

ΑΡΧΕΣ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΥ ΤΩΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΩΝ ΙΙ



ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ

ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΣΤΑΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΔΙΑΚΡΙΣΗ
ΦΟΡΤΙΩΝ-ΣΤΗΡΙΞΕΩΝ-ΕΠΙΠΤΟΝΗΣΕΩΝ

ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΑΝΤΙΔΡΑΣΕΩΝ
ΚΑΙ ΑΝΤΟΧΩΝ

ΑΝΤΟΧΕΣ ΟΜΟΓΕΝΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

1. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΤΩΝ ΔΡΑΣΕΩΝ

ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΣΤΑΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται η μεθοδολογία για τον υπολογισμό των δράσεων προκειμένου για μεμονωμένους φορείς.

Η μεθοδολογία για πλαισιακούς φορείς (περίπτωση δοκών μεγάλων ανοιγμάτων ή σχεδιασμού για πλευρικά φορτία) δίνεται στον Τόμο 3: «Σχεδιασμός Ειδικών Φορέων».

1.1 Εντοπισμός Στατικού Συστήματος

Το μέγεθος των δράσεων ή εξωτερικών μεγεθών, εξαρτώμενο από το μέγεθος των μετακινήσεων του φορέα εξαρτάται από τον τύπο των φορτίων και των στηρίξεων, την απόσταση του φορτίου από τις στηρίξεις και το μήκος (άνοιγμα) του φορέα.

Τα στοιχεία αυτά σημειούμενα στον κεντροβαρικό (ή ακριβέστερα στον στρεπτικό) άξονα του φορέα αποτελούν το **στατικό σύστημα** του φορέα, από τη στατική επίλυση του οποίου προκύπτουν οι τιμές των δράσεων.

Για τον εντοπισμό του στατικού συστήματος ενός φορέα ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα:

❖ Γίνεται κατά μήκος τομή του φορέα

Στο Σχ. 2 φαίνεται η κατά μήκος τομή της δοκού Δ_1 - Δ_2 και στο Σχ. 3 η κατά μήκος τομή της πλάκας Π_1 - Π_2 κτιρίου με ξυλότυπο που δίνεται στο Σχ. 1.

❖ Ο φορέας απομονώνεται από τα σώματα και τα στοιχεία με τα οποία έρχεται σ' επαφή.

Την παρουσία τους αντιπροσωπεύουν ισοδύναμα **φορτία**, αν τείνουν να τον μετακινήσουν, ή ισοδύναμες **στηρίξεις**, αν τείνουν να κρατήσουν το φορέα στη θέση του.

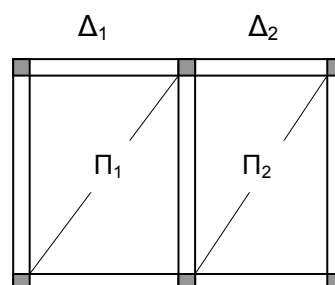
Στο Σχ. 2 έχουν απομακρυνθεί τα υποστυλώματα της δοκού Δ_1 - Δ_2 και στο Σχ. 3 οι δοκοί της πλάκας Π_1 - Π_2 και στη θέση τους έχουν τεθεί τα σύμβολα των στηρίξεων.

Τα φορτία συμβολίζονται με βέλη τα οποία εκτείνονται σ' όλο το μήκος της επαφής του φορέα με τα σώματα που απομακρύνονται. Τα

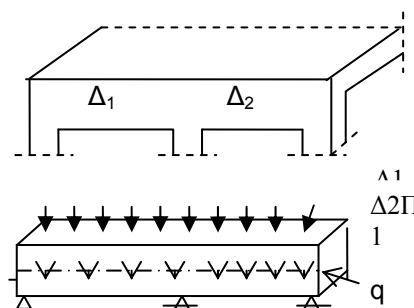
βέλη έχουν τη διεύθυνση και φορά της μετατόπισης που προκαλούν τα φορτία.

Αν το μήκος της επαφής είναι μικρό (π.χ. μικρότερο του 1/20 του μήκους του φορέα), τα φορτία θεωρούνται σημειακά και συμβολίζονται μ' ένα μόνον βέλος.

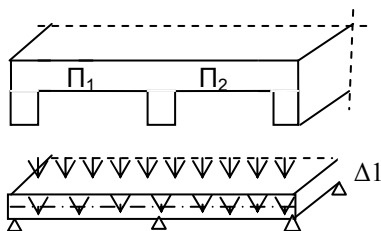
Αν το φορτίο είναι κινούμενο κατά μήκος του φορέα, όπως π.χ. φορτίο γερανογέφυρας, προστίθεται στο βέλος και το σύμβολο της ρόδας, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχ. 1.1 Κάτοψη φέροντα οργανισμού



Σχ. 1.2 Κατά μήκος τομή και απομόνωση δοκού Δ_1 - Δ_2



Σχ. 1.3 Κατά μήκος τομή και απομόνωση πλάκας Π₁-Π₂

Οι ενδιάμεσες στηρίξεις συμβολίζονται:

Οι ακραίες στηρίξεις δηλώνονται και συμβολίζονται ανάλογα με τον τύπο τους ως εξής (βλέπε ενότητα Α, :

- Έδραση
- Αρθρωση
- Καμπτική πάκτωση
- Στρεπτική πάκτωση :

Η θέση των (θεωρητικών) στηρίξεων είναι, όπως φαίνεται στο Σχ. 4, στις θέσεις της συνισταμένης των πιέσεων που αναπτύσσονται στη διεπιφάνεια φορέα και στήριξης:

- **Στις Ενδιάμεσες Στηρίξεις:** στο μέσον του μήκους επαφής.

Οι πιέσεις είναι περίπου ομοιόμορφα κατανομημένες σ' όλο το μήκος επαφής.

- **Στις Ακραίες Στηρίξεις:** πλησιέστερα προς την εσωτερική παρειά της στήριξης.

Οι πιέσεις είναι, όπως φαίνεται στο Σχ. 4, μεγαλύτερες προς την εσωτερική παρειά.

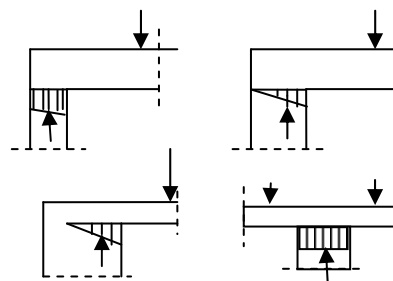
Είναι τόσο πιο μεγάλες όσο πιο μεγάλο είναι το βέλος και, άρα, και το μήκος του φορέα και όσο πιο μεγάλη είναι η διεπιφάνεια στήριξης.

Η απόσταση μεταξύ διαδοχικών (θεωρητικών) στηρίξεων, ορίζεται ως το **θεωρητικό άνοιγμα** του φορέα.

- ❖ **Οι θεωρητικές στηρίξεις πλακών επί δοκών και δοκών επί υποστυλωμάτων, λόγω της**

μικρής διεπιφάνειας επαφής φορέα και στήριξης, μπορούν να θεωρούνται στο μέσον της επιφάνειας επαφής (κάνοντας την παραδοχή ότι οι πιέσεις που θα αναπτυχθούν θα είναι ομοιόμορφες).

Για στηρίξεις με μεγάλο μήκος, όπως είναι οι **στηρίξεις σε τοιχώματα**, η θέση των θεωρητικών στηρίξεων προσδιορίζεται στους κανονισμούς συναρτήσει του μήκους του φορέα και της διάστασης επαφής του τοιχώματος.

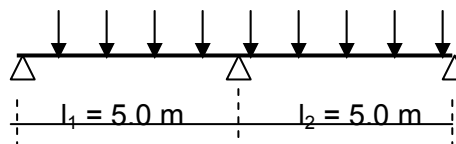


Σχ. 1.4 Θέσεις θεωρητικών στηρίξεων

- ❖ **Ο φορέας απομονώνεται κι από τον ίδιο και συμβολίζεται με τον κεντροβαρικό του άξονα.**

Η παρουσία του φορέα αντιπροσωπεύεται, όπως φαίνεται στο Σχ. 2 και 3, από φορτίο ίσο με το βάρος του.

Έτσι, ο φορέας συμβολίζεται με τον κεντροβαρικό του άξονα, τα φορτία του και τις στηρίξεις, τα οποία αποτελούν το **στατικό σύστημα του φορέα**.



Σχ. 1.5 Στατικό σύστημα πλάκας Π₁-Π₂ και δοκού Δ₁-Δ₂

- ❖ **Γίνεται Στατική επίλυση**

Από τη στατική επίλυση προκύπτουν οι τιμές των δράσεων στις κρίσιμες διατομές, όπως περιγράφεται στα κεφ 2 και 3.

2. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΡΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΚΑΜΠΤΟΔΙΑΤΜΗΤΙΚΗ ΕΠΙΠΟΝΗΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό δίνεται η μεθοδολογία για τον υπολογισμό των δράσεων γραμμικών φορέων, δηλ. φορέων με μήκος πολύ μεγαλύτερο από το ύψος τους.

Η μεθοδολογία για φορείς με μήκος περίπου όσο το ύψος τους, για υψίκορμους φορείς, δίνεται στον Τόμο 3: «Σχεδιασμός Ειδικών Φορέων».

2.1 Η Φύση της Καμπτοδιατμητικής Επιπόνησης

Καμπτική είναι η επιπόνηση για την οποία η απόκριση του φορέα είναι στροφή του κατά μήκος του κεντροβαρικού του άξονα.

Διατμητική είναι η επιπόνηση για την οποία η απόκριση του φορέα είναι βύθισή του εγκάρσια στον κεντροβαρικό του άξονα. Στους γραμμικούς φορείς η βύθιση αυτή θεωρείται αμελητέα.

Καμπτοδιατμητική επιπόνηση διατμητική επιπόνηση συνυπάρχει πάντα με την καμπτική επιπόνηση

2.2 Οι Όροι Ανάπτυξης της Επιπόνησης- Καμπτοδιατμητικό Φορτίο και Στήριξη

Για την ανάπτυξη καμπτοδιατμητικής επιπόνησης σ' ένα φορέα απαιτούνται:

1. Η εφαρμογή καμπτοδιατμητικού φορτίου

Καμπτοδιατμητικό είναι φορτίο το οποίο είναι κάθετο στον κεντροβαρικό άξονα του φορέα.

2. Στήριξη του φορέα αντιτιθέμενη στην βύθισή του εγκάρσια στον κεντροβαρικό του άξονα.

Διακρίνονται τρεις τύποι στηρίξεων:

- Έδραση 
- Αρθρωση 
- Καμπτική πάκτωση 

2.3 Εντοπισμός του Τύπου της Στήριξης

Οι στηρίξεις όπως διαμορφώνονται στην πράξη απέχουν, εν γένει, από τις θεωρητικές ταξινομή-

σεις που αναφέρθηκαν στην Ενότητα Α, κεφ. 2.6.

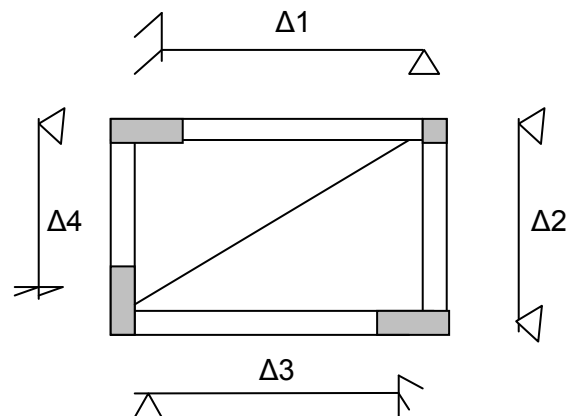
Για λόγους ευκολίας της στατικής επίλυσης οι ακραίες στηρίξεις ενός φορέα προσεγγίζονται με τον πλησιέστερο τύπο ως εξής:

2.3.1 Στηρίξεις Δοκών

- **Αρθρώσεις:** όταν το στοιχείο στήριξης μπορεί εύκολα να καμφθεί προς την διεύθυνση του μήκους της δοκού, ώστε να μπορεί η δοκός να στραφεί κατά μήκος της.

Αυτό συμβαίνει όταν η διάσταση του στοιχείου της στήριξης προς την διεύθυνση του μήκους της δοκού είναι σχετικά μικρή. Είναι μικρή η δυσκαμψία του και είναι μεγάλο το βέλος του προς τη διεύθυνση αυτή.

- **Καμπτικές πακτώσεις:** όταν το στοιχείο στήριξης δεν μπορεί εύκολα να καμφθεί προς την διεύθυνση του μήκους της δοκού και, γι' αυτό, δεν μπορεί να στραφεί εύκολα η δοκός στις θέσεις αυτές.



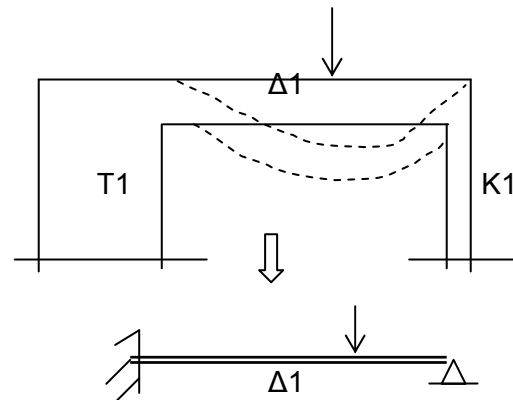
Σχ. 2.1 Διάκριση στηρίξεων δοκών και αντίστοιχα στατικά συστήματα

Αυτό συμβαίνει όταν η διάσταση του στοιχείου της στήριξης προς την διεύθυνση του μήκους της δοκού είναι σχετικά μεγάλη, όπως στο τοίχωμα T1 στο Σχ. 2. Είναι μεγάλη η δυσκαμψία του και, γιαυτό, μικρό το βέλος του προς τη διεύθυνση του μήκους της δοκού Δ1.

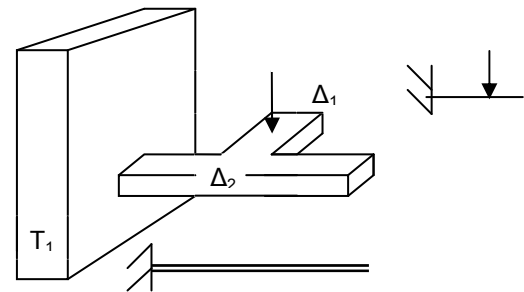
❖ **Όταν μια δοκός στηρίζεται σε άλλη δοκό** (και όχι σε κατακόρυφο στοιχείο, υποστύλωμα ή τοίχωμα), όπως η δοκός Δ1 στο Σχ. 3 η οποία στηρίζεται στη δοκό Δ2, η στήριξη δηλώνεται ως **έμμεση στήριξη**.

Η δοκός Δ1 δηλώνεται ως δευτερεύουσα δοκός ή **διαδοκίδα**, ενώ η δοκός στήριξης Δ2 ως **κύρια δοκός**.

Ο τύπος αυτός στήριξης (η οποία είναι υποχωρούσα στήριξη) πρέπει να αποφεύγεται. Στο σημείο συνάντησης των δύο δοκών απαιτείται πρόσθετη διάταξη οπλισμού ανάρτησης του φορτίου της διαδοκίδας (βλέπε Τόμο 3: «Σχεδιασμός Ειδικών Φορέων»).



Σχ. 2.2 Για τη δοκό Δ1 το T1 είναι καμπτική πάκτωση ενώ το K1 είναι άρθρωση



Σχ. 2.3 Η δοκός Δ2 είναι έμμεση στήριξη για τη δοκό Δ1
Το τοίχωμα T1 είναι καμπτική στήριξη για τη δοκό Δ2

2.3.2 Στηρίξεις Πλακών*

- **Άρθρωση:** όταν ακραίο στοιχείο είναι δοκός.*
- **Πάκτωση:** όταν ακραίο στοιχείο είναι τοίχωμα και η πλάκα οπλίζεται ως συνέχεια του τοιχώματος
- **Φορείς με μία μόνο στήριξη**, όπως οι δοκοί Δ1 και Δ2 στο Σχ. 3, διαμορφώνονται υποχρεωτικά, για λόγους ισορροπίας, με τη στήριξη αυτή ως **πάκτωση**.

* Για να θεωρηθεί μια θέση στήριξη της πλάκας θα πρέπει το βέλος στη θέση αυτή να είναι αμελητέο ή πολύ μικρό σε σχέση με το βέλος στο άνοιγμα της πλάκας.

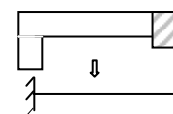
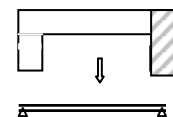
Το βέλος είναι αντίστροφα ανάλογο της δυσκαμψίας του στοιχείου η οποία είναι ανάλογη της ροπής αδρανείας του. Γιαυτό:

❖ **το ύψος των δοκών η πρέπει να είναι τουλάχιστον τρεις φορές μεγαλύτερο απ' αυτό της πλάκας,**

ώστε το βέλος τους, αντίστροφα ανάλογο της ροπής αδρανείας τους (που είναι ανάλογη του h^3), να είναι τουλάχιστον το 1/30 του βέλους των πλακών.

