1. Να αποδείξετε ότι σε ένα ταλαντούμενο σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας, μάζας *m* και σταθεράς ελατηρίου *s* με πολύ ασθενή απόσβεση ($\gamma << \omega_0$, όπου $\gamma \equiv r/2m$, *r* η *σταθερά αντίστασης* και $\omega_0^2 = s/m$) το ‘πλήρες εύρος στο μισό του μεγίστου’, FWHM (Full Width at Half Maximum) της καμπύλης συντονισμού για το πλάτος μετατόπισης $A(\omega)$ είναι προσεγγιστικά: $FWHM \approx 2\sqrt{3}\gamma \approx \sqrt{3}\omega_0/Q$, όπου *Q*: ο συντελεστής ποιότητας του συστήματος. Σε ποιό συμπέρασμα καταλήγουμε για τη σχέση FWHM, ω_0, και *Q* σε ταλαντούμενα συστήματα; Συμφωνεί αυτό με την εμπειρία σας; Δώστε ένα σχετικό παράδειγμα.
[*Υπόδειξη:* Λύστε την εξίσωση $A_{max}/2 = A(\omega)$ ώς προς ω, όπου $A_{max} = F_0/r\omega'$. Εκφράστε την διαφορά των δύο θετικών λύσεων ώς πολλαπλάσιο του ω_0, $(\omega_1 - \omega_2) = B\omega_0$. Αναλύοντας το *B* σε σειρά άπειρων όρων ώς προς γ/ω_0 (‘σειρά Taylor’), κρατήστε μόνο τον όρο πρώτης τάξης ώς προς γ/ω_0, αγνοώντας όρους ανώτερης τάξης, δηλ. ανάλογους των δυνάμεων $(\gamma/\omega_0)^2$, $(\gamma/\omega_0)^3$ κ.ο.κ.]

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$$A(\omega) = \frac{A_{max}}{2} \Rightarrow \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = \frac{F_0}{2r\omega'} = \frac{F_0}{4\gamma m\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2}} = \frac{1}{4\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \Rightarrow \sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2} = 4\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2} = 4\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \Rightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\gamma\omega)^2 = 16\gamma^2\left(\omega_0^2 - \gamma^2\right)$$

$$\omega^4 - 2\left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right)\omega^2 + \left[\omega_0^4 + 16\gamma^4 - 16\gamma^2\omega_0^2\right] = 0$$

$$\omega_{1.2}^2 = \left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right) \pm \sqrt{\left(\omega_0^2 - 2\gamma^2\right)^2 - \left[\omega_0^4 + 16\gamma^4 - 16\gamma^2\omega_0^2\right]}$$

Δεδομένου ότι $\gamma << \omega_0 \Rightarrow \gamma^2 << \gamma\omega_0 \Rightarrow \gamma^4 << \gamma^2\omega_0^2$,

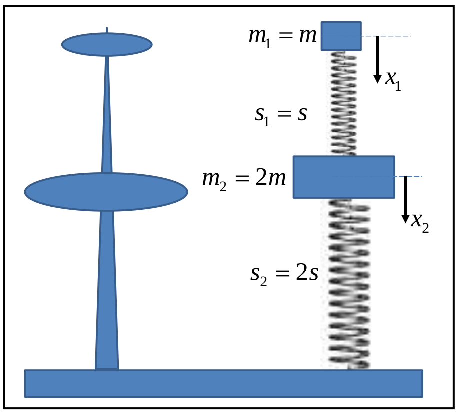
έχουμε κατά σειρά τις προσεγγίσεις :

$$\omega_{1.2}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm \sqrt{12\gamma^2\omega_0^2 - 12\gamma^4} \approx \omega_0^2 - 2\gamma^2 \pm 2\gamma\omega_0\sqrt{3} \approx \omega_0^2 \pm 2\gamma\omega_0\sqrt{3} \approx \omega_0^2\left(1 \pm 2\gamma\sqrt{3}/\omega_0\right)$$

Άρα: $\omega_{1,2} \approx \omega_0\left(1 \pm 2\gamma\sqrt{3}/\omega_0\right)^{1/2} \approx \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2}2\gamma\sqrt{3}/\omega_0\right) = \omega_0 \pm \gamma\sqrt{3}$

Οπότε: $FWHM \equiv \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = 2\gamma\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\omega'}{r/m} = \frac{\omega'}{2\gamma} \Rightarrow \boxed{Q = \sqrt{3}\frac{\omega'}{\Delta\omega}}$

2. Ένας πύργος τηλεόρασης με δύο ορόφους μπορεί να προσομοιωθεί με ένα σύστημα μαζών ελατηρίων όπως στο διπλανό σχήμα. Θεωρούμε ότι η διαταραχή του συστήματος από την κατάσταση ισορροπίας (π.χ., λόγω των επισκεπτών του πύργου) γίνεται μόνο κατά την κατακόρυφη διεύθυνση.



