

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ

Πολιτικοί Μηχανικοί
Φθινόπωρο 2009

Κ. Ράπτης

1. ΕΛΕΥΘΕΡΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ ΜΕ ΑΠΟΣΒΕΣΗ

1.1 Διανυσματικά διαγράμματα

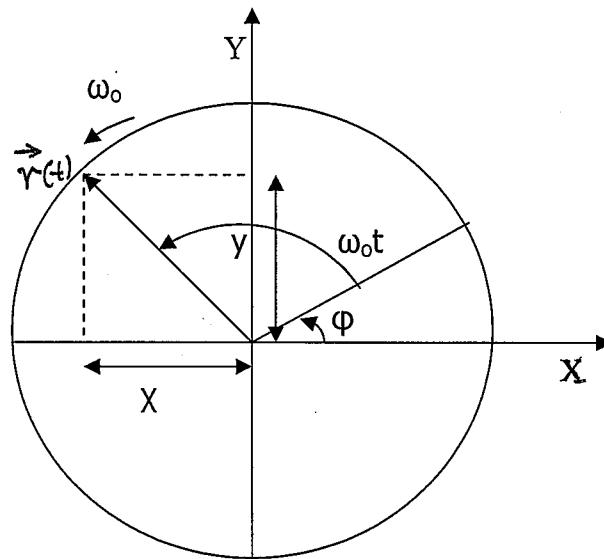
Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση κίνησης ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή χωρίς απόσβεση, μάζας m και ελατηρίου σταθεράς (στιληρότητας) s (σε μονάδες Nm^{-1}):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{s}{m}x = 0 \quad (1.1)$$

η λύση της οποίας δίνει τη μετατόπιση της μάζας $x(t)$ ως συνάρτηση του χρόνου:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.2)$$

όπου A το πλάτος της ταλάντωσης, $\omega_0 = (s/m)^{1/2}$ η γωνιακή συχνότητα (ιδιοσυχνότητα) ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση, $\omega_0 t + \varphi$ η γωνία φάσης και φ η σταθερά φάσης (αρχική φάση) που εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες, δηλαδή από τη διαδικασία έναρξης της ταλάντωσης.



Σχήμα 1.1. Διάγραμμα περιστρεφόμενου διανύσματος η προβολή του οποίου στον άξονα X δίνει την ταλάντωση $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Η προβολή στον άξονα Y αντιστοιχεί στο φανταστικό μέρος $iA \sin(\omega_0 t + \varphi)$ της ταλάντωσης που συνοδεύει το πραγματικό (Εξίσωση 1.4).

Μία τέτοια αρμονική κίνηση μπορεί να παρασταθεί γεωμετρικά από ένα διάγραμμα περιστρεφόμενου διανύσματος που έχει σταθερή αρχή και σταθερό μέτρο ίσο με το πλάτος A της ταλάντωσης που αντιπροσωπεύει. Το άλλο άκρο, όμως, του διανύσματος κινείται σε κυκλική τροχιά με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ίση με τη συχνότητα ω_0 της ταλάντωσης (Σχήμα 1.1). Στην αρχική του θέση ($t = 0$), το διάνυσμα σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα X ίση με τη σταθερά φάσης της ταλάντωσης. Είναι προφανές ότι η γωνία που θα γράψει το διάνυσμα σε χρόνο t (σε σχέση με την αρχική του θέση) ισούται με $\omega_0 t$ με τη γωνία φάσης μετά από αυτόν τον χρόνο να γίνεται $\omega_0 t + \varphi$. Καθώς το διάνυσμα περιστρέφεται, η προβολή του στον άξονα X εκτελεί αρμονική κίνηση (ταλάντωση) πάνω σ' αυτόν τον άξονα, γύρω από μία θέση ισορροπίας που συμπίπτει με την αρχή του διανύσματος. Η απόσταση της προβολής από την αρχή του διανύσματος είναι πάντοτε $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Τέτοια διαγράμματα είναι

ιδιαίτερα χρήσιμα όταν μελετώνται περισσότερες της μιας ταλαντώσεις της ίδιας συχνότητας, καθώς και για την απεικόνιση των σχετικών φάσεων μεταξύ μετατόπισης $x(t)$, ταχύτητας $v(t)$ και επιτάχυνσης $\alpha(t)$. Σε ένα τέτοιο σύνθετο διάγραμμα, η ταχύτητα προηγείται της μετατόπισης κατά $\pi/2$, ενώ η επιτάχυνση προηγείται της ταχύτητας επίσης κατά $\pi/2$.

1.2 Χρήση μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων στις αρμονικές ταλαντώσεις

Στο διάγραμμα του Σχήματος 1.1, εκτός από την προβολή του περιστρεφόμενου διανύσματος στον άξονα X και η προβολή του διανύσματος στον άξονα Y εκτελεί επίσης ταλαντωτική κίνηση πάνω σ' αυτόν τον άξονα και γύρω από το κέντρο του κύκλου. Συνεπώς, το περιστρεφόμενο διάνυσμα μπορεί να οριστεί σε κάθε στιγμή από από το άθροισμα των ορθογωνίων συνιστωσών:

$$\mathbf{r}(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \hat{x} + A \sin(\omega_0 t + \varphi) \hat{y} \quad (1.3)$$

Γενικεύοντας την εξίσωση (1.3), η ταλάντωση που αντιπροσωπεύει το περιστρεφόμενο διάνυσμα μπορεί να περιγραφεί από μία μιγαδική μετατόπιση $z(t)$ που είναι συνδυασμός των μετατοπίσεων $x(t)$ (πραγματικό μέρος της ταλάντωσης) και $y(t)$ (φανταστικό μέρος) και δίνεται από τη σχέση:

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + i A \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (1.4)$$

όπου i είναι η φανταστική μονάδα ($i^2 = -1$). Με τη βοήθεια της σχέσης του Euler:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha \quad (1.5)$$

μπορούμε να μετασχηματίσουμε την (1.4) σε μία πιο εύχρηστη μιγαδική εκθετική μορφή:

$$z(t) = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)} \quad (1.6)$$

Οι σχέσεις (1.4) και (1.6) χρησιμοποιούνται για τη μελέτη των ταλαντώσεων με την προϋπόθεση ότι, από φυσικής σκοπιάς, μία ταλάντωση περιγράφεται από το πραγματικό της μέρος $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Η εκθετική μορφή (1.6) παρέχει έναν άισιτερα χρήσιμο τρόπο επεξεργασίας της αρμονικής ταλάντωσης με κύριο πλεονέκτημα την ευκολία με την οποία μπορεί να διαφοριστεί ή ολοκληρωθεί. Για τον υπολογισμό της ταχύτητας, βρίσκουμε την παράγωγο της $z(t)$ ως προς τον χρόνο (Εξισ. 1.6)

$$v(t) = i \omega_0 A e^{i(\omega_0 t + \varphi)} \quad (1.7)$$

και θεωρούμε το πραγματικό μέρος της (1.7).

Ένας επιπλέον λόγος που δικαιολογεί τη χρήση μιγαδικών εκθετικών συναρτήσεων στη μελέτη των ταλαντώσεων διαπιστώνεται αν θέσουμε στη διαφορική εξίσωση (1.1) μια εκθετική δοκιμαστική λύση της μορφής: $x = C e^{\alpha t}$, οπότε έχουμε ότι $(d^2 x / dt^2) = C \alpha^2 e^{\alpha t}$ και με αντικατάσταση στην (1.1) προκύπτει ότι πρέπει να ικανοποιείται η σχέση:

$$C e^{\alpha t} (\alpha^2 + s/m) = 0 \rightarrow \alpha^2 + s/m = 0 \rightarrow \alpha = \pm (-s/m)^{1/2} = \pm i \omega_0 \quad (1.8)$$

Από τις δύο τιμές του α , προκύπτουν οι μερικές λύσεις: $x(t) = C e^{i \omega_0 t}$, ή $x(t) = C e^{-i \omega_0 t}$ και η γενική λύση προκύπτει από τον γραμμικό συνδυασμό των δύο ιδικών λύσεων:

$$x(t) = C_1 e^{i \omega_0 t} + C_2 e^{-i \omega_0 t} = C_1 \cos \omega_0 t + i C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t - i C_2 \sin \omega_0 t \quad (1.9)$$

Στην (1.9) έγινε ανάπτυξη των εκθετικών συναρτήσεων σε τριγωνομετρικές σύμφωνα με την (1.5). Από την (1.9) φαίνεται ότι το πραγματικό μέρος της λύσης είναι της μορφής $x(t) = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t = (C_1 + C_2) \cos \omega_0 t = A \cos \omega_0 t$ η οποία συνάδει με τη γενική λύση (1.2).