Τοπική αύξηση του πάχους της πλάκας, όπως φαίνεται στο σχήμα, για παράδειγμα από 20 cm σε 30 cm δεν μπορεί να θεωρηθεί στήριξη για την πλάκα.

Στην περίπτωση αυτή η πλάκα πρέπει υπέρ της ασφαλείας να σχεδιαστεί με τα δυσμενέστερα μεγέθη που προκύπτουν για δύο οριακές συνθήκες στήριξης θεωρώντας τη θέση της τοπικής αύξησης (α) ως ελεύθερο άκρο και (β) ως αρθρωτή στήριξη (δοκό).



2.4 Στατική Επίλυση

Τα μεγέθη των δράσεων προκύπτουν από την **στατική επίλυση** σε δύο βήματα:

1. Εύρεση των αντιδράσεων στις θέσεις των στηρίξεων
2. Εύρεση των στατικών μεγεθών σε οποιαδήποτε άλλη του φορέα ως εξής:
 - **Η Τέμνουσα V_s** σε μια θέση του φορέα αντιστοιχεί στο αλγεβρικό άθροισμα των κατακόρυφων (κάθετων στον κεντροβαρικό άξονα του φορέα) συνιστωσών των φορτίων στο τμήμα του φορέα από τη στήριξη μέχρι την υπόψη θέση και της κατακόρυφης συνιστώσας της αντίδρασης στη στήριξη.
 - **Η Καμπτική Ροπή M_s** σε μια θέση του φορέα αντιστοιχεί στο αλγεβρικό άθροισμα των γινομένων των κάθετων συνιστωσών των φορτίων στο τμήμα του φορέα από τη στήριξη μέχρι την υπόψη θέση επί την απόστασή τους από τη στήριξη και της αντίστοιχης αντίδρασης στη στήριξη.

2.4.1 Υπολογισμός Αντιδράσεων σε Ισοστατικούς Φορείς

Σε αμφιέριστους, πρόβολους, μονοπρόέχοντες και αμφιπρόέχοντες φορείς η τιμή των αντιδράσεων προκύπτει από τις δύο σχέσεις ισορροπίας των συνιστωσών του φορέα κατά τη διεύθυνση του άξονά του και κάθετα σ' αυτόν και τη σχέση ισορροπίας των ροπών ως προς μία από τις στηρίξεις του, όπως φαίνεται στο Σχ. 5(α).

❖ **Στην περίπτωση συμμετρικής φόρτισης** ο υπολογισμός των αντιδράσεων απλοποιείται καθώς οι κάθετες συνιστώσες των αντιδράσεων είναι ίδιες στις δύο στηρίξεις ίσες με το μισό του συνολικού φορτίου του φορέα, όπως φαίνεται στο Σχ. 5(β).

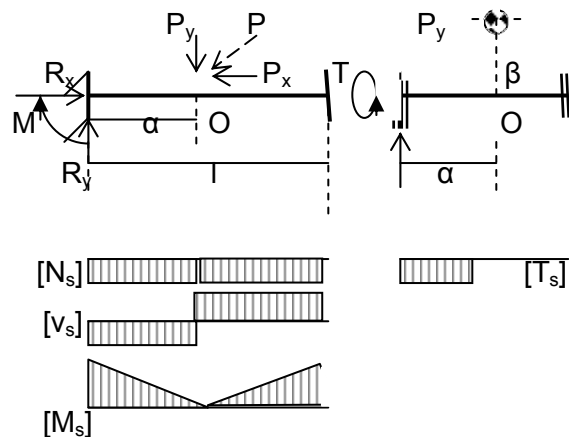
Υπολογισμός Αντιδράσεων Υπερστατικών Φορέων

Στην περίπτωση των υπερστατικών φορέων δεν επαρκούν οι παραπάνω τρεις σχέσεις ισορροπίας για την εύρεση των αντιδράσεων.

Υιοθετούνται άλλες μέθοδοι με βάση τις οποίες υπολογίζονται οι τιμές των ροπών στις στηρίξεις του φορέα.

Με βάση τις τιμές αυτές, η ροπή και η τέμνουσα σε οποιαδήποτε θέση ενός ανοίγματος του φορέα προκύπτουν, όπως φαίνεται στο Σχ. 6 και στην ανακεφαλαίωση στο τέλος του κεφαλαίου.

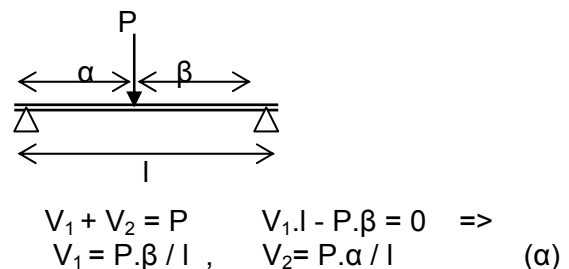
Η εντατική κατάσταση του φορέα προκύπτει από την επαλληλία των στατικών μεγεθών που προκύπτουν θεωρώντας το φορέα αμφιέριστο επιτιπούμενο (α) με τα φορτία στο άνοιγμα και (β) με τις ροπές στις εκατέρωθεν στηρίξεις, όπως φαίνεται στο Σχ.6.



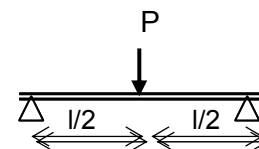
Παράδειγμα: Στατικά μεγέθη στη θέση O

$$\begin{aligned} N_s &= R_x - P_x & V_s &= R_y - P_y \\ M_s &= M - P_y \cdot \alpha & T_s &= T - P_y \cdot \beta \end{aligned}$$

Σχ. 2.4 Υπολογισμός στατικών μεγεθών

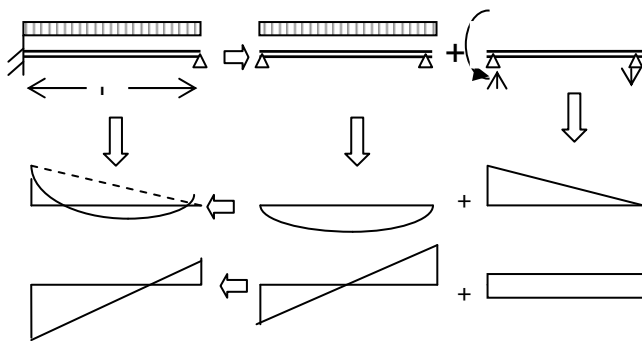


$$\begin{aligned} V_1 + V_2 &= P & V_1 \cdot l - P \cdot \beta &= 0 \Rightarrow \\ V_1 &= P \cdot \beta / l & V_2 &= P \cdot \alpha / l \end{aligned} \quad (\alpha)$$



$$V_1 = V_2 = P/2 \quad (\beta)$$

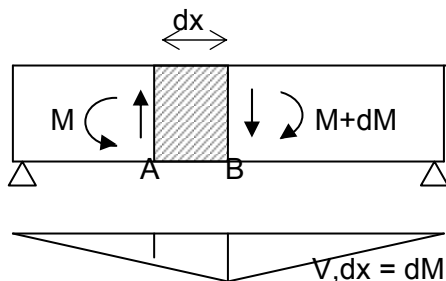
Σχ. 2.5 (α) Υπολογισμός αντιδράσεων (β) Απλοποίηση για συμμετρικό φορέα



Σχ. 2.6 Αναγωγή υπερστατικού φορέα σε αμφιέρειστο

2.5 Αλληλοσυσχετίσεις M,V,q και Μέγιστη Τιμή της M σε Ανοιγμα

Η τέμνουσα V αναπτύσσεται στις θέσεις μεταβλητής M για την εξισορρόπησή της.



Σχ. 2.7 Ο εξισορροπιστικός ρόλος της τέμνουσας

2.5.1 Ο Εξισορροπιστικός Ρόλος της Τέμνουσας

Αν M και M+dM είναι, όπως φαίνεται στο Σχ. 7, οι ροπές στις θέσεις A και B του φορέα σε απόσταση dx μεταξύ τους, για την ισορροπία του τμήματος AB αναπτύσσεται τέμνουσα V με τιμή τέτοια ώστε η ροπή V·dx να εξισορροπήσει τη διαφορά των ροπών και άρα θα είναι:

$$Vdx = dM \quad (1) \Rightarrow V = dM/dx \quad (1a)$$

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι:

- Η μέγιστη τιμή της ροπής είναι στη θέση που μηδενίζεται η τέμνουσα.
- Η διαφορά της ροπής σε δύο θέσεις A και B είναι ίση με το εμβαδόν του διαγράμματος τεμνουσών στο τμήμα AB.