(α) Γράψτε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων κατακόρυφης κίνησης των δύο ορόφων του πύργου.

(β) Αναζητήστε τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, υποθέτοντας λύσεις της μορφής $x_1 = A\cos(\omega t+\varphi), \quad x_2 = B\cos(\omega t+\varphi)$.

(γ) Γράψτε τη συνθήκη επιλυσιμότητας του ομογενούς γραμμικού συστήματος που ικανοποιούν τα πλάτη A και B, και υπολογίστε τις συχνότητες (ω_1, ω_2) των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, συναρτήσει του $\omega_0 = \sqrt{s/m}$

(δ) Υπολογίστε το πηλίκο των πλατών A/B, για κάθε κανονικό τρόπο ταλάντωσης και τις κανονικές συντεταγμένες του συστήματος.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) Οι εξισώσεις κίνησης

$$m_1\ddot{x}_1 = -s_1(x_1 - x_2) \qquad (1\alpha)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = -s_1(x_2 - x_1) - s_2 x_2 \qquad (1\beta)$$

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + s_1x_1 - s_1x_2 = 0 \\ &m_2\ddot{x}_2 + (s_1+s_2)x_2 - s_1x_1 = 0 \end{aligned} \qquad \text{όπου,}\quad m_1 = m,\quad m_2 = 2m,\quad s_1 = s,\quad s_2 = 2s\ ,$$

οπότε:

$$\left\{\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \frac{s_1}{m_1}x_1 - \frac{s_1}{m_1}x_2 = 0 \\ &\ddot{x}_2 + \frac{(s_1+s_2)}{m_2}x_2 - \frac{s_1}{m_2}x_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &\ddot{x}_1 + \omega_0^2x_1 - \omega_0^2x_2 = 0 \\ &\ddot{x}_2 + \frac{3}{2}\omega_0^2x_2 - \frac{1}{2}\omega_0^2x_1 = 0 \end{aligned}\right\}.$$

(β) Αν αναζητήσουμε κανονικούς τρόπους ταλάντωσης

$$\left\{\begin{aligned} &x_1 = A\cos(\omega t+\varphi) \\ &x_2 = B\cos(\omega t+\varphi) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} (\omega_0^2-\omega^2)A - \omega_0^2B = 0 \quad (2\alpha) \\ -\frac{1}{2}\omega_0^2A + \left(\frac{3}{2}\omega_0^2 - \omega^2\right)B = 0 \quad (2\beta) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} (\omega_0^2-\omega^2) & -\omega_0^2 \\ -\frac{1}{2}\omega_0^2 & \left(\frac{3}{2}\omega_0^2-\omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

(γ) $\Rightarrow \omega^4 - \dfrac{5}{2}\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0$, με ρίζες:

$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2\frac{5\pm3}{4} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{aligned} &\omega_1 = \omega_0\sqrt{2} \qquad (4\alpha) \\ &\omega_1 = \omega_0/\sqrt{2} \qquad (4\beta) \end{aligned}\right.$$

(δ) Αντικαθιστώντας κάθε μία από τις ιδιοσυχνότητες στην (2α) παίρνουμε:

$$\omega = \omega_1 = \omega_0\sqrt{2} \overset{(2a)}{\Rightarrow} (\omega_0^2 - 2\omega_0^2)A_1 = \omega_0^2B_1 \Rightarrow \boxed{(A_1/B_1) = -1} \qquad (5\alpha)$$

$$\omega = \omega_2 = \omega_0 / \sqrt{2} \overset{(2a)}{\Rightarrow} \left(\omega_0^2 - \omega_0^2 / 2\right) A_2 = \omega_0^2 B_2 \Rightarrow \boxed{\left(A_2 / B_2\right) = 2} \qquad (5\beta)$$

