ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ & ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
Τομέας Μαθηματικών
Πολυτεχνειούπολη – Ζωγράφου ΑΘΗΝΑ - 157 80
ΤΗΛ. : 772 3291, FAX : 772 1775
ΣΧΟΛΗ ΧΗΜΙΚΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΗ 3^{ΟΥ} ΕΞΑΜΗΝΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙΙ (ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ)
8 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2011

ΖΗΤΗΜΑ ΠΡΩΤΟ:

α) Να βρεθεί η γενική λύση της δ. ε. $2xy^2+2y+\left(2x^2y+2x\right)y'=0$. (μον. 1.5)

β) Να αποδειχτεί ότι οι x και x^3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητες συναρτήσεις στο (-1,1). Τί μπορείτε να συμπεράνετε σχετικά με τη δυνατότητα να αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, με $p(x)$, $q(x)$ συνεχείς συναρτήσεις. (μον. 1.5)

ΖΗΤΗΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ:

α) Δύο λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $t\,y''-(1+t)y'+y=0, t>0$ είναι οι $y_1(t)=e^t$ και $y_2(t)=1+t$. Να βρεθεί η γενική λύση της $t\,y''-(1+t)y'+y=t^2e^{2t}, t>0$. (μον. 1)

β) Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης: $x^2y''-3x\,y'+4y=\ln x,\ x>0$. (μον. 1.5)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΡΙΤΟ:

α) Να προσδιοριστεί το ιδιάζον σημείο της διαφορικής εξίσωσης $x\,y''+2x\,y'+6(x-1)y=0$ και αν είναι κανονικό ιδιάζον να βρεθεί η δείκτρια εξίσωση, οι εκθέτες ιδιομορφίας και το διάστημα σύγκλισής της σε μορφή δυναμοσειράς λύσης. (μον. 1)

β) Να λυθεί με χρήση μετασχηματισμού Laplace το πρόβλημα:

$$y''+4y=\begin{cases}1, & 0\le t<4,\\ 0, & 4\le t<+\infty\end{cases},\ y(0)=3,\ y'(0)=-2.$$ (μον. 1.5)

ΖΗΤΗΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ:

Να βρεθεί η θερμοκρασία $u(x,t)$ για κάθε χρονική στιγμή σε μία μεταλλική ράβδο μήκους 20 εκατοστών, μονωμένης στα άκρα, η οποία αρχικά έχει θερμοκρασία $u(x,0)=20\sin\left(\frac{\pi x}{20}\right)$ σε βαθμούς C και της οποίας τα άκρα διατηρούνται στους 0^0C για όλα τα $t>0$, δηλαδή $u(0,t)=u(20,t)=0$. Η $u(x,t)$ ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας: $u_{xx}(x,t)=u_t(x,t)$, $0<x<20,\ t>0$. (μον. 2)

Δίνεται ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων:

$$L\left(t^n\right)=\frac{n!}{s^{n+1}},\ L(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2},\ L(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2},\ L\left(e^{at}\right)=\frac{1}{s-a},\ L\left(u_a(t)f(t-a)\right)=e^{-sa}F(s),$$

αν $F(s)=L\left(f(t)\right)$ και $u_a(t)=H(t-a)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1, & t\ge a.\end{cases},\ a\ge 0$.

Διάρκεια εξέτασης: 2:45 ώρες

Καλή επιτυχία