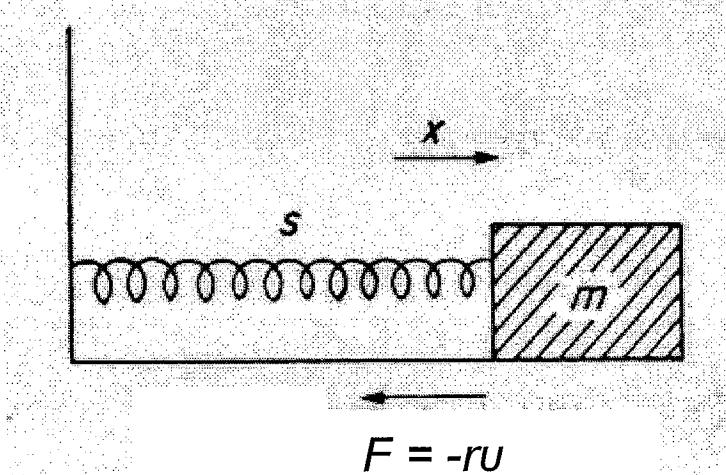
1.3 Ταλαντωτής ελατηρίου με απόσβεση

Αν σε ένα απλό αρμονικό ταλαντωτή μάζας m και ελατηρίου s (Σχήμα 1.2) υπάρχει εκτός από τη δύναμη ελαστικότητας $F_{el} = -sx$ και δύναμη τριβής (αντίστασης), τότε είναι προφανές ότι το σύστημα θα έχει συνεχώς απώλειες ενέργειας και αν προκύψει ταλαντωτική κίνηση, θα είναι φθίνουσα ή ταλάντωση με απόσβεση. Η πλέον συνήθης δύναμη απόσβεσης είναι τύπου ιξώδους με τη δύναμη να είναι ανάλογη της ταχύτητας της μάζας $F_{sp} = -rv$ και να αντιτίθεται συνεχώς στην κίνηση, όπου r η σταθερά αντίστασης ή απώλειας αντίσταση. Η τιμή της αντίστασης, που δίνεται σε μονάδες $N \cdot m^{-1} \cdot s = kg \cdot s^{-1}$, μπορεί να προσαρμοστεί κατάλληλα αλλάζοντας το υλικό με το οποίο έρχεται σε επαφή η μάζα του ταλαντωτή. Η εξίσωση κίνησης του ταλαντωτή με απόσβεση περιλαμβάνει έναν επιπλέον όρο σε σχέση με την (1.1):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_{el} + F_{sp} = -sx - r \frac{dx}{dt} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{s}{m} x = 0 \quad (1.10)$$

Η εξίσωση (1.10) είναι γραμμική, ομογενής με σταθερούς συντελεστές. Συνεπώς, μπορούμε να θέσουμε στην (1.10) τη δοκιμαστική λύση $x = Ce^{\alpha t}$ μαζί με την πρώτη και δεύτερη παράγωγό της ($dx/dt = C\alpha e^{\alpha t}$, $d^2x/dt^2 = C\alpha^2 e^{\alpha t}$), οπότε:

$$Ce^{\alpha t} [\alpha^2 + (r/m)\alpha + (s/m)] = 0 \rightarrow \alpha^2 + (r/m)\alpha + \omega_0^2 = 0 \quad (1.11)$$



Σχήμα 1.2. Αρμονικός ταλαντωτής μάζας m και ελατηρίου s με απόσβεση που προσδίνεται από δύναμη τριβής $F = -rv$ και αντιτίθεται πάντοτε στην κατεύθυνση κίνησης της μάζας.

Η σχέση (1.11) αποτελεί μία δευτεροβάθμια αλγεβρική εξίσωση με δύο λύσεις:

$$\alpha_{1,2} = -(r/2m) \pm [(r^2/4m^2) - \omega_0^2]^{1/2} = -\gamma \pm (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} \quad (1.12)$$

όπου έχουμε ορίσει την ποσότητα $\gamma = r/2m$ που έχει διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου (s^{-1}). Ανάλογα με τις σχετικές τιμές των γ και ω_0 , η διακρίνουσα στο δεξί μέλος της (1.12) μπορεί να είναι θετική, αρνητική ή μηδέν με συνέπεια να υπάρχουν σημαντικές διαφορές ως προς την φύση της κίνησης στις τρεις περιπτώσεις. Διακρίνουμε την ασθενή απόσβεση ($\gamma < \omega_0$), την υπεραπόσβεση ($\gamma > \omega_0$) και την κρίσιμη απόσβεση ($\gamma = \omega_0$).

Ασθενής απόσβεση. Σ' αυτή την περίπτωση, η τετραγωνική ρίζα της αρνητικής ποσότητας στην (1.12) οδηγεί σε μιγαδικές λύσεις:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm i\omega', \text{ óπου } \omega' = (\omega_0^2 - \gamma^2)^{1/2} = \omega_0[1 - (\gamma/\omega_0)^2]^{1/2} = \sqrt{\left(\frac{s}{m} - \frac{r^2}{4m^2}\right)} \quad (1.13)$$

Η γενική λύση προκύπτει με αντικατάσταση των τιμών $\alpha_{1,2}$ στην $x = Ce^{\alpha t}$ και με γραμμικό συνδυασμό των δύο μερικών λύσεων:

$$x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} = C_1 e^{-\gamma t} e^{i\omega' t} + C_2 e^{-\gamma t} e^{-i\omega' t} = e^{-\gamma t} (C_1 e^{i\omega' t} + C_2 e^{-i\omega' t}) \quad (1.14)$$

Αν τώρα πάρουμε το πραγματικό μέρος της (1.14) θα προκύψει, μέσω της σχέσης (1.5) του Euler, η πιο συνήθης τριγωνομετρική μορφή:

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega' t + \varphi) \quad (1.15)$$

Είναι προφανές από τις (1.14) και (1.15) ότι η κίνηση είναι μία φθίνουσα ταλάντωση της οποίας το πλάτος μειώνεται εκθετικά με τον χρόνο. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι πρόκειται για μία αρμονική ταλάντωση της οποίας το πλάτος είναι $A_0 e^{-\gamma t}$, δηλαδή φθίνει με τον χρόνο, όπου A_0 το μέγιστο πλάτος. Οι παράμετροι A_0 και φ προκύπτουν από τις αρχικές συνθήκες. Η γωνιακή συχνότητα ω' μιας τέτοιας φθίνουσας ταλάντωσης είναι μικρότερη από την τιμή της ιδιοσυχνότητας ω_0 χωρίς απόσβεση ($\gamma = 0$). Όταν για παράδειγμα, $\gamma = \omega_0/20$, η ω' είναι μόνο κατά 0.1% μικρότερη της ω_0 . Σε αυτές τις περιπτώσεις ($\gamma \ll \omega_0$), η ω' μπορεί να υπολογιστεί από την προσεγγιστική μορφή της (1.13):

$$\omega' = \omega_0 [1 - 1/2(\gamma/\omega_0)^2] \quad (1.16)$$

Γενικά, όταν $\gamma \ll \omega_0$, μία κατάσταση γνωστή ως πολύ ασθενής απόσβεση, είναι αρκετά ακριβές να χρησιμοποιείται η ω_0 αντί της ω' .