Γράφουμε τις γενικές λύσεις των εξισώσεων κίνησης, χρησιμοποιώντας τις (5α,β)

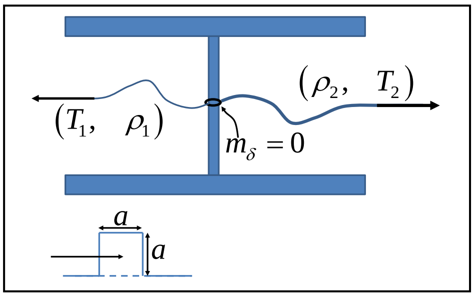
$$x_1 = A_1 \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + A_2 \cos\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) \qquad (6\alpha)$$

$$x_2 = -A_1 \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + \frac{A_2}{2} \cos\left(\omega_2 t + \varphi_2\right) \qquad (6\beta)$$

$$(6a) - 2 \times (6\beta) \Rightarrow x_1 - 2x_2 = \left(A_1 + 2A_2\right) \cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right)$$

$$(6a) + (6\beta) \qquad \Rightarrow x_1 + x_2 = \left(A_2 + A_2 / 2\right) \cos\left(\omega_2 t + \varphi_2\right)$$

Άρα οι κανονικές συντεταγμένες είναι: $\quad q_1 \equiv x_1 - 2x_2, \quad q_2 \equiv x_1 + x_2$



3. Δύο ιδανικές χορδές με γραμμική πυκνότητα μάζας $\rho_1=\rho_0$ και $\rho_2=4\rho_0$, αντίστοιχα, είναι συνδεδεμένες (στο $x=0$) μέσω δακτυλιδιού αμελητέας μάζας ($m_\delta=0$), το οποίο μπορεί να κινείται, χωρίς τριβές κατά μήκος οριζόντιας ράβδου, τα άκρα της οποίας είναι στερεωμένα σε ακλόνητα σημεία. Μέσω αυτής της κατασκευής μπορούν να εφαρμοσθούν διαφορετικές τάσεις στις δύο χορδές (αν χρειαστεί).

(α) Το σύστημα τείνεται με ενιαία τάση $T_1=T_2=T$, από τα ελεύθερα άκρα των δύο χορδών, και στην αριστερή χορδή διεγείρεται ένας δεξιά οδεύον τετραγωνικός παλμός με ύψος $\Delta y_i=a$ και εύρος $\Delta x_i=a$, το δεξιό μέτωπο του οποίου φτάνει στη σύνδεση ($x=0$) τη χρονική στιγμή $t=0$.

(α_1) Υπολογίστε τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία διέρχεται το αριστερό μέτωπο του παλμού από τη σύνδεση ($x=0$) .

(α2) Σχεδιάστε, κατά τη χρονική στιγμή t_1, τον ανακλώμενο (r) και τον διαδιδόμενο (t) παλμό, προσδιορίζοντας επακριβώς τις μορφές τους [εύρος $\equiv(\Delta x)_{(r,t)}$, πλάτος (ύψος)$\equiv(\Delta y)_{(r,t)}$, συναρτήσει του a και των (ρ_0, T)].

(β) Αν μεταβάλουμε την τάση της δεξιάς χορδής ($T_2 \neq T_1=T$), ποιά θα έπρεπε να είναι η νέα της τιμή, έτσι ώστε να μην έχουμε ανακλώμενο παλμό στη σύνδεση των δύο χορδών; Σε αυτή την περίπτωση, ποιά θα ήταν η ταχύτητα διάδοσης στη δεξιά χορδή και ποια η τιμή του μήκους κύματος, σε κάθε μία χορδή, από μία αρμονική διέγερση συχνοτητας f_0 ;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $c_1=\sqrt{T/\rho_1} \Rightarrow c_1=\sqrt{T/\rho_0}=c_0$, $\qquad c_2=\sqrt{T/\rho_2} \Rightarrow c_2=\sqrt{T/4\rho_0}=c_0/2$

(α_1) Για τη χρονική διάρκεια διέλευσης, (από το σημείο ασυνέχειας), που θα καθορίσει και το χωρικό εύρος του διαδιδόμενου παλμού:

$$c_1=\frac{\Delta x_i}{t_1}=\frac{a}{t_1} \Rightarrow t_1=a/c_1 \Rightarrow \boxed{t_1=a/c_0}$$