Από τη σχέση που δίνει την τέμνουσα προκύπτει:

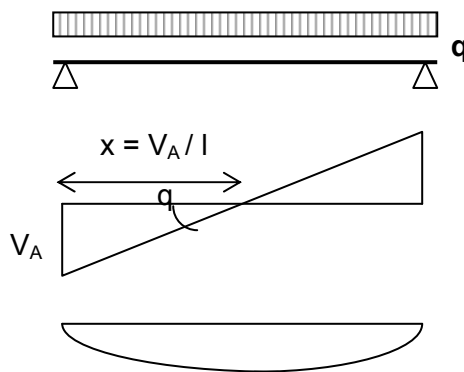
$$\diamond dV = q \cdot dx \quad (2) \Rightarrow V/q = x \quad (2a)$$

Η μέγιστη, λοιπόν, ροπή στο άνοιγμα του φορέα, η οποία αναπτύσσεται στη θέση μηδενισμού της V και είναι ίση με το εμβαδόν του διαγράμματος των τεμνουσών μέχρι τη θέση αυτή θα είναι, όπως προκύπτει από τις σχέσεις (1) και (2):

$$\bullet \max M = 1/2 \cdot V_A^2 / q,$$

όπου:

V_A : η τέμνουσα στη στήριξη του ανοίγματος στο οποίο υπολογίζεται η max M.



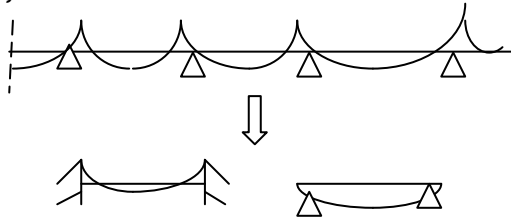
Σχ. 2.8 Συσχέτιση maxM, V και q

2.6 Προσεγγιστικές Επιλύσεις για Συνεχείς Φορείς

Προσεγγιστικά μπορούν να υπολογιστούν οι ροπές ως εξής:

- Οι ροπές στις στηρίξεις ως ο μέσος όρος των ροπών που προκύπτουν αν τα ανοίγματα εκατέρωθεν της στήριξης θεωρηθούν αμφίπακτα. (Σε περίπτωση προβόλων κρατείται προφανώς η ακριβής) τιμή της ροπής του προβόλου).

- Οι ροπές στα ανοίγματα ως η ροπή της αντίστοιχης αμφιερευστής μείον το ημίαθροισμα των ροπών των εκατέρωθεν στηρίξεων.



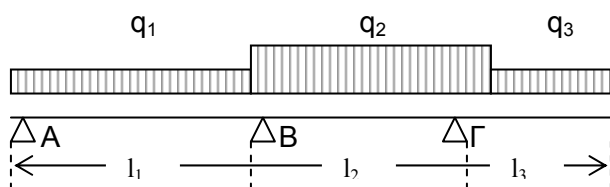
- Με γνωστές τις ροπές στις στηρίξεις υπολογίζονται οι τέμνουσες με τις σχέσεις της επόμενης σελίδας.

2.7 ΥΠΟΜΝΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΦΟΡΕΩΝ

- Αν τα φορτία δεν περνούν από τον κεντροβαρικό άξονα τα ανάγουμε πρώτα ως προς τον κ,β άξονα και μετά κάνουμε επίλυση.
 - Πάντα ξεκινάμε την επίλυση από το ελεύθερο άκρο, αν υπάρχει.
 - Το διάγραμμα των τεμνουσών και στρεπτικών ροπών για συγκεντρωμένα φορτία σχηματίζεται από ορθογώνια ενώ το διάγραμμα καμπτικών ροπών από τρίγωνα.
- Για κατανεμημένα φορτία σχηματίζονται από τρίγωνα τα πρώτα και καμπύλες το δεύτερο.

Διαδοχικά Βήματα για Συνεχείς Φορείς

1. Βρίσκουμε τις ροπές στις στηρίξεις και στα ελεύθερα άκρα προβόλων

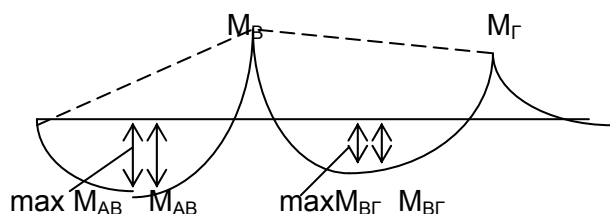


$$M_{\Gamma} = -q_3 \cdot l_3^2 / 2$$

$$M_B = \frac{-(q_1 \cdot l_1^3 + q_2 \cdot l_2^3)}{8(l_1 + l_2)} - \frac{M_{\Gamma} \cdot l_2}{2(l_1 + l_2)} \quad \text{Όταν } J_1 = J_2$$

(Οι M με αλγεβρικές τιμές)

2. Τις ενώνουμε με διακεκομμένα ευθύγραμμα τμήματα
3. Από τα διακεκομμένα τμήματα κρεμάμε με συνεχή γραμμή τα διαγράμματα ροπών των αντιστοιχών αμφιεριστων και διαγραμμίζουμε τις περιοχές μεταξύ άξονα αναφοράς (κ.β. άξονα) και συνεχούς γραμμής. Τα διαγραμμισμένα τμήματα είναι το διάγραμμα των ροπών,



$$M_{AB} = q_1 \cdot l_1^2 / 8 + (M_A + M_B) / 2$$

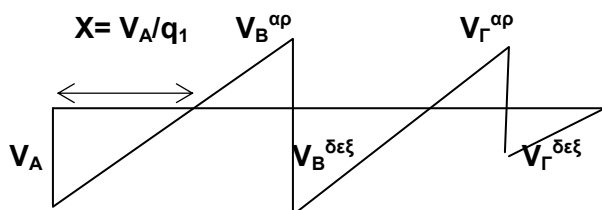
(Οι M με αλγεβρικές τιμές)

$$M_{B\Gamma} = q_2 \cdot l_2^2 / 8 + (M_B + M_{\Gamma}) / 2$$

$$\max M_{AB} = M_A + V_A^2 / (2q_1)$$

$$\max M_{B\Gamma} = M_B + V_{B\delta\epsilon\zeta}^2 / (2q_2)$$

- Οι ροπές στο μέσον των ανοιγμάτων ισούνται με τη ροπή της αντίστοιχης αμφιεριστης στο μέσο συν το ημίαθροισμα (των αλγεβρικών τιμών) των ροπών των εκατέρωθεν στηρίξεων.
- Οι τέμνουσες στις στηρίξεις ισούνται με αυτές της αντίστοιχης αμφιεριστης πλην το λόγο της διαφοράς των (αλγεβρικών τιμών) των ροπών των εκατέρωθεν στηρίξεων (πλησιέστερης μείον απομακρυσμένης) δια του ανοίγματος (στο οποίο ανήκουν οι υπόψη στηρίξεις)
- Οι μέγιστες ροπές σ ένα άνοιγμα αντιστοιχούν στη θέση που μηδενίζεται η τέμνουσα στο άνοιγμα αυτό και ισούνται με το αλγεβρικό άθροισμα του εμβαδού των τεμνουσών αριστερά της θέσης αυτής.
- Η κλίση του διαγράμματος των τεμνουσών είναι η τιμή του κατανεμημένου φορτίου q. Η θέση μηδενισμού του διαγράμματος είναι σ' απόσταση V/q.



$$V_A = 0,5 q_1 \cdot l_1 - (M_A - M_B) / l_1$$

$$V_B^{ap} = 0,5 q_1 \cdot l_1 - (M_B - M_A) / l_1$$

$$V_B^{\delta\epsilon\zeta} = 0,5 q_2 \cdot l_2 - (M_B - M_{\Gamma}) / l_2$$

$$V_{\Gamma}^{ap} = 0,5 q_2 \cdot l_2 - (M_{\Gamma} - M_B) / l_2$$

$$V_{\Gamma}^{\delta\epsilon\zeta} = q_3 \cdot l_3 \quad (\text{Οι M με αλγεβρικές τιμές})$$

3. ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΔΡΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΣΤΡΕΠΤΙΚΗ ΕΠΙΠΟΝΗΣΗ

3.1 Η Φύση της Στρεπτικής Επιπόνησης

Στρεπτική είναι η επιπόνηση για την οποία η απόκριση του φορέα είναι στροφή του γύρω από τον στρεπτικό άξονά του (ο οποίος για κλειστές διατομές ταυτίζεται με τον κεντροβαρικό άξονα).