Στη σχέση (1.15) θεωρώντας το πλάτος της ταλάντωσης και αντικαθιστώντας $\gamma = r/2m$, έχουμε:

$$A = A_0 e^{-\gamma t} = A_0 e^{-\frac{r}{2m}t} \quad (1.17)$$

Μετά από μία περίοδο T' , το πλάτος της ταλάντωσης θα έχει μειωθεί σε

$$A_1 = A_0 e^{-\frac{r}{2m}T'}, \text{ ή } A_0/A_1 = e^{\frac{rT'}{2m}} = e^\delta, \text{ óπου } \delta = (rT')/(2m) = (\pi r/m\omega') = \ln(A_0/A_1) \quad (1.18)$$

Το μέγεθος δ είναι γνωστό ως λογαριθμική μείωση πλάτους. Για δύο χρονικές στιγμές που απέχουν N περιόδους, θα έχουμε:

$$A_0/A_N = e^{\frac{NrT'}{2m}} = e^{N\delta} \rightarrow N\delta = \ln(A_0/A_N) \rightarrow \delta = (1/N) \ln(A_0/A_N) \quad (1.19)$$

Ο χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί το πλάτος στο $(1/e)$ της αρχικής του τιμής:

$$A_r = A_0 e^{-\frac{Nr}{2m}} = A_0 e^{-1} \rightarrow r = (2m)/r \quad (1.20)$$

είναι γνωστός ως χρόνος αποκατάστασης ή μέτρο εξασθένισης.

Απώλεια ενέργειας στην ταλάντωση με ασθενή απόσβεση. Η δύναμη απόσβεσης $F_{tp} = -rv$ που αντιτίθεται στην κίνηση αποσπά συνεχώς ενέργεια από το σύστημα την οποία δεν αποδίδει πίσω. Δεδομένου ότι $E = K + U = (1/2)mv^2 + (1/2)sx^2$, θα έχουμε:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dK}{dv} \frac{dv}{dt} + \frac{dU}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + sx \frac{dx}{dt} = (m \frac{d^2x}{dt^2} + sx) \frac{dx}{dt} \quad (1.21)$$

Όμως, από την (1.10) έχουμε $m(d^2x/dt^2) = -sx - r(dx/dt)$ και αντικαθιστώντας στην (1.21) βρίσκουμε:

$$\frac{dE}{dt} = -r \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = -rv^2 \leq 0 \quad (1.22)$$

Έτσι, η ενέργεια μειώνεται με τον χρόνο και αυτός είναι ο λόγος που οι ταλαντώσεις εικλείπουν τελικά. Από την (1.22) είναι προφανές ότι ο ρυθμός απώλειας ενέργειας αυξάνεται με αυξανόμενη αντίσταση. Η στιγμιαία συνολική ενέργεια του συστήματος μπορεί να υπολογιστεί εύκολα με αντικατάσταση της $x(t)$ από την (1.15) και της παραγώγου της, δηλαδή της $v(t)$, στην $E = (1/2)mv^2 + (1/2)sx^2$, αλλά δεν έχει νόημα να βρεθεί μια σχέση που θα περιέχει και τη χρονική διακύμανσή της κατά τη διάρκεια κάθε κύκλου. Έτσι, λαμβάνονται οι μέσες τιμές κάθε όρου που περιέχει τριγωνομετρική συνάρτηση κατά τη διάρκεια ενός πλήρους κύκλου, μια διαδικασία που οδηγεί στη μέση ενέργεια $\langle E \rangle$ σε βάθος χρόνου. Από τους εν λόγω υπολογισμούς προκύπτει ότι:

$$\langle E \rangle \approx (1/2)m\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma t} = (1/2)m\omega_0^2 A_0^2 e^{-\frac{r}{m}t} = E_0 e^{-\frac{r}{m}t} \quad (1.23)$$

όπου $E_0 = (1/2)m\omega_0^2 A_0^2 = (1/2)sA_0^2$, η αρχική ενέργεια του συστήματος. Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας βρίσκεται εύκολα ίσος με:

$$\frac{d \langle E \rangle}{dt} = -m\gamma\omega_0^2 A_0^2 e^{-2\gamma t} \quad (1.24)$$

και ο κλασματικός ρυθμός απώλειας ενέργειας:

$$\frac{1}{\langle E \rangle} \frac{d \langle E \rangle}{dt} = -2\gamma = -(r/m) = -(2/t_r) \quad (1.25)$$

Ο χρόνος που απαιτείται για να μειωθεί η ενέργεια $\langle E \rangle$ στο $(1/e)$ της αρχικής της τιμής E_0 βρίσκεται εύκολα από την (1.23): $E_0 e^{-\frac{r}{m}t_1} = E_0 e^{-1} \rightarrow t_1 = m/r = (t_r/2) = 1/(2\gamma)$, δηλαδή είναι το αντίστροφο του κλασματικού ρυθμού απώλειας ενέργειας (σχέση 1.25). Κατά τη διάρκεια αυτού του χρόνου, η γωνία φάσης έχει προχωρήσει (από την αρχική ϕ , σχέση 1.15) κατά:

$$Q = \omega' t_1 = \omega' (m/r) = \omega'/2\gamma \quad (1.26)$$

Το χαρακτηριστικό μέγεθος Q είναι γνωστό ως παράγων ή συντελεστής ποιότητας και είναι ίσο, εξ ορισμού, με τον αριθμό των ακτινίων που απαιτείται να ταλαντωθεί το σύστημα έτσι ώστε να μειωθεί η ενέργειά του στο $1/e$ της αρχικής. Ο παράγων ποιότητας είναι καθαρός αριθμός και αντιπροσωπεύει ένα μέτρο του βαθμού απόσβεσης και πιο συγκεκριμένα, παίρνει τόσο μεγαλύτερες τιμές, όσο πιο ασθενής είναι η απόσβεση. Στην περίπτωση της πολύ ασθενούς απόσβεσης ($\gamma < \omega_0$, $\omega' \approx \omega_0$), ο παράγων ποιότητας μπυρεί να υπολογιστεί από την ακόλουθη προσεγγιστική έκφραση της (1.26):

$$Q = \omega_0(m/r) = \omega_0/2\gamma \quad (1.27)$$

Υπεραπόσβεση. Επιστρέφουμε στην (1.12) και εξετάζουμε τι συμβαίνει όταν $\gamma > \omega_0$. Οι δύο τιμές $\alpha_{1,2}$ είναι πραγματικές και αρνητικές:

$$\alpha_{1,2} = -\gamma \pm (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} = -\mu_{1,2}, \text{ όπου } \mu_1 = \gamma + (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} \text{ και } \mu_2 = \gamma - (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2} \quad (1.28)$$

Οι ποσότητες μ_1, μ_2 είναι θετικές και ονομάζονται σταθερές εξασθένισης. Από τις (1.28) προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις: $\mu_1 > \gamma > \mu_2$ και $\mu_1\mu_2 = \omega_0^2$, $\mu_1 > \omega_0$, καθώς και $\mu_2 < \omega_0$. Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.10) για την περίπτωση της υπεραπόσβεσης θα προκύψει με αντικατάσταση των $a_{1,2} (= -\mu_{1,2})$ στην $x = Ce^{\alpha t}$ και γραμμικό συνδυασμό των δύο μερικών λύσεων:

$$x(t) = C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t} \quad (1.29)$$

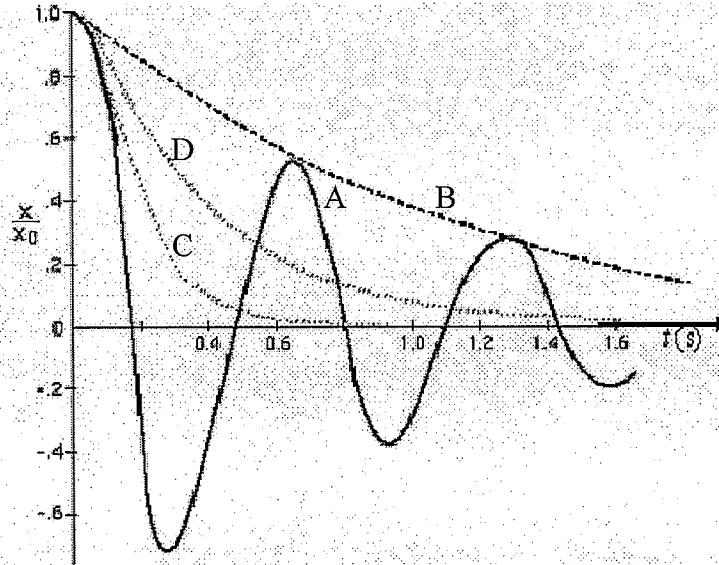
όπου οι σταθερές C_1 και C_2 εξαρτώνται από τις αρχικές συνθήκες. Αν για $t = 0$, έχουμε $x = x_0$ και $v = v_0$, αντικατάσταση των συγκεκριμένων αρχικών συνθηκών στην (1.29) και στην πρώτη παράγωγό της ως προς t δίνει τις ακόλουθες σχέσεις:

$$C_1 = -\frac{\mu_2 x_0 + v_0}{\mu_1 - \mu_2}, \quad C_2 = \frac{\mu_1 x_0 + v_0}{\mu_1 - \mu_2} \quad (1.30)$$

Αν επιλέξουμε $v_0 = 0$, τότε οι (1.30) γίνονται: $C_1 = -\mu_2 x_0 / (\mu_1 - \mu_2)$, $C_2 = \mu_1 x_0 / (\mu_1 - \mu_2)$ και η (1.29) γράφεται ως εξής (θέτοντας $x_0 = A$):

$$x(t) = \frac{A(\mu_1 e^{-\mu_2 t} - \mu_2 e^{-\mu_1 t})}{\mu_1 - \mu_2} \quad (1.31)$$

Ο δεύτερος όρος στην (1.31) με τη μεγαλύτερη σταθερά εξασθένισης μ_1 φθίνει γρηγορότερα απ'ότι ο πρώτος, έτσι που μετά από πάροδο κάποιου χρόνου η παραπάνω σχέση να αντιστοιχεί σε μία απλή κίνηση εκθετικής εξασθένισης της μορφής:



Σχήμα 1.3. Κινήσεις συστήματος μάζας m -ελατηρίου s με απόσβεση για τρεις διαφορετικές τιμές της αντίστασης r : A: Ασθενής απόσβεση ($\gamma = r/2m < \omega_0$) που αντιστοιχεί σε ταλαντωτική κίνηση (Εξίσωση 1.15). C: Κρίσιμη απόσβεση ($\gamma = r/2m = \omega_0$) που επαναφέρει το σύστημα σε ηρεμία γρηγορότερα από κάθε άλλη διαδικασία απόσβεσης και αντιστοιχεί σε απειροδική κίνηση, Εξίσωση). D: Υπεραπόσβεση ($\gamma = r/2m > \omega_0$), αντιπροσωπεύει απεριοδική κίνηση (Εξίσωση 1.31). Η καμπύλη B είναι η περιβάλλουσα του πλάτους $A = A_0 e^{-\gamma t}$ στην Εξίσωση (1.15) της ταλαντωτικής κίνησης.

$$x(t) \approx \frac{A\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2 t} \quad (1.32)$$

Αμφότερες οι σχέσεις (1.31) και (1.32) δεν αντιπροσωπεύουν ταλαντωτικές αλλά απεριοδικές κινήσεις. Η (1.31) θα είναι διαφορετική σε περίπτωση που οι αρχικές συνθήκες έναρξης της κίνησης αλλάξουν.

Κρίσιμη απόσβεση ($\gamma = \omega_0$). Ποιά θα είναι η οριακή μορφή της σχέσης (1.31) όταν η παράμετρος $\gamma = r/2m$ τείνει προς την κρίσιμη τιμή ω_0 ? Τότε οι σχέσεις (1.28) απλοποιούνται στην: $\mu_1 = \mu_2 = \gamma = \omega_0$. Αν αυτές οι συνθήκες εφαρμοστούν απ' ευθείας στην (1.31), η $x(t)$ γίνεται απροσδιόριστη διότι αμφότεροι ο αριθμητής και ο παρανομαστής γίνονται μηδέν. Είναι δυνατόν να υπολογίσουμε το όριο της $x(t)$ από την (1.31) θέτοντας: $\omega_1 = (\gamma^2 - \omega_0^2)^{1/2}$, οπότε $\mu_1 = \omega_0 + \omega_1$ και $\mu_2 = \omega_0 - \omega_1$ (λαμβάνοντας υπόψην και τις 1.28). Από τις δύο τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι $\mu_1 - \mu_2 = 2\omega_1$. Με βάση αυτές τις σχέσεις η (1.31) γράφεται:

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_1} [(\omega_0 + \omega_1)e^{-(\omega_0 - \omega_1)t} - (\omega_0 - \omega_1)e^{-(\omega_0 + \omega_1)t}], \quad \text{ή} \quad (1.33)$$

$$x(t) = \frac{A}{2\omega_1} [\omega_0(e^{\omega_1 t} - e^{-\omega_1 t}) + \omega_1(e^{\omega_1 t} + e^{-\omega_1 t})] e^{-\omega_0 t} \quad (1.34)$$

Όταν η $\omega_1 \rightarrow 0$ (ή $\gamma \rightarrow \omega_0$), η ποσότητα $(e^{\omega_1 t} - e^{-\omega_1 t})$ τείνει στο όριο $2\omega_1 t$, ενώ η ποσότητα $(e^{\omega_1 t} + e^{-\omega_1 t})$ τείνει στο όριο 2 (Αντά τα όρια υπολογίζονται με ανάπτυξη των εκθετικών συναρτήσεων σε σειρές MacLaurin και παίρνοντας την προσέγγιση μέχρι δεύτερο όρο). Συνεπώς, για $\omega_1 \rightarrow 0$, η (1.34) γίνεται:

$$x(t) = A(1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \quad (1.35)$$

Υπενθυμίζεται ότι η σχέση (1.31) για την υπεραπόσβεση που χρησιμοποιήθηκε ως αφετηρία για την εξαγωγή της (1.35) της κρίσιμης απόσβεσης αντιστοιχεί σε συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες: για $t = 0$, έχουμε $x(0) = x_0 = A$ και $v(0) = 0$. Αν αλλάξουν οι αρχικές συνθήκες, οι σχέσεις που δίνουν τα $x(t)$ για την υπεραπόσβεση και την κρίσιμη απόσβεση θα είναι διαφορετικές.

Στο Σχήμα 1.3 δίνονται οι καμπύλες των $x(t)$ για ένα δεδομένο σύστημα μάζας m -ελατηρίου s (αλλά με μεταβλητή αντίσταση) στις περιπτώσεις ασθενούς απόσβεσης, υπεραπόσβεσης και κρίσιμης απόσβεσης. Στο ίδιο Σχήμα, για την τερίτωση της ασθενούς απόσβεσης (ταλαντωτική κίνηση), έχει χαραχθεί και η περιβάλλουσα που δίνει την εκθετική μείωση του πλάτους $A = A_0 e^{-\gamma t}$ με τον χρόνο. Από τη σύγκριση των καμπύλων B, C και D είναι προφανές ότι η γρηγορότερη δυνατή επάνοδος του συστήματος στη θέση ισορροπίας επιτυγχάνεται όταν το σύστημα τεθεί σε κίνηση υπό συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης. Αυτό επιβεβαιώνεται με σύγκριση των αντίστοιχων σχέσεων (1.15), (1.31) και (1.35). Πρώτα, από τις (1.15) και (1.35) προκύπτει ότι ο βαθμός εξασθένισης της $x(t)$ στην κρίσιμη απόσβεση είναι μεγαλύτερος του βαθμού μείωσης του πλάτους $A = A_0 e^{-\gamma t}$ της ασθενούς απόσβεσης και αυτό συμβαίνει διότι ο συντελεστής εξασθένισης γ (σχέση 1.15) είναι μικρότερος του αντίστοιχου συντελεστή εξασθένισης ω_0 (σχέση 1.35). Εξάλλου, σε σύγκριση των (1.31) και (1.35), παρατηρούμε ότι μακροπρόθεσμα (όταν ο δεύτερος όρος στην 1.31 θα είναι αμελητέος), η $x(t)$ θα φθίνει γρηγορότερα στην κρίσιμη απόσβεση απ' ό,τι στην υπεραπόσβεση αφού $\omega_0 > \mu_2$.

2. ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ - ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ

2.1 Πλάτος εξαναγκασμένων ταλαντώσεων

Αν στο σύστημα του αρμονικού ταλαντωτή μάζας (m) – ελατηρίου (s) με απόσβεση (Σχήμα 1.2) ασκηθεί εξωτερική διεγείρουσα δύναμη αρμονικής εξάρτησης, $F = F_0 \cos \omega t$, η εξίσωση κίνησης της μάζας του ταλαντωτή γίνεται:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -sx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{s}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (2.1)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $y = r/2m$ και $\omega_0 = (s/m)^{1/2}$, καθώς και ότι η εξωτερική δύναμη μπορεί να εκφραστεί, ισοδύναμα, ως $F_0 e^{i\omega t}$, τότε η (2.1) γράφεται:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \quad (2.2)$$

Δεδομένου ότι υπάρχει απόσβεση, είναι αναμενόμενο ότι η εξωτερική δύναμη θα επιβάλλει τη συχνότητά της στον ταλαντωτή μετά από κάποιο χρονικό διάστημα και έτσι στη μόνιμη κατάσταση μπορούμε να υποθέσουμε πως η μετατόπιση θα δίνεται από την

$$x(t) = A \cos(\omega t - \varphi) = A e^{i(\omega t - \varphi)} \quad (2.3)$$

όπου A είναι το πλάτος των ταλαντώσεων στη μόνιμη κατάσταση και φ η καθυστέρηση φάσης της μετατόπισης σε σχέση με τη διεγείρουσα δύναμη. Θεωρούμε την (2.3) μερική (δοκιμαστική) λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.2) και υπολογίζουμε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της $x(t)$ ως προς t .

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = i\omega A e^{i(\omega t - \varphi)} = i\omega x(t) \quad (2.4)$$

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = i^2 \omega^2 A e^{i(\omega t - \varphi)} = -\omega^2 A e^{i(\omega t - \varphi)} = -\omega^2 x(t) \quad (2.5)$$

Αντικαθιστώντας τις (2.3), (2.4) και (2.5) στην (2.2) έχουμε:

$$(-\omega^2 A + i2\gamma\omega A + \omega_0^2 A) e^{i(\omega t - \varphi)} = (F_0/m) e^{i\omega t} \rightarrow (-\omega^2 A + i2\gamma\omega A + \omega_0^2 A) e^{i\omega t} e^{-i\varphi} = (F_0/m) e^{i\omega t} \text{ ή} \\ -\omega^2 A + i2\gamma\omega A + \omega_0^2 A = (F_0/m) e^{i\varphi} = (F_0/m)(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2.6)$$

Από την ανωτέρω μιγαδική σχέση προκύπτουν οι ακόλουθες δύο πλημματικές σχέσεις:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = (F_0/m) \cos \varphi, \quad 2\gamma\omega A = (F_0/m) \sin \varphi \quad (2.7)$$

Οι (2.7) αποτελούν σύστημα δύο εξισώσεων με αγνώστους το πλάτος $A(\omega)$ και τη γωνία φάσης $\varphi(\omega)$ και μπορεί να επιλυθεί βρίσκοντας τα εν λόγω μεγέθη ως συναρτήσεις της συχνότητας ω της εξωτερικής δύναμης:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \left[\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right]^{1/2} \quad (2.8)$$

$$\tan\phi(\omega) = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (2.9)$$

Πρώτα θα διερευνήσουμε τη σχέση (2.8) του πλάτους $A(\omega)$ για τις διάφορες τιμές που μπορεί να λάβει η συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης. Παρατηρούμε ότι όταν η ω προσεγγίζει την ω_0 έχουμε:

$$A(\omega_0) \approx \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\gamma\omega} = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{r\omega_0} \quad (2.10)$$

Για πολύ μικρές τιμές της ω (εξωτερικής συχνότητας), δηλαδή για $\omega \ll \omega_0$, ή $\omega \rightarrow 0$, η (2.8) γίνεται:

$$A(\omega \rightarrow 0) \approx \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{s} \quad (2.11)$$

Εξάλλου, για πολύ μεγάλες τιμές της ω ($\omega \gg \omega_0$), ο παρονομαστής στο ριζικό της (2.8) παίρνει ιδιαίτερα μεγάλες τιμές με συνέπεια το πλάτος να τείνει ασυμπτωτικά στο μηδέν, δηλαδή, $A(\omega \rightarrow \infty) \approx 0$.

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την τιμή της ω για την οποία το πλάτος των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων γίνεται μέγιστο, δηλαδή τη συχνότητα συντονισμού ω_r , υπολογίζουμε την πρώτη παράγωγο της (2.8) ως προς ω και στη συνέχεια την εξισώνουμε με το μηδέν [$dA(\omega)/d\omega = 0$]. Από αυτή τη διαδικασία προκύπτει ότι έχουμε συντονισμό όταν:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega'^2 - \gamma^2} = \sqrt{\omega' - \frac{r^2}{4m^2}} \quad (2.12)$$

Το τρίτο και τέταρτο σκέλος της (2.12) προκύπτουν αν λάβουμε υψηλή την (1.13) και την λύσουμε ως προς ω_0 . Από την (2.12) διαπιστώνουμε ότι ο συντονισμός επιτυγχάνεται σε συχνότητα μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα των ελεύθερων ταλαντώσεων χωρίς απόσβεση, δηλαδή, $\omega_r < \omega_0$. Αν η απόσβεση είναι ασθενής ($\gamma < \omega_0$), συγκρίνοντας τις (1.13) και (2.12) προκύπτει ότι: $\omega_r < \omega' < \omega_0$. Επιπλέον, από την (2.12) συμπεραίνεται ότι, καθώς η αντίσταση r αυξάνεται, η συχνότητα συντονισμού ω_r γίνεται συνεχώς μικρότερη (απομακρύνεται) από την ιδιοσυχνότητα ω_0 .

Η σχέση που δίνει το πλάτος συντονισμού (μέγιστο πλάτος) $A_r = (A_{max})$ προκύπτει με αντικατάσταση της (2.12) στην (2.8):