(α_2) Για το εύρος του διαδιδόμενου:

$$c_2=\frac{\Delta x_t}{t_1} \Rightarrow \Delta x_t=c_2 t_1=\frac{c_0}{2}\frac{a}{c_0} \Rightarrow \boxed{\Delta x_t=a/2}$$

Το εύρος του ανακλώμενου είναι ίδιο με το εύρος του προσπίπτοντος $\boxed{\Delta x_r=\Delta x_i=a}$

Για των υπολογισμό των πλατών(≡υψών) του ανακλώμενου και του διαδιδόμενου, θα χρησιμοποιηθούν οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης πλάτους

$$r \equiv \frac{A_r}{A_i}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}=\frac{\sqrt{T\rho_1}-\sqrt{T\rho_2}}{\sqrt{T\rho_1}+\sqrt{T\rho_2}}=\frac{\sqrt{\rho_0}-\sqrt{4\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}+\sqrt{4\rho_0}} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{A_r}{A_i}=-\frac{1}{3}}$$

$$t \equiv \frac{A_t}{A_i}=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}=\frac{2\sqrt{T\rho_1}}{\sqrt{T\rho_1}+\sqrt{T\rho_2}}=\frac{2\sqrt{\rho_0}}{\sqrt{\rho_0}+\sqrt{4\rho_0}} \Rightarrow \boxed{r \equiv \frac{A_t}{A_i}=\frac{2}{3}}$$

Οπότε: $\left(\Delta y\right)_r = -\dfrac{1}{3}\left(\Delta y\right)_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\Delta y\right)_r = -\dfrac{a}{3}}$

$$\left(\Delta y\right)_t = \frac{2}{3}\left(\Delta y\right)_i \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(\Delta y\right)_t = \frac{2}{3}a}$$

(β) Για να μηδενιστεί ο συντελεστής ανάκλασης, θα πρέπει η νέα τάση T_2' της δεξιάς χορδής να είναι τέτοια ώστε:

$$r' = \frac{Z_1 - Z_2'}{Z_1 + Z_2} = \frac{\sqrt{T\rho_1} - \sqrt{T_2'\rho_2}}{\sqrt{T\rho_1} + \sqrt{T\rho_2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{T\rho_1} = \sqrt{T_2'\rho_2} \Rightarrow T\rho_0 = T_2' 4\rho_0 \Rightarrow \boxed{T_2' = T/4}$$

Οπότε και $c_2' = \sqrt{\dfrac{T_2'}{\rho_2}} = \sqrt{\dfrac{T}{4}\dfrac{1}{4\rho_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_2' = c_0/4}$

Για τα μήκη κύματος, χρησιμοποιώντας τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής (απουσία διασποράς), παίρνουμε :

$$c = f\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{c_1}{f_1} \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \frac{c_0}{f_0}}, \qquad \lambda_2' = \frac{c_2'}{f_2} \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = \frac{c_0}{4f_0} = \frac{\lambda_1}{4}}$$

4. Μία συσκευή λέιζερ ηλίου-νέου εκπέμπει ερυθρό φως μήκους κύματος λ = 633 nm με ισχύ P = 5,00 mW σε μορφή δέσμης διαμέτρου d = 3,00 mm. Το αντίστοιχο ηλεκτρομαγνητικό κύμα (ΗΜ) είναι επίπεδο και διαδίδεται στο κενό. Τα πεδία ***E*** και ***B*** είναι παράλληλα προς τον άξονα z και y αντίστοιχα και είναι της μορφής: $\vec{E}(x,t)=\hat{z}E_0\cos(kx+\omega t)$ και $\vec{B}(x,t)=\hat{y}B_0\cos(kx+\omega t)$).

(α) Βρείτε την συχνότητα f του ΗΜ κύματος.

(β) Βρείτε την ένταση I του ΗΜ κύματος, σε μονάδες W/m^2.

(γ) Απεικονίστε τα πεδία ***E*** και ***B*** για t = 0 για σημεία κατά μήκος του άξονα x.

(δ) Να βρείτε μια έκφραση για το διάνυσμα Poynting ***S***(x,t). Ποιά είναι η κατεύθυνση διάδοσης του ΗΜ κύματος; Πώς σχετίζεται το διάνυσμα ***S***(x,t) με την ένταση I που βρήκατε στο ερώτημα (β) ;

(ε) Να βρείτε τα πλάτη E_0 και B_0 του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου του ΗΜ κύματος.