3.2 Οι Όροι Ανάπτυξης της Επιπόνησης

Για την ανάπτυξη στρεπτικής επιπόνησης σ' ένα φορέα απαιτούνται:

3. Η εφαρμογή στρεπτικού φορτίου και
4. Στήριξη του φορέα αντιτιθέμενη στην στροφή του περί τον άξονά του, δηλ. στρεπτική πάκτωση.

➤ Στρεπτικό Φορτίο

Στρεπτικό φορτίο προκύπτει από φορτίο κάθετο στον κ.β. άξονα αλλά ασκούμενο έκκεντρα ως προς αυτόν, όπως το φορτίο G για τη δοκό $\Delta 2$ στο Σχ. 1.

Μεταφερόμενο στον κ.β. άξονα του φορέα ανάγεται σε καμπτοδιατμητικό φορτίο και στρεπτικό φορτίο με τιμή ίση με το γινόμενο του φορτίου επί την απόστασή του από το κ.β. του φορέα.

Συμβολίζεται ως M_T , όταν είναι συγκεντρωμένο και m_T , όταν είναι κατανεμημένο.

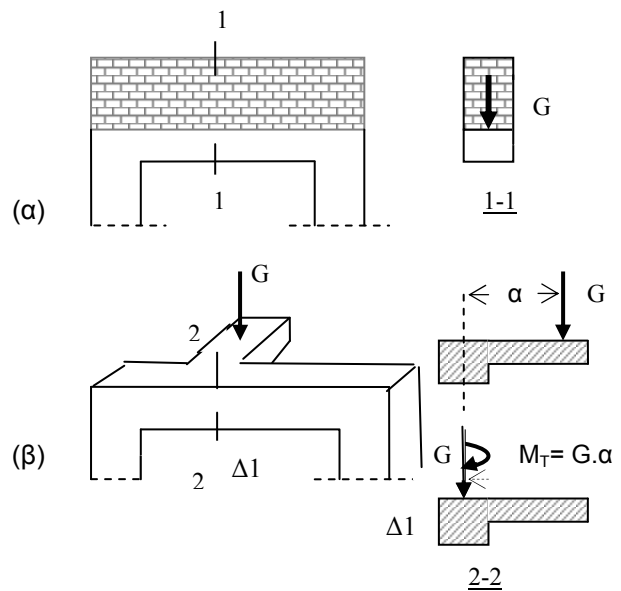
Για παράδειγμα το φορτίο G στο Σχ. 2 είναι για τη δοκό $\Delta 1$ καμπτοδιατμητικό ίσο με G , για τη δοκό $\Delta 2$ καμπτοδιατμητικό ίσο με G και στρεπτικό ίσο με $M_T = G \cdot \alpha$, ενώ για το τοίχείο $T1$ δίνει αξονικό φορτίο ίσο με G και καμπτική ροπή ίση με $M_s = G \cdot \beta$.

Καθαρά στρεπτικό φορτίο προκύπτει από δύο αντίθετης φοράς και αντίθετης εκκεντρότητας καμπτοδιατμητικά φορτία ίσης τιμής, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.

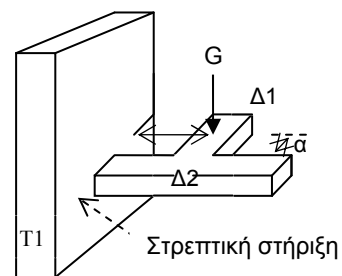
Εν γένει, το στρεπτικό φορτίο συνυπάρχει με το καμπτοδιατμητικό φορτίο και, ως εκ τούτου, η στρεπτική επιπόνηση συνυπάρχει με την καμπτοδιατμητική επιπόνηση.

❖ Όταν διασταυρώνονται κάθετα δυο οριζόντια δομικά στοιχεία, όπως φαίνεται στο Σχ. 1 και 2, η καμπτική ροπή του ενός στη θέση διασταύρωσης (κόμβο) είναι στρεπτικό φορτίο για το άλλο.

Η καμπτική ροπή M_s της δοκού $\Delta 1$ στη θέση του κόμβου ίση με $G \cdot \alpha$ είναι στρεπτικό φορτίο M_T για τη δοκό $\Delta 2$.



Σχ. 3.1 (α) καμπτοδιατμητικό φορτίο G
(β) Στρεπτικό φορτίο M_T

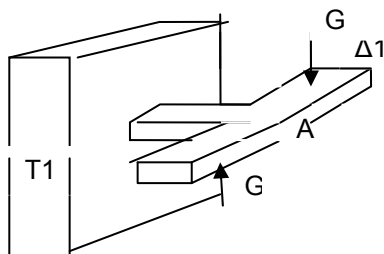


Σχ. 3.2 Παράδειγμα διάκρισης φορτίων

➤ Στρεπτική Στήριξη

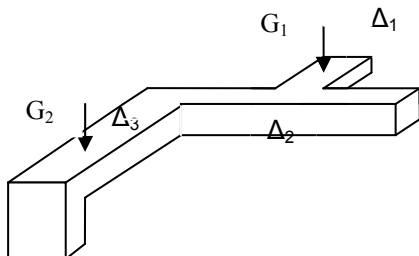
Μια στήριξη είναι στρεπτική πάκτωση όταν:

(α) Το στοιχείο στήριξης έχει μεγάλη διάσταση κάθετα προς τον άξονα του φορέα και γι, αυτό η δυσκαμψία του είναι μεγάλη και, άρα, η στροφή του μικρή προς την διεύθυνση αυτή, όπως το τοιχείο T1 για τη δοκό Δ2 στο Σχ. 2



Σχ. 3.3 Η δοκός Δ₁ στη θέση Α (κόμβο) επιτιονείται μόνο με στρεπτικό φορτίο

(β) Υπάρχει εγκάρσια δοκός καμπτόμενη κατ' αντίθετη φορά απ' αυτήν του στρεπτικού φορτίου, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.



Σχ. 3.4 Η δοκός Δ3 είναι στρεπτική στήριξη για τη δοκό Δ2

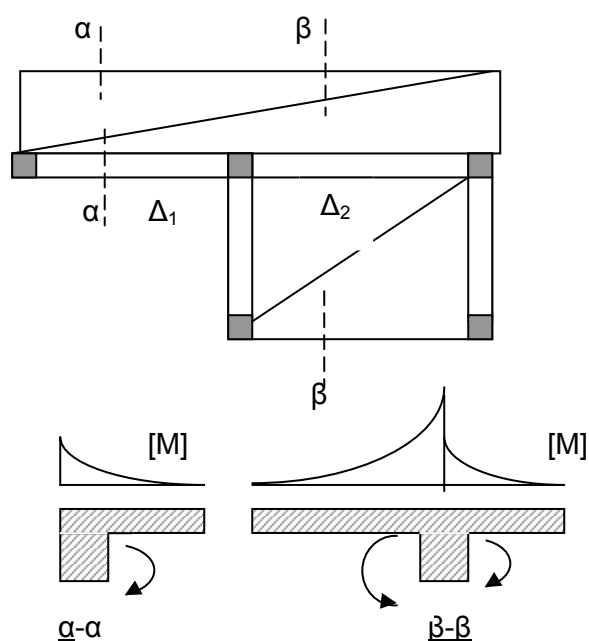
3.3 Οι Δύο Τύποι της Επιπόνησης: Άμεση και Έμμεση Στρέψη

Διακρίνονται δύο τύποι στρεπτικής επιπόνησης:

➤ **Άμεση στρέψη** όταν το στρεπτικό φορτίο M_T είναι απαραίτητο για την ισορροπία των ροπών κάθετα στο φορέα, όπως φαίνεται στο Σχ. 5.

Για την ισορροπία των ροπών στην τομή α-α απαιτείται ανάπτυξη στρεπτικού φορτίου m_T ίσου με την καμπτική ροπή M_s του προβόλου.

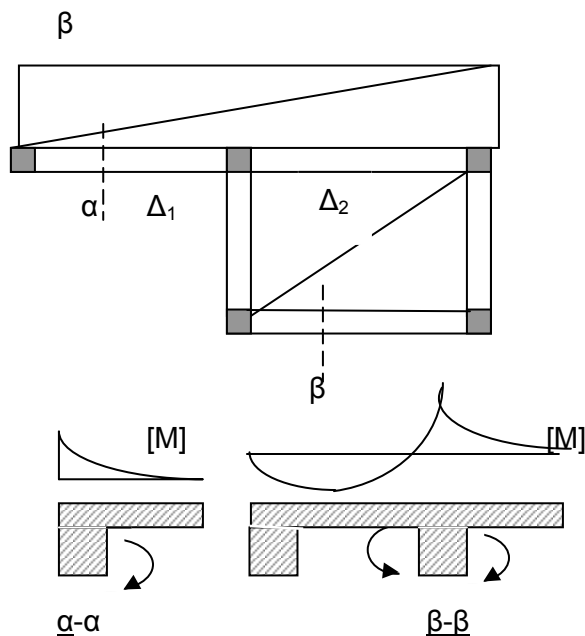
Για την ισορροπία των ροπών στην τομή β-β απαιτείται ανάπτυξη στρεπτικού φορτίου m_T ίσου με την διαφορά των καμπτικών ροπών των δύο προβόλων.



