ω, m_0, T.

(γ) Υπολογίστε την τιμή του συντελεστή ανάκλασης πλάτους r, για τις εξής οριακές περιπτώσεις, (γ1) $m_0 \to 0$, (γ2) $\omega \to 0$, και (γ3) $\omega \to \infty$, και σχολιάστε.

ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ Αποδείξτε ότι, για τις περιπτώσεις (γ1)-(γ2)-(γ3), τα αποτελέσματα για το r συμπίπτουν με τις εκφράσεις που δίνονται στο τυπολόγιο, συναρτήσει των Z και Z_2.

(α) Προσπίπτον: $y_1 = Ae^{i(kx-\omega t)}$,Ανακλώμανο: $y_1' = Be^{i(-kx-\omega t)}$, Διερχόμενο: $y_2 = Ce^{i(k_2 x-\omega t)}$

Οι ταχύτητες: $c_1 = \sqrt{T/\rho_1} = \sqrt{\dfrac{20N}{0.2kg/m}} = 10\sqrt{\dfrac{kg\ m\ s^{-2}}{kg/m}} \Rightarrow \boxed{c_1 = 10\, m/s}$

$$c_2 = \sqrt{T/\rho_2} = \sqrt{\frac{T}{4\rho_1}} = 5\sqrt{\frac{kg\ m\ s^{-2}}{kg/m}} \Rightarrow \boxed{c_2 = 5\, m/s}$$

Μήκη κύματος: $\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 1Hz$

Θεμελιώδης εξίσωση κυματικής: $c = f\lambda \Rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda_1 = c_1/f \\ \lambda_2 = c_1/f \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \lambda_1 = 10\, m \\ \lambda_2 = 5\, m \end{Bmatrix}$

(β) Συνθήκες που ισχύουν στο σημείο σύνδεσης.

Συνέχεια της χορδής:

$$y_1(x=0)+y_1'(x=0)=y_2(x=0) \Rightarrow Ae^{-i\omega t}+Be^{-i\omega t}=Ce^{-i\omega t} \Rightarrow \boxed{A+B=C} \quad (1)$$

Νόμος του Νεύτωνα για την επιτάχυνση της μάζας m_0 του συνδέσμου:

$$m_o \left.\frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2}\right|_{x=0} = T\left[\frac{\partial y_2}{\partial x}-\frac{\partial(y_1+y_1')}{\partial x}\right]\Bigg|_{x=0} \Rightarrow -\omega^2 m_0 Ce^{-i\omega t} = T\left[ik_2 Ce^{-i\omega t} - i(A-B)ke^{-i\omega t}\right]$$

$$-\omega^2 m_0 C = T\left[ik_2 C - i(A-B)k\right] \Rightarrow \boxed{C\left(-ik_2 T - \omega^2 m_0\right) = ikT(B-A)} \quad (2)$$

Συνδυάζοντας τις (1) και (2)

$$(A+B)\left(-ik_2T-\omega^2 m_0\right) = ikT(B-A) \Rightarrow B\left(-ik_2T-ikT-\omega^2 m_0\right) = A\left(ik_2T-ikT+\omega^2 m_0\right) \Rightarrow$$

$$\frac{B}{A} = \frac{-iT(k-k_2)+\omega^2 m_0}{-iT(k+k_2)-\omega^2 m_0} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{B}{A} = \frac{(k-k_2)+i\omega^2 m_0/T}{(k+k_2)-i\omega^2 m_0/T}}$$

(γ) Οριακή τιμή του συντελεστή ανάκλασης πλάτους για τις εξής οριακές περιπτώσεις, (γ1) $m_0 \to 0 \Rightarrow r \equiv \dfrac{B}{A} = \dfrac{(k-k_2)}{(k+k_2)}$, η αναμενόμενη σχέση για ιδανική σύνδεση, χωρίς σημειακή μάζα, η οποία είναι ανεξάρτηση από τη συχνότητα.

(γ2) $\omega \to 0 \Rightarrow r \equiv \dfrac{B}{A} = \dfrac{(k-k_2)}{(k+k_2)}$, όπως και προηγουμένως. Άρα, για τις χαμηλές συχνότητες, η σημειακή μάζα σύνδεσης είναι σαν να μην υπάρχει.

(γ3) $\omega \to \infty \Rightarrow r \equiv \dfrac{B}{A} \to \dfrac{+i\omega^2 m_0 / T}{-i\omega^2 m_0 / T} = -1$, όπως στην περίπτωση ακλόνητου στηρίγματος. Άρα, για τις υψηλές συχνότητες σύνδεσης, η σημειακή μάζα σύνδεσης συμπεριφέρεται ως ακλόνητη.