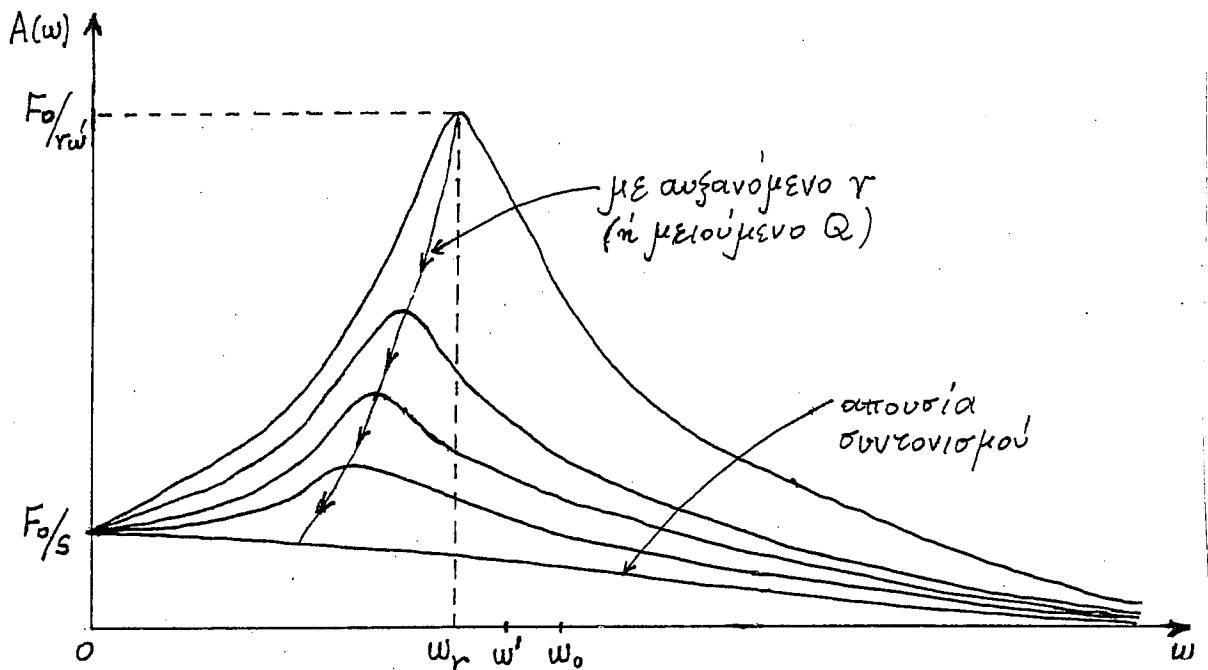
$$A_r = \frac{F_0/m}{2\gamma} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{F_0/m}{2\gamma\omega'} = \frac{F_0}{r\omega'} \quad (2.13)$$

Στο Σχήμα 2.1 δίνεται μία οικογένεια καμπύλων του πλάτους $A(\omega)$ συναρτήσει της συχνότητας της διεγείρουσας δύναμης ω για διάφορες τιμές της αντίστασης r . Εύκολα παρατηρείται ότι, καθώς αυξάνεται η αντίσταση r , η κορυφή του συντονισμού μετατοπίζεται προς την κατεύθυνση των χαμηλότερων συχνοτήτων.

Με ανάπτυξη και ακόλουθη ομαδοποίηση όρων στο ριζικό του παρονομαστή, η σχέση (2.8) γράφεται:

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m} \left[\frac{1}{\omega_0^4 + \omega^4 + 2\omega^2(2\gamma^2 - \omega_0^2)} \right]^{1/2} \quad (2.14)$$

Εύκολα διαπιστώνεται ότι η συνάρτηση $A(\omega)$ δεν έχει ακραία τιμή (γίνεται μονότονη φθίνοντας συνεχώς με αυξανόμενη ω) για $2\gamma^2 \geq \omega_0^2$ ή για $r \geq \sqrt{2sm}$. Συνεπώς, για τιμές της αντίστασης r μεγαλύτερες από την οριακή τιμή $r_{op} = \sqrt{2sm}$ δεν υπάρχει συντονισμός. Από τη συνθήκη για κρίσιμη απόσβεση ($\gamma = \omega_0$) και με δεδομένα ότι $\gamma = r/2m$ και $\omega_0 = \sqrt{s/m}$ προκύπτει ότι η αντίσταση του συστήματος για κρίσιμη απόσβεση πρέπει να είναι: $r_{kp} = \sqrt{4sm}$. Συγκρίνοντας τις r_{op} και r_{kp} συμπεραίνουμε ότι ένα σύστημα μάζας – ελατηρίου σε συνθήκες κρίσιμης απόσβεσης ή υπεραπόσβεσης δεν μπορεί να έλθει σε συντονισμό. Επιπρόσθετα, δεν υπάρχει συντονισμός και για τιμές r που αντιστοιχούν σε συνθήκες ασθενούς απόσβεσης, αλλά βρίσκονται στην περιοχή τιμών αντίστασης: $\sqrt{4sm} > r \geq \sqrt{2sm}$.



Σχήμα 2.1 Καμπύλες συντονισμού πλάτους μετατόπισης $A(\omega)$ με τη συνότητα ω της εξωτερικής δύναμης για διάφορες τιμές της αντίστασης r . Η κορυφή (συχνότητα) συνισμού ω , μετατοπίζεται προς χαμηλότερες τιμές καθώς αυξάνεται η αντίσταση. Ο συντονισμός γίνεται πιο έντονος καθώς μειώνεται η r . Για τιμές αντίστασης $r \geq \sqrt{2sm}$ δεν υπάρχει συντονισμός. Σημειώστε ότι $\omega_r < \omega' < \omega_0$.

Η ποιότητα (στενότητα) του συντονισμού έχει ως ποσοτικό μέτρο τον παράγοντα ποιότητας Q ($= \omega'm/r = \omega'/2\gamma$, Σχέση 1.26). Αν θέσουμε στην (2.13) $2\gamma = \omega'/Q$, βρίσκουμε:

$$A_r = \frac{F_0/m}{\omega'^2/Q} = Q \frac{F_0/m}{\omega'^2} \quad (2.15)$$

Όταν η απόσβεση είναι πολύ ασθενής, τότε $\omega' \approx \omega_0$ και αντικαθιστώντας στην (2.15) έχουμε:

$$A_r = Q \frac{F_0/m}{\omega_0^2} = Q \frac{F_0}{s} = QA(0) \quad (2.16)$$

Η ανωτέρω σχέση υποδηλώνει ότι για την περίπτωση της πολύ ασθενής απόσβεσης, στον συντονισμό έχουμε αύξηση του πλάτους πολύ χαμηλών συχνοτήτων ($\omega \ll \omega_0$) κατά το παράγοντα ποιότητας Q .

2.2 Καθυστέρηση μετατόπισης ως προς τη διεγείρουσα δύναμη

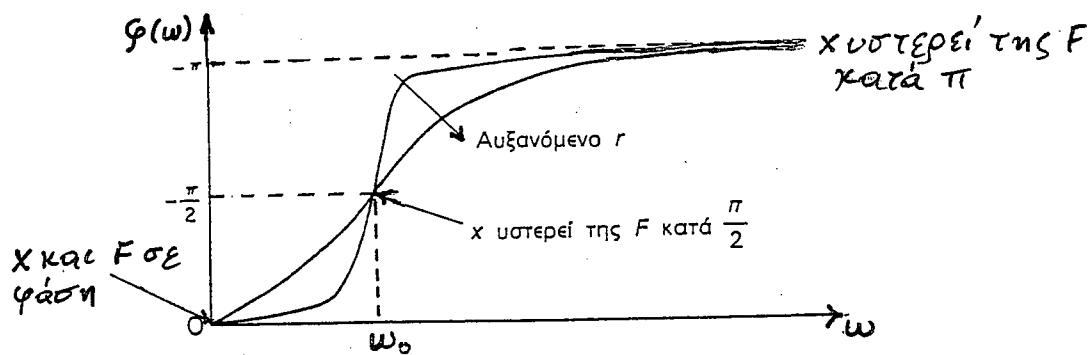
Από τη διερεύνηση της σχέσης (2.9) που δίνει τη γωνία φάσης $\phi(\omega)$ προκύπτουν τα εξής:

(α) Για πολύ χαμηλές συχνότητες ($\omega \ll \omega_0, \omega \rightarrow 0$), η (2.9) γίνεται: $\tan\phi(0) \approx 2\gamma\omega/\omega_0^2$ και αφού $\omega \rightarrow 0$, $\tan\phi(0) \approx 0$ και $\phi(0) \rightarrow 0$, δηλαδή η μετατόπιση είναι σε φάση με τη εξωτερική δύναμη.

(β) Για $\omega = \omega_0$, $\tan\phi(\omega_0) = \infty$ και $\phi(\omega_0) = \pi/2$, δηλαδή η μετατόπιση καθυστερεί της δύναμης κατά $\pi/2$. Αν η απόσβεση είναι πολύ ασθενής ($\gamma \ll \omega_0$), τότε από την (2.12) έχουμε ότι $\omega_r \approx \omega_0$ και μπορούμε να ισχυριστούμε ότι στον συντονισμό (πλάτους) η μετατόπιση καθυστερεί (με καλή προσέγγιση) της δύναμης κατά $\pi/2$.