(στ) Βρείτε την μέση πίεση ακτινοβολίας που υφίσταται μια επιφάνεια τοποθετημένη κάθετα στην δέσμη η οποία την απορροφά πλήρως. Επίσης βρείτε την μέση πίεση ακτινοβολίας που υφίσταται μια επιφάνεια τοποθετημένη κάθετα στην δέσμη η οποία την ανακλά πλήρως.

<u>ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΟ</u>

(ζ) Βρείτε το πλάτος υπό- ή υπερ-πίεσης , A_p, ενός επίπεδου **ηχητικού** κύματος στον αέρα, που έχει την ίδια ένταση I με το ΗΜ κύμα της δέσμης λέιζερ ηλίου-νέου. Δίνεται η χαρακτηριστική αντίσταση ανά μονάδα επιφάνειας του ηχητικού κύματος στον αέρα: L_0 = 400 kg m^{-2}s^{-1}.

(η) Συγκρίνετε τις απαντήσεις σας στα ερ. (στ) και (ζ) με την (μέση) ατμοσφαιρική πίεση, $p_{\text{atm}} = 1{,}013 \times 10^5$ N/m^2.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

(α) $$f=\frac{3\times10^8}{6.33\times10^{-7}}\Rightarrow\boxed{f=4.74\times10^{14}\,Hz}$$

(β) $$I=\frac{5\times10^{-3}}{\pi\left(3\times10^{-3}\right)^2/4}\frac{W}{m^2}\quad\Rightarrow\quad\boxed{I=7{,}08\times10^2\;W/m^2}$$

(γ)-(δ) Από τη μορφή των $\cos(kx+\omega t)$ και για τα δύο πεδία φαίνεται ότι είναι ένα αριστερά οδεύον κύμα, κατά μήκος του άξονα-x.

Το συμπέρασμα αυτό επαληθεύεται από τον διανυσματικό προσανατολισμό του $\vec{S}$

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{\mu_0}\left(\hat{z}E_0\cos(kx+\omega t)\right)\times\left(\hat{y}B_0\cos(kx+\omega t)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{\vec{S}=-\hat{x}\frac{1}{\mu_0}E_0B_0\cos^2(kx+\omega t)}$$

Η ένταση είναι η μέση τιμή (στο χρόνο) του μέτρου του διανύσματος Poynting

$\vec{S}=-\hat{x}\frac{1}{\mu_0}E_0B_0\cos^2(kx+\omega t)\Rightarrow\left|\vec{S}\right|=\frac{1}{\mu_0}E_0B_0\cos^2(kx+\omega t)$, δηλαδή

$$I=\left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle_t=\frac{1}{\mu_0}E_0B_0\frac{1}{T}\int_o^T\cos^2(kx+\omega t)\,dt=\frac{1}{\mu_0}E_0B_0\frac{\omega}{2\pi}\int_o^T\cos^2(kx+\omega t)\,dt$$

$$I = \frac{1}{\mu_0} E_0 B_0 \frac{1}{2\pi} \int_o^{2\pi} \cos^2\left(kx + \omega t\right) d\left(\omega t\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0}}$$

(ε) Από τη σχέση των πεδίων $E_0 = cB_0$ και την προηγούμενη σχέση για την ένταση παίρνουμε

$$I = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_0 = \sqrt{2c\mu_0 I} = 7,31 V/m} \quad \text{και} \quad \boxed{B_0 = E_0 / c = 2.44 \times 10^{-8}\ T}$$

(στ) $P_{rad} = \frac{I}{c} = 2,36 \times 10^{-10}\ N/m^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_{abs} = P_{rad} = 2,36 \times 10^{-10}\ N/m^2}$

και $\boxed{P_{refl} = 2P_{rad} = 4,72 \times 10^{-10}\ N/m^2}$

(ζ) $I = \frac{A_p^2}{2L_0} \quad \Rightarrow \quad A_p = \sqrt{2L_0 I} = 7,53 \times 10^2\ N/m^2$

(η) $A_p \approx 10^{-2} \times P_{\alpha\tau\mu}, \qquad P_{rad} \approx 10^{-15} \times P_{\alpha\tau\mu}$