Σχ. 3.5 Δοκοί Δ₁ και Δ₂ επιτιονούμενες σε άμεση στρέψη

➤ **Έμμεση στρέψη**, όταν αναπτύσσεται σ' έναν φορέα στρεπτική παραμόρφωση (στροφή γύρω από τον άξονα του φορέα) αλλά το στρεπτικό φορτίο δεν είναι αναγκαίο για την ισορροπία κάθετα στο φορέα, όπως φαίνεται στο Σχ. 6 (τομή β-β).

Ενώ η δοκός Δ1 υπόκειται σε άμεση στρέψη, η δοκός Δ2 υπόκειται σε έμμεση στρέψη καθώς η στρεπτική στροφή στη δοκό που προκαλείται από την κάμψη της πλάκας Π2 είναι μεγαλύτερη απ' αυτήν που προκαλείται από την κάμψη της πλάκας Π1.



Σχ. 3.6 Δοκός Δ_1 σε άμεση στρέψη και δοκός Δ_2 σε έμμεση στρέψη

Συμπερασματικά:

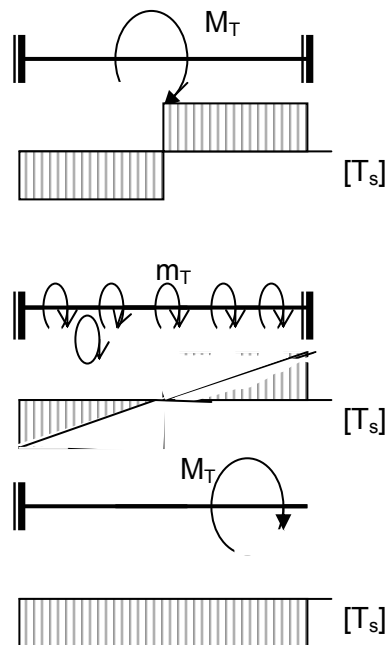
- ❖ Άμεση στρέψη αναπτύσσεται σε φορείς στους οποίους οι ροπές κάμψης των εγκάρσιων φορέων τους στη θέση του κόμβου είναι άνισες.
- ❖ Η διαφορά των καμπτικών αυτών ροπών οφείλει για την ισορροπία του κόμβου να εξισορροπηθεί με πρόσθετη ροπή η οποία αποτελεί το στρεπτικό φορτίο του φορέα.
- ❖ Πρακτικά, ένας φορέας υπόκειται σε άμεση στρέψη όταν το στατικό σύστημα των εγκάρσιων φορέων είναι μονόπλευρος πρόβολος, ή αμφίπλευρος πρόβολος με άνισα ανοίγματα ή φορτία στα δύο

ανοίγματα. (π.χ. παρουσία κινητού φορτίου μόνο στον ένα πρόβολο).

3.4 Στατική Επίλυση για Στρεπτική Ροπή

Το στατικό μέγεθος της στρεπτικής ροπής είναι, όπως και στην περίπτωση της τέμνουσας, το ίδιο με το φορτίο (ροπή).

Το διάγραμμα των στρεπτικών ροπών είναι, όπως φαίνεται στο Σχ. 7, σε μορφή και τιμή με το διάγραμμα των τεμνουσών αλλά σε μονάδες ροπής.



Σχ. 3.7 Διαγράμματα στρεπτικών ροπών

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΓΙΑ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟ ΤΩΝ ΕΣΩΤΕΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΑΝΤΟΧΩΝ

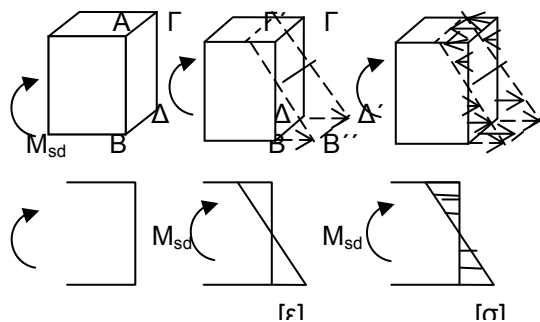
Οι αντιδράσεις, ή τα εσωτερικά μεγέθη του φορέα προκύπτουν ως αποτέλεσμα εσωτερικών δυνάμεων. Οι εσωτερικές δυνάμεις προκύπτουν ως οι συνισταμένες τάσεων του φορέα. Οι τάσεις του φορέα είναι αποτέλεσμα των παραμορφώσεων των διατομών του. Για τον υπολογισμό των αντιδράσεων ακολουθείται η παρακάτω διαδικασία.

Αναλυτικά η **μεθοδολογία** υπολογισμού των εσωτερικών μεγεθών και των αντοχών φορέων από οπλισμένο για κάθε τύπο επιπόνησης δίνεται στην Ενότητα Θ.

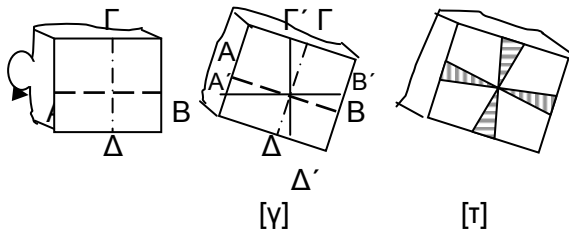
4.1 Πρώτο Βήμα: Παραμορφώσεις-Τάσεις

Για τον υπολογισμό των εσωτερικών μεγεθών σε μια θέση του φορέα γίνεται εγκάρσια **τομή** του φορέα στη θέση αυτή και σημειώνεται η νέα θέση της τομής μετά την επιβολή των φορτίων.

Οι δύο θέσεις της τομής δίνουν τη μορφή του διαγράμματος παραμορφώσεων του φορέα στην υπόψη θέση.



Σχ. 4.1 Παραμορφώσεις και τάσεις για καμπτική επιπόνηση



Σχ. 4.2 Παραμορφώσεις και τάσεις για στρεπτική επιπόνηση

μόνον και θα παραμείνει επίπεδη το διάγραμμα των παραμορφώσεων θεωρείται ευθύγραμμο, όπως φαίνεται στο Σχ. 1) και 2 στην περίπτωση καμπτικής και στρεπτικής επιπόνησης, αντίστοιχα.

Όπως σχολιάζεται στην Ενότητα Α, κεφ. 3, στην πρώτη περίπτωση η παραμόρφωση είναι ορθή $[\epsilon]$ και στη δεύτερη είναι διατμητική $[\gamma]$. Όπως φαίνεται στο Σχ. 1 και 2, η παραμόρφωση είναι μεγαλύτερη στα ακρότατα σημεία των διατομών του φορέα και μηδενίζεται σε κάποια ενδιάμεσα σημεία του. Τα σημεία αυτά αποτελούν τον **ουδέτερο άξονα** στην περίπτωση της καμπτικής επιπόνησης και τον **στρεπτικό άξονα** στην περίπτωση της στρεπτικής επιπόνησης.

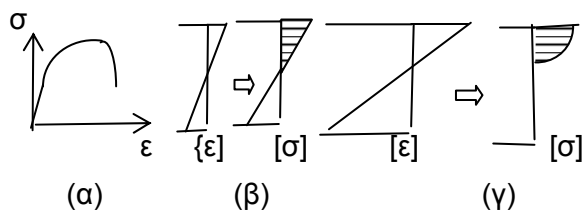
❖ Για ομογενείς (αρηγμάτωτους) φορείς υπό καθαρή κάμψη (δηλ. χωρίς συνύπαρξη αξονικής δύναμης) ο ουδέτερος άξονας συμπίπτει με τον κεντροβαρικό άξονα και για κλειστές διατομές ο στρεπτικός άξονας συμπίπτει με τον κεντροβαρικό άξονα.

Με βάση τα διαγράμματα των παραμορφώσεων προκύπτουν τα διαγράμματα των τάσεων, όρθων $[\sigma]$ στην περίπτωση της καμπτικής επιπόνησης και διατμητικών $[\tau]$ στην περίπτωση της στρεπτικής επιπόνησης.

