

1^η ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1) Να λυθούν οι διαφορικές εξισώσεις:

i) $ty' + 2y = \sin t$

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

iii) $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$

iv) $xy' + xy = 1 - y$

v) $y' = \frac{1 - 2x}{y}, y(1) = -2$

vi) $(4xy + 3y^2 - x)dx + (x^2 + 2xy)dy = 0$

vii) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^4 + 2xy^3 - 3x^2y^2 - 2x^3y}{2x^2y^2 - 2x^3y - 2x^4}$

2) Υποθέτουμε ότι ένας συγκεκριμένος πληθυσμός ικανοποιεί τη λογιστική εξίσωση:

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right)$$

(i) Αν $y_0 = K/3$, να βρεθεί ο χρόνος τ στον οποίο ο αρχικός πληθυσμός διπλασιάζεται. Να βρεθεί η τιμή του τ που αντιστοιχεί σε $r = 0,025$ ανά έτος.

(ii) Για $y_0 / K = \alpha$, να βρεθεί ο χρόνος T στον οποίο $y(T) / K = \beta$, όπου $0 < \alpha, \beta < 1$. Παρατηρήστε ότι $T \rightarrow \infty$ καθώς $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 1$. Να βρεθεί η τιμή του T για $r = 0,025$ ανά έτος, $\alpha = 0,1$ και $\beta = 0,9$.

3) Ένα δοχείο αρχικά περιέχει 120 λίτρα καθαρό νερό. Ένα μίγμα με συγκέντρωση άλατος g/l εισάγεται στο δοχείο με ρυθμό 2 lt/min, και το καλά αναδευμένο μίγμα εξέρχεται του δοχείου με τον ίδιο ρυθμό. Να βρεθεί μια έκφραση συναρτήσει του γ , για την ποσότητα άλατος στο δοχείο, κάθε στιγμή t . Επίσης, να βρεθεί η οριακή ποσότητα άλατος στο δοχείο καθώς $t \rightarrow \infty$.

4) Κάποιος τολμηρός επενδυτής έχει βρει μια επένδυση που θεωρείται ότι αυξάνει σε αξία με ρυθμό ανάλογο του τετραγώνου της τρέχουσας αξίας. Αν η επένδυση άξιζε ένα εκατομμύριο δολάρια πριν από ένα χρόνο, και τώρα αξίζει δύο εκατομμύρια δολάρια, ποια η αξία της σε 6 μήνες; Σε 2 χρόνια;

5) Η εξίσωση

$$\frac{dy}{dt} = q_1(t) + q_2(t)y(t) + q_3(t)y^2$$

είναι γνωστή ως εξίσωση Riccati. Υποθέτουμε ότι κάποια ειδική λύση y_1 αυτής της εξίσωσης είναι γνωστή. Μια γενικότερη λύση που περιέχει μια αυθαίρετη σταθερά, μπορεί να προκύψει με την αντικατάσταση

$$y = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}$$

Να δειχθεί ότι η $v(t)$ ικανοποιεί τη γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης

$$\frac{dv}{dt} = -(q_2 + 2q_3y_1)v - q_3$$

Σημειώστε ότι η $v(t)$ θα περιέχει μία μόνον αυθαίρετη σταθερά.