(γ) Για πολύ υψηλές εξωτερικές συχνότητες ($\omega \gg \omega_0, \omega \rightarrow \infty$), από την (2.9) έχουμε: $\tan\phi(\omega \rightarrow \infty) \approx -2\gamma/\omega \approx -\omega$ και $\phi(\omega \rightarrow \infty) \rightarrow \pi$, που σημαίνει ότι η μετατόπιση είναι σε αντίθετη φάση (καθυστερεί) ως προς τη διεγείρουσα δύναμη.

Στο Σχήμα 2.2 φαίνεται η εξάρτηση της γωνίας φάσης $\phi(\omega)$ με τη συχνότητα ω της εξωτερικής δύναμης σε δλη την περιοχή τιμών: $0 \leq \omega \leq \infty$.



Σχήμα 2.2 Καθυστέρηση $\phi(\omega)$ της μετατόπισης $x(t)$ σε σχέση με τη εξωτερική δύναμη ως συνάρτηση της συχνότητας ω της δύναμης.

2.3 Πλάτος και συντονισμός ταχύτητας και επιτάχυνσης

Με βάση τη σχέση (2.4), το πλάτος της ταχύτητας $V(\omega)$ προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το πλάτος της μετατόπισης $A(\omega)$ με τη συχνότητα ω :

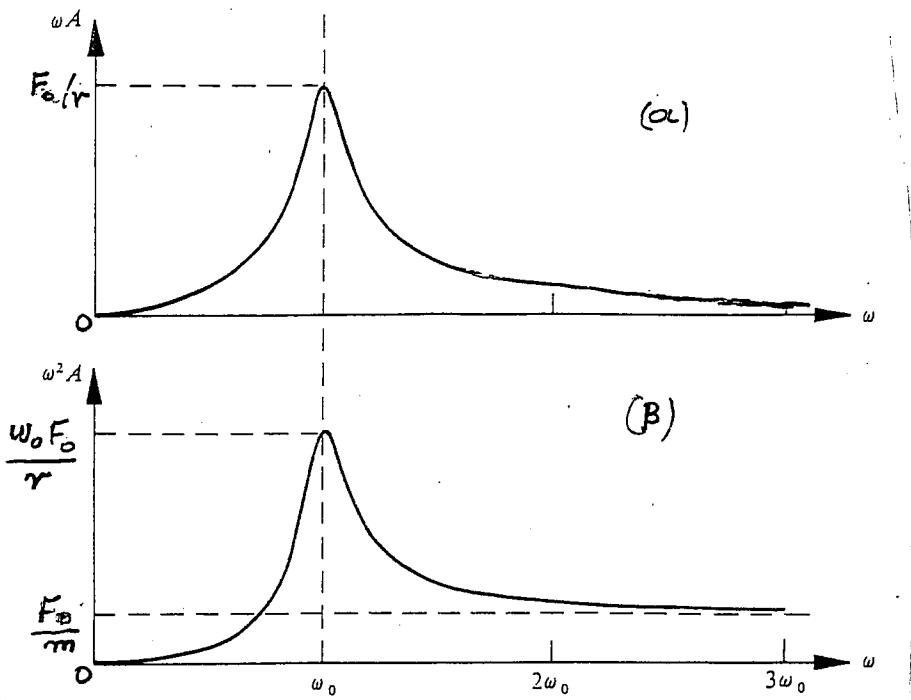
$$V(\omega) = \omega A(\omega) = \frac{F_0 \omega}{m} \left[\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right]^{1/2} \quad (2.16)$$

Υπολογίζοντας την $dV(\omega)/d\omega$ και εξισώνοντάς την με μηδέν, βρίσκουμε ότι η συχνότητα για την οποία επιτυγχάνεται συντονισμός ταχύτητας είναι: $\omega_{rv} = \omega_0$, ενώ το πλάτος της ταχύτητας στο συντονισμό γίνεται:

$$V_r = \frac{\omega_0 F_0}{m} \frac{1}{2\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{2\gamma m} = \frac{F_0}{r} \quad (2.17)$$

Για πολύ χαμηλές συχνότητες ω της εξωτερικής δύναμης ($\omega \ll \omega_0, \omega \rightarrow 0$), είναι προφανές από την (2.16) ότι $V(\omega \rightarrow 0) \approx 0$, ενώ για $\omega \gg \omega_0$ η (2.16) γίνεται:

$$V(\omega \rightarrow \infty) \approx \frac{\omega F_0}{m} \left(\frac{1}{\omega^4 + 4\gamma^2 \omega^2} \right)^{1/2} = \frac{F_0}{m} \left(\frac{1}{\omega^2 + 4\gamma^2} \right)^{1/2} \approx 0 \quad (2.18)$$



Σχήμα 2.3 Καμπύλες πλάτους ταχύτητας $\omega A(\omega)$ (α) και επιτάχυνσης $\omega^2 A(\omega)$ (β) ως συναρτήσεις της συχνότητας ω της εξωτερικής δύναμης. Σε αμφότερες τις περιπτώσεις, συντονισμός συμβαίνει σε συχνότητα $\omega = \omega_0$.

Δεδομένου ότι στις ταλαντώσεις η ταχύτητα προηγείται πάντοτε της μετατόπισης κατά $\pi/2$ και έχοντας υπόψη τις διαφορές φάσης μεταξύ μετατόπισης και δύναμης στις διάφορες περιοχές συχνοτήτων ω (βλέπε ενότητα 2.2), συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα προηγείται της δύναμης κατά $\pi/2$ στην περιοχή πολύ χαμηλών συχνοτήτων ($\omega \ll \omega_0$), είναι σε φάση στο συντονισμό ($\omega = \omega_0$) και υστερεί κατά $\pi/2$ στην περιοχή πολύ υψηλών συχνοτήτων ($\omega \gg \omega_0$). Στο Σχήμα 2.3α παρουσιάζεται το διάγραμμα εξάρτησης της ταχύτητας $V(\omega)$ με την ω .

Από τη σχέση (2.5) προκύπτει ότι το πλάτος της επιτάχυνσης είναι:

$$\alpha(\omega) = \omega^2 A(\omega) = \frac{F_0 \omega^2}{m} \left[\frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 \right)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right]^{1/2} \quad (2.19)$$

Όπως στην περίπτωση της ταχύτητας, έτσι και για την επιτάχυνση συντονισμός επιτυγχάνεται σε συχνότητα $\omega_{ra} = \omega_0$ με πλάτος συντονισμού:

$$\alpha_r = \frac{\omega_0^2 F_0}{m} \frac{1}{2\gamma\omega_0} = \frac{\omega_0 F_0}{2\gamma m} = \frac{\omega_0 F_0}{r} \quad (2.20)$$

Για πολύ χαμηλές συχνότητες ($\omega \ll \omega_0$), από την (2.19) προκύπτει ότι $\alpha(\omega \rightarrow 0) \approx 0$, ενώ για $\omega \gg \omega_0$ έχουμε:

$$\alpha(\omega \rightarrow \infty) \approx \frac{\omega^2 F_0}{m} \left(\frac{1}{\omega^4 + 4\gamma^2 \omega^2} \right)^{1/2} \approx \frac{\omega^2 F_0}{m} \left(\frac{1}{\omega^4} \right)^{1/2} = \frac{F_0}{m} \quad (2.21)$$

Στην σχέση (2.21) έχει αγνοηθεί ο όρος $4\gamma^2 \omega^2$ καθώς είναι αμελητέος σε σχέση με το όρο ω^4 .

Αν λάβουμε υπόψη ότι $2\gamma = \omega/Q$ (σχέση 1.26) και θεωρήσουμε την περίπτωση της πολύ ασθενούς απόσβεσης ($\omega' \approx \omega_0$), η σχέση (2.20) γράφεται:

$$\alpha_r = Q \frac{\omega_0 F_0}{\omega' m} = Q \frac{F_0}{m} = Q \alpha(\omega) \quad (2.22)$$

Η ανωτέρω σχέση υποδηλώνει ότι το πλάτος της επιτάχυνσης στο συντονισμό είναι αυξημένο κατά τον παράγοντα Q σε σχέση με το πλάτος $\alpha(\omega)$ στις πολύ υψηλές συχνότητες. Το διάγραμμα που δίνει τη μεταβολή του πλάτους της επιτάχυνσης με τη συχνότητα ω φαίνεται στο Σχήμα 2.3β. Έχοντας υπόψη ότι η επιτάχυνση προηγείται της μετατόπισης κατά π , γίνεται προφανές ότι θα προηγείται της δύναμης επίσης κατά π στην περιοχή των πολύ χαμηλών συχνοτήτων ($\omega \rightarrow 0$), θα προηγείται κατά $\pi/2$ στο συντονισμό ($\omega = \omega_0$) και θα είναι σε φάση για πολύ υψηλές συχνότητες ($\omega \rightarrow \infty$).

2.4 Απορρόφηση ισχύος

Εφ' όσον υπάρχει απόσβεση, για να συνεχίσει το σύστημα να ταλαντώνεται, πρέπει να του παρέχεται συνεχώς ενέργεια από την διεγέρουσα δύναμη \dot{W} με την ενέργεια που καταναλώνεται για την υπερνίκηση της δύναμης τριβής. Το έργο ΔW που καταναλώνεται για τη μετατόπιση της μάζας κατά Δx είναι: $\Delta W = -F_{tp}\Delta x$ και ο ρυθμός κατανάλωσης θα είναι: $(\Delta W/\Delta t) = -F_{tp}(\Delta x/\Delta t)$. Στο όριο $\Delta t \rightarrow 0$, ο λόγος $(\Delta W/\Delta t)$ τείνει στην παράγωγο (dW/dt) που αντιπροσωπεύει τη στιγμιαία ισχύ που καταναλώνεται:

$$P = -F_{tp} \frac{dx}{dt} = r \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = r(\omega A)^2 \sin^2(\omega t - \phi) \quad (2.23)$$

Στην εξαγωγή της σχέσης (2.23) χρησιμοποιήθηκαν οι εκφράσεις $F_{tp} = -r(dx/dt)$ και $v(t) = (dx/dt) = \omega A \sin(\omega t - \phi)$ όπου η τελευταία προκύπτει με παραγώγιση της (2.3) ως προς t .

Εκείνο που ενδιαφέρει περισσότερο δεν είναι η εξάρτηση της στιγμιαίας ισχύος με τον χρόνο, αλλά η μέση απορροφούμενη ισχύ (για έναν πλήρη κύκλο της ταλάντωσης) που απαιτείται για τη διατήρηση της ταλάντωσης:

$$\langle P \rangle = r(\omega A)^2 \langle \sin^2(\omega t - \phi) \rangle_T = \frac{r(\omega A)^2}{2} \quad (2.24)$$

Αντικαθιστώντας το $A(\omega)$ από την (2.14), η ανωτέρω (2.24) γίνεται:

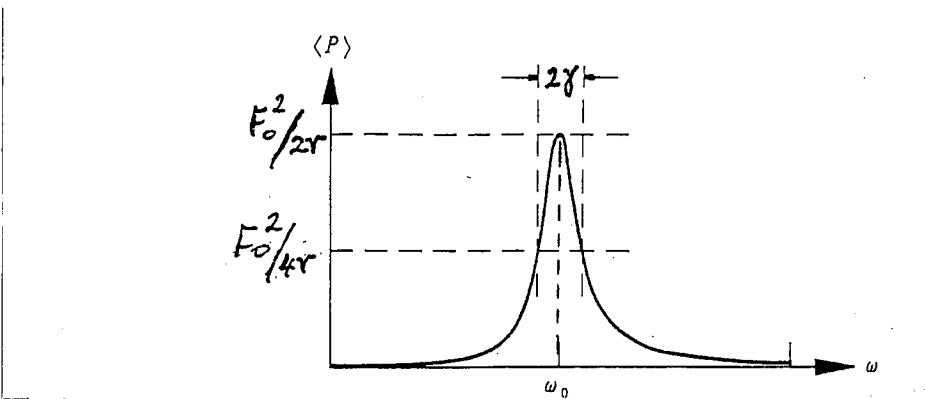
$$\langle P \rangle = \frac{r\omega^2 F_0^2}{2m^2} \left\{ \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right\} = \frac{F_0^2}{m} \left\{ \frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \right\} \quad (2.25)$$

Η μέγιστη απορροφούμενη ισχύς (ισχύς συντονισμού) συμβαίνει σε συχνότητα $\omega_{rp} = \omega_0$, όπως εύκολα διαπιστώνεται βρίσκοντας την παράγωγο $d\langle P \rangle/d\omega$ και εξισώνοντάς την με το μηδέν. Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή στη σχέση (2.25) βρίσκουμε την ισχύ συντονισμού:

$$\langle P \rangle_r = \frac{\gamma\omega_0^2 F_0^2}{4\gamma^2 \omega_0^2 m} = \frac{F_0^2}{4\gamma m} = \frac{F_0^2}{2r} \quad (2.26)$$

Για πολύ χαμηλές συχνότητες ($\omega \ll \omega_0$) στον παρονομαστή της (2.25) μπορεί να αγνοηθεί η ποσότητα ω^2 σε σχέση με την ω_0^2 καθώς και ο όρος $4\gamma^2 \omega^2$, οπότε η (2.25) μπορεί να γραφεί με πολύ καλή προσέγγιση: $\langle P \rangle \approx (\gamma\omega^2 F_0^2)/(m\omega_0^2)$ και για $\omega \rightarrow 0$, έπειτα ότι και $\langle P \rangle \rightarrow 0$. Εξάλλου, για πολύ υψηλές συχνότητες ($\omega \gg \omega_0$), τώρα στον παρονομαστή της (2.25) μπορεί να αγνοηθεί η ποσότητα ω_0^2 , οπότε: $\langle P \rangle \approx (\gamma F_0^2)/m(\omega^2 + 4\gamma^2)$ και για $\omega \rightarrow \infty$, προκύπτει επίσης ότι $\langle P \rangle \rightarrow 0$. Η εξάρτηση της μέσης απορροφούμενης ισχύος από τη συχνότητα ω δίνεται στο διάγραμμα του Σχήματος 2.4. Μπορεί να δειχθεί από την (2.25) ότι το πλήρες εύρος συχνοτήτων όπου η ισχύς μειώνεται στο μισό της ισχύος συντονισμού είναι ίσο με 2γ .

Το εύρος 2γ (ή απλώς το γ) αποτελεί επίσης ένα μέτρο της ποιότητας (στενότητας) συντονισμού, δηλαδή, όσο μικρότερη είναι η τιμή του, τόσο πιο έντονος (οξύς) είναι ο συντονισμός. Δεδομένου του ορισμού της παραμέτρου $\gamma = r/2m$, μικρές τιμές του εύρους αντιστοιχούν σε μικρές τιμές της αντίστασης r , γεγονός που συνάδει με τις μεγάλες τιμές του παράγοντα ποιότητας $Q = \omega^2 m/r$ στις περιπτώσεις πολύ ασθενούς απόσβεσης που αντιστοιχούν σε έντονο συντονισμό (βλέπε εδάφιο 2.1 και Σχήμα 2.1)



Σχήμα 2.4 Απορροφούμενη μέση ισχύς $\langle P \rangle$ ως συνάρτηση της συχνότητας ω της εξωτερικής δύναμης απ' όπου φαίνεται ότι συντονισμός ισχύος συμβαίνει σε συχνότητα $\omega = \omega_0$. Το εύρος της καμπύλης συντονισμού ισχύος (πλήρες εύρος συχνοτήτων στο οποίο η ισχύς μειώνεται στο μισό της ισχύος συντονισμού) είναι 2γ και αποτελεί ένα μέτρο της ποιότητας (οξύτητας) του συντονισμού.