Η μορφή και οι τιμές των διαγραμμάτων αυτών αντιστοιχούν στη μορφή και τις τιμές του διαγράμματος συμπεριφοράς $[\sigma-\epsilon]$ και $[\tau-\gamma]$ του υλικού του φορέα, βλέπε Ενότητα Α.

Για μικρές επιπονήσεις και, γιαυτό, μικρές τιμές των παραμορφώσεων $[\epsilon]$ ή $[\gamma]$, το διάγραμμα τάσεων θεωρείται γραμμικό, καθώς τα διαγράμματα συμπεριφοράς όλων των υλικών στην περιοχή αυτή είναι γραμμικά.

Με την παραδοχή ότι η διατομή θα στραφεί



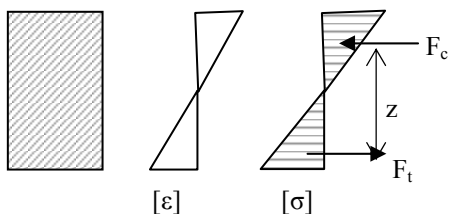
Σχ. 4.3 (α) Διάγραμμα συμπεριφοράς $[\sigma-\epsilon]$ του σκυροδέματος, (β) και (γ) διαγράμματα $[\epsilon]$ και $[\sigma]$ καθ' ύψος διατομής καμπτόμενου φορέα

Για μεγαλύτερες επιπονήσεις και κοντά στη στάθμη αστοχίας του υλικού, το διάγραμμα των τάσεων $[\sigma]$ διαφοροποιείται.

Για παράδειγμα, σε φορείς από οπλισμένο σκυρόδεμα είναι, όπως φαίνεται στο Σχ. 3(γ), καμπύλο, καθώς το διάγραμμα συμπεριφοράς $[\sigma-\epsilon]$ του σκυροδέματος είναι, όπως φαίνεται στο Σχ. 3(α), καμπύλο στην περιοχή μεγάλων παραμορφώσεων.

4.2 Δεύτερο Βήμα: Τιμή και Θέση Συνισταμένων Δυνάμεων

Ανάλογα με τη μορφή του διαγράμματος των τάσεων προκύπτει η θέση των συνισταμένων των τάσεων, οι δυνάμεις F_c και F_t (F : Force, c : compression, t : tension) στην περίπτωση της καμπτικής επιπόνησης, όπως φαίνεται στο Σχ. 4.



Σχ. 4.4 Διάγραμμα $[\epsilon]$, $[\sigma]$ και εσωτερικών δυνάμεων F καθ' ύψος διατομής καμπτόμενου φορέα

4.3 Τρίτο Βήμα: Εσωτερικό Μέγεθος και Αντοχή.

Η συνισταμένη των δυνάμεων F_c και F_t αποτελεί την εσωτερική αξονική N_R του φορέα,

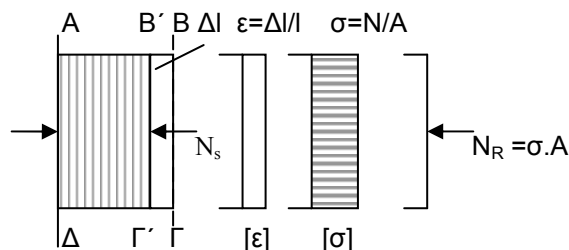
ενώ η συνισταμένη των ροπών ως προς τον κ.β. άξονα του φορέα αποτελεί την εσωτερική καμπτική ροπή M_R .

Αν η ακραία τάση τεθεί ίση με την **αντοχή f** (festigkeit) του υλικού του φορέα, το αντίστοιχο εσωτερικό μέγεθος αποτελεί την αντίστοιχη αντοχή ή μέγεθος αστοχίας του φορέα.

4.4 Παράδειγμα Υπολογισμού της N_R Ομογενούς Φορέα

Αν ΑΒΓΔ είναι η θέση τμήματος μήκους Δl του φορέα στο Σχ. 5 πριν την επιπόνησή του, η νέα του θέση μετά την επιβολή θλιπτικής δύναμης N_s θα είναι η ΑΒ'Γ'Δ.

Όλα τα σημεία της εγκάρσιας διατομής **ΒΓ** θα έχουν μετακινηθεί στη θέση **Β'Γ'** και θα έχουν υποστεί ισόποση μετακίνηση κατά **Δl**. Το διάγραμμα των παραμορφώσεων και το διάγραμμα των θλιπτικών τάσεων είναι, λοιπόν, ορθογώνια καθ' ύψος της διατομής.



Σχ. 4.5 Παραμορφώσεις, τάσεις και εσωτερική δύναμη στην περίπτωση αξονικής επιπόνησης

Η συνισταμένη των θλιπτικών δυνάμεων αποτελεί την N_R .

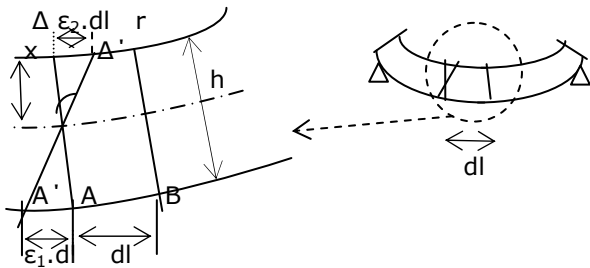
Είναι: $N_R = b \cdot h \cdot \sigma_c$

4.5 Παράδειγμα Υπολογισμού της M_R ομογενούς φορέα

Αν ΑΒΓΔ είναι η θέση στοιχειώδους τμήματος μήκους Δl ενός φορέα πριν την επιπόνησή του,

η νέα του θέση μετά την επιβολή καμπτικής ροπής M_s θα είναι η $A'B'\Gamma\Delta$, όπως φαίνεται στο Σχ. 6.

Το μήκος AB θα έχει βραχυνθεί κατά Δl_2 και το μήκος $\Gamma\Delta$ θα έχει εφελκυστεί κατά Δl_1 (ίνα 1 ορίζεται η εφελκυσόμενη).



Σχ. 4.6 Ανάπτυξη θλιπτικών και εφελκυστικών παραμορφώσεων ε_1 και ε_2 .

Ο φορέας αναπτύσσει θλιπτική παραμόρφωση $\varepsilon_2 = \Delta l_2 / \Delta x$ στην ίνα 2 και εφελκυστική παραμόρφωση $\varepsilon_1 = \Delta l_1 / \Delta x$ στην ίνα 1 με αποτέλεσμα θλιπτική τάση σ_2 στην ίνα 2 και εφελκυστική τάση σ_1 στην ίνα 1 και περαιτέρω, όπως φαίνεται στο Σχ.4, μια θλιπτική δύναμη F_c και

μια εφελκυστική δύναμη F_t σ' απόσταση μεταξύ τους z και, ως εκ τούτου την ανάπτυξη μιας εσωτερικής ροπής $M_R = F_t \cdot z$.

Για (ομογενή) φορέα με ορθογωνική διατομή είναι:

$$F_t = 0,5b \cdot (h/2) \cdot \sigma_t \quad z = 2/3 \cdot h$$

$$M_R = 0,5b \cdot (h/2) \cdot \sigma_t \cdot 2/3 \cdot h = (b \cdot h^2 / 6) \cdot \sigma_t = W \cdot \sigma_t$$

(W η ροπή αντίστασης)

4.6 Παράδειγμα Υπολογισμού της N_{Ru} και M_{Ru} Ομογενούς Φορέα

Η αξονική δύναμη αστοχίας του φορέα στο κεφ. 4.4 προκύπτει όταν στην έκφραση της N_R αντικατασταθεί η τάση σ_c με την μέγιστη τιμή της f_c .

$$\text{Θα είναι: } N_{Ru} = b \cdot h \cdot f_c$$

Η καμπτική ροπή αστοχίας του φορέα στο κεφ. 4.5 προκύπτει όταν στην έκφραση της M_R αντικατασταθεί η τάση σ_t με την μέγιστη τιμή της f_t .

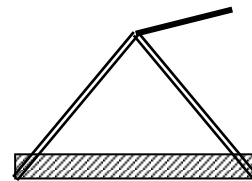
$$\text{Θα είναι: } M_R = W \cdot f_t$$

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ ΣΤΑΤΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ

5.1 Παράδειγμα 1

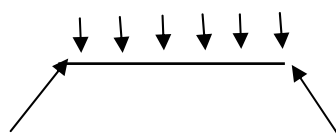
Ζητείται το στατικό σύστημα προκατασκευασμένου στρωτήρα ο οποίος αναρτάται από γερανό με συρματόσχοινα όπως φαίνεται στο σχήμα.



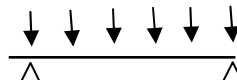
Εντοπισμός Στατικού Συστήματος



A



B



Γ

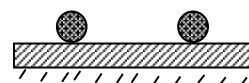
A: Απομόνωση στρωτήρα από τα συρματόσχοινα

B: Απομόνωση στρωτήρα από τον εαυτό του

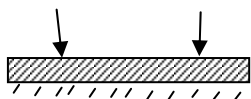
Γ: Στατικό σύστημα

5.2 Παράδειγμα 2

Ζητείται το στατικό σύστημα προκατασκευασμένου στρωτήρα στον οποίο στηρίζονται οι ράγες αμαξοστοιχίας, όπως φαίνεται στο σχήμα.



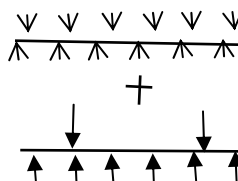
Εντοπισμός Στατικού Συστήματος



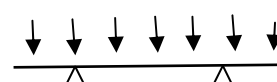
A



B



Γ



Δ

A: Απομόνωση στρωτήρα από τις ρόδες της αμαξοστοιχίας.

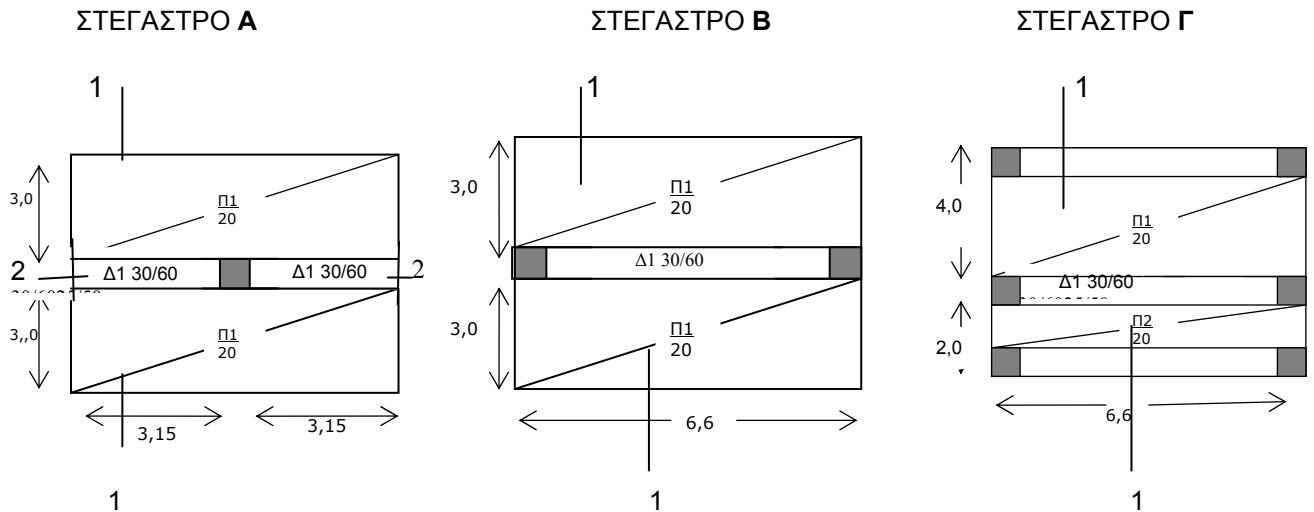
B: Απομόνωση στρωτήρα από το έδαφος.

Γ: Απομόνωση στρωτήρα από τον εαυτό του. Δεν προστίθεται στο φορτίο του στρωτήρα το ίδιο βάρος του, γιατί, όπως φαίνεται στο σχήμα, αναιρείται από τις ίσες και αντίθετες τάσεις του εδάφους που αναπτύσσονται.

Δ: Στατικό σύστημα – Ο φορέας, αν στραφεί 180° , είναι αμφιπροέχοντας με ομοιόμορφο φορτίο (το οποίο αποτελεί η τάση του εδάφους. Η τιμή της προκύπτει από την ισορροπία του φορέα κατά y).

5.3 Παράδειγμα 3

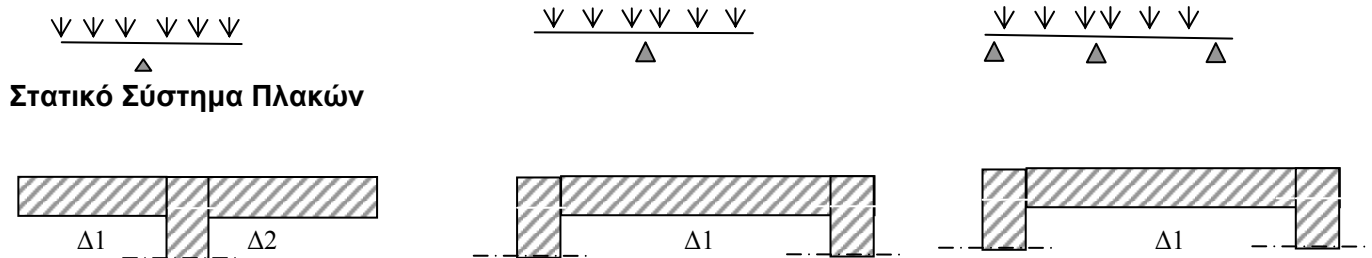
Ζητούνται τα στατικά συστήματα δοκών και πλακών των στεγαστρών Α, Β και Γ στο σχήμα.
Διαστάσεις υποστυλωμάτων: 40/40 cm.



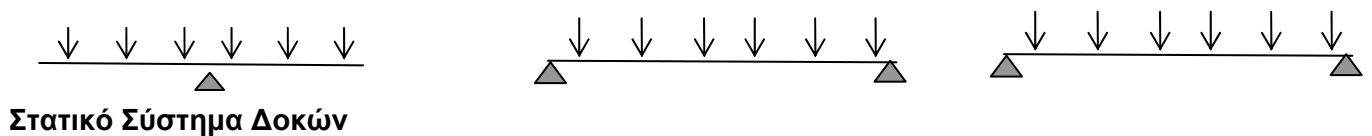
Εντοπισμός Στατικού Συστήματος



Τομή 1-1 κατά μήκος του ανοίγματος των πλακών (κάθετα στις στηρίξεις τους):

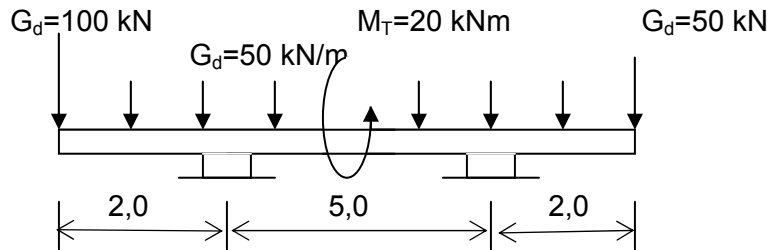


Τομή 2-2 κατά μήκος των δοκών Δ1-Δ2



5.4 Αριθμητικό Παράδειγμα Στατικής Επίλυσης

Ζητείται η στατική επίλυση του φορέα στο σχήμα.



• Στατική Επίλυση

Καμπτικές Ροπές M_{sd}

$$M_A = 100 \cdot 2,0 + 50 \cdot 2,0^2 / 2 = 300 \text{ kNm}$$

$$M_B = 50 \cdot 2,0 + 50 \cdot 2,0^2 / 2 = 200 \text{ kNm}$$

$$M_{AB} = 50 \times 8,0^2 / 8 - (300 + 200) / 2 = 150 \text{ kNm}$$

Τεμνουσες V_{sd}

$$V_{Aap.} = 100 + 50 \cdot 2,0 = 200 \text{ kN}$$

$$V_{A\delta\epsilon\chi.} = 0,5 \cdot 50 \cdot 8,0 + (300 - 200) / 8,0 = 212,5 \text{ kN}$$

$$V_{Bap.} = 0,5 \cdot 50 \cdot 8,0 + (200 - 300) / 8,0 = 187,5 \text{ kN}$$

$$V_{B\delta\epsilon\chi.} = 50 + 50 \cdot 2,0 = 150 \text{ kN}$$

Μεγίστη ροπή στο ανοίγμα στη θέση μηδενισμού της τεμνουσας σ αποσταση: $x = 212,5 / 50 = 4,25\text{m}$
 $\Rightarrow$

$$\max M_{AB} = (100 + 200) / 2 \cdot 2,0 + 212,5 \cdot 4,25 / 2 = 152,5 \text{ kNm}$$

Στρεπτικές Ροπές T_{sd}

$$T_A = T_B = 20 / 2 = 10 \text{ kNm}$$

- Διαγράμματα Στατικών Μεγεθών