Θέμα 4. (α_1) Ένα μικρό δωμάτιο διαμερίσματος (π.χ. χώρος WC) έχει διαστάσεις 1,40 m μήκος $\times$1,25 m πλάτος$\times$2,00 m ύψος. Υπολογίστε, για κάθε διάσταση, τη χαμηλότερη συχνότητα συντονισμού (στάσιμου κύματος) ενός ηχητικού κύματος, (αγνοώντας τις άλλες δύο διαστάσεις, κατά περίπτωση). (α_2) Υπολογίστε την 5^{η} αρμονική των στασίμων-κυμάτων-κατά-πλάτος, και την 8^{η} αρμονική των στασίμων-κυμάτων-καθ'-ύψος. Τι σχέση έχουν; (α_3) Πόσες συχνότητες συντονισμού υπάρχουν σε κάθε διάσταση, μέσα στη ζώνη των ακουστικών συχνοτήτων, δηλ. από 20 Hz μέχρι 20 kHz;
(β) Σε ένα δωμάτιο διαμερίσματος "κανονικών" διαστάσεων, πώς μπορούμε να επιλέξουμε το μήκος, και το πλάτος του έτσι ώστε να αποφύγουμε την σύμπτωση αρμονικών από αυτές τις διαστάσεις, η οποία θα παραμόρφωνε την "ακουστική" του δωματίου;
(γ) Γιατί σε μεγάλους κλειστούς χώρους ειδικών χρήσεων (π.χ., αίθουσες διαλέξεων) επιλέγουμε συνήθως η οροφή να είναι επιστρωμένη με υλικό μεγάλης ηχητικής απορρόφησης;
(δ) Ένα μεγάφωνο εκπέμπει ήχο σε ανοικτό χώρο συνολικής ισχύος 60,0 W ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις. Να βρείτε τη μέγιστη διαφορική πιεση του αέρα A_p σε απόσταση 10,0 m από τα μεγάφωνα. Δίνεται η χαρακτηριστική αντίσταση ανά μονάδα διατομής a του ηχητικού κύματος στον αέρα, $L_0 = \dfrac{Z_0}{a} = 400$ kg m^{-2} s^{-1} και η ταχύτητα του ήχου $\upsilon_{\eta\chi} = 350$ m/s, υπό κανονικές συνθήκες.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α_1) Για να έχουμε στάσιμο κύμα μεταξύ δύο παράλληλων τοίχων θα πρέπει η απόστασή τους να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος,

$$L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \Rightarrow f = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \boxed{f = \frac{c}{2L}n, \quad n = 1, 2, 3, ..}.$$

Επομένως, οι χαμηλότερες συχνότητες στάσιμων κυμάτων $(n=1)$, για κάθε μία διάσταση (μ=μήκος, π=πλάτος, υ=υψος), είναι

$$f_{1,\mu} = \frac{c}{2L_\mu} = \frac{350}{2,8}Hz = 125Hz, \quad f_{1,\pi} = \frac{c}{2L_\pi} = \frac{350}{2,5}Hz = 140Hz, \quad f_{1,\upsilon} = \frac{c}{2L_\upsilon} = \frac{350}{4}Hz = 87.5Hz$$

(α_2) Η 5^{η} αρμονική των στασίμων-κυμάτων-κατά-πλάτος, και η 8^{η} αρμονική των στασίμων-κυμάτων-καθ'-ύψος, είναι $f_{5,\pi} = 5\times 140Hz = 700Hz$ και $f_{8,\upsilon} = 8\times 87.5Hz = 700Hz$.

Παρατηρούμε ότι οι οι δύο αρμονικές συμπίπτουν

(α_3) Πόσες συχνότητες συντονισμού υπάρχουν σε κάθε διάσταση, μέσα στη ζώνη των ακουστικών συχνοτήτων, δηλ., από 20 Hz μέχρι 20 kHz;

Αφού η θεμελιώσης και των τριών διαστάσεων είναι > 20 Hz, έχουμε:

$$n_\mu = \frac{20000}{125} = 160, \quad n_\pi = \frac{20000}{140} = 142, \quad n_\upsilon = \frac{20000}{87.5} = 228$$

(β) Για να αποφευχθεί η σύμπτωση αρμονικών συχνοτήτων από τις τρείς διαφορετικές διαστάσεις επιδιώκεται ο λόγος των διαστάσεων να μην είναι ακέραιος αριθμός, μάλιστα ούτε ρητός αριθμό, ώστε οποιοδήποτε ακέραιο πολλαπλάσιο της μίας θεμελιώδους συχνότητας να μην συμπίπτει με κανένα ακέραιο πολλαπλάσιο των άλλων δύο συχνοτήτων.

(γ) Σε μεγάλους κλειστούς χώρους ειδικών χρήσεων (π.χ., αίθουσες διαλέξεων) επιλέγουμε συνήθως η οροφή να είναι επιστρωμένη με υλικό μεγάλης ηχητικής απορρόφησης, ώστε να αποφεύγονται οι συντονισμοί με αρμονικές των καθ' ύψος στάσιμων κυμάτων.

(δ) Η ένταση του ακουστικού κύματος είναι $I = \dfrac{A_p^2}{2L_0} \Rightarrow A_p = \sqrt{2L_0 I}$

Αλλά, $$I = \frac{P}{S} = \frac{60W}{4\pi(10m)^2} = 4.77\times 10^{-2} W/m^2$$

Άρα, $$A_p = \sqrt{2L_0 I} = \sqrt{2\times 400\times 4.77\times 10^{-2}} = \sqrt{3816}\times 10^{-1} Nt/m^2 = 6.18 Nt/m